Solusi Tugas II — Struktur Aljabar II

Nayaka Reswara Nararya Hidayat

Nazra Arta Mevia Agustian

Wildan Bagus Wicaksono

Soal 1. Diberikan ring $\mathbb{Z}_2[x]$ dan $I := \langle x^2+1 \rangle$ ideal dari $\mathbb{Z}_2[x]$.

(a) Tentukan semua elemen di $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+1\rangle}$.

(b) Buat tabel penjumalahan dan perkalian dari elemen-elemen $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+1\rangle}$.

(c) Tentukan semua pembagi nol sejati dari ring faktor $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+1\rangle}$.

Nazra Arta Mevia Agustian

...

Solusi.

(a) Perhatikan bahwa

$$\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+\overline{1}\rangle} = \left\{ ax+b+\left\langle x^2+1\right\rangle : a,b\in\mathbb{Z}_2 \right\}.$$

Oleh karena itu, diperoleh semua elemen di $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+\overline{1}\rangle}$ adalah

$$\boxed{\{I,\overline{1}+I,x+I,x+\overline{1}+I\}},\quad I=\left\langle x^2+\overline{1}\right\rangle.$$

(b) Menggunakan definisi operasi pada ring faktor, diperoleh tabel berikut. Untuk operasi penjumlahan mudah diperoleh, akan dijelaskan untuk tabel perkalian.

$+$	I	$\overline{1}+I$	$x+I$	$(x+\overline{1})+I$
I	I	$\overline{1}+I$	$x+I$	$(x+\overline{1})+I$
$\overline{1}+I$	$\overline{1}+I$	$(x+\overline{1})+I$	$(x+\overline{1})+I$	$x+I$
$x+I$	$x+I$	$(x+\overline{1})+I$	I	$\overline{1}+I$
$(x+\overline{1})+I$	$(x+\overline{1})+I$	$x+I$	$\overline{1}+I$	I

$\cdot$	I	$\overline{1}+I$	$x+I$	$(x+\overline{1})+I$
I	I	I	I	I
$\overline{1}+I$	I	$\overline{1}+I$	$x+I$	$(x+\overline{1})+I$
$x+I$	I	$x+I$	$\overline{1}+I$	$(x+\overline{1})+I$
$(x+\overline{1})+I$	I	$(x+\overline{1})+I$	$(x+\overline{1})+I$	$\overline{I}$

Pada tabel perkalian, pada baris pertama dan kedua serta kolom pertama dan kedua mudah dilakukan. Perhatikan untuk

$$(x+I)\Big((x+\overline{1})+I\Big) = \Big(x^2+x\Big)+I = (x+1)+\Big(x^2+1\Big)+I = (x+1)+I$$

karena $x^2+1\in I \implies (x^2+1)+I=I$. Kemudian,

$$\Big((x+\overline{1})+I\Big)\Big((x+\overline{1})+I\Big) = (x+1)^2+I = \Big(x^2+2x+1\Big)+I = I$$

karena $(x^2+1)+I=I$ dan $2x=0$.

(c) Perhatikan bahwa $\overline{1} + I$ dan $x + I$ merupakan pembagi nol karena $(\overline{1} + I)y \neq I$ dan $(x+1)y \neq I$ untuk setiap $y \neq I$. Di sisi lain, $(x+\overline{1}) + I$ bukan pembagi nol dikarenakan

$$\Big((x+\overline{1}) + I\Big)\Big((x+\overline{1}) + I\Big) = I.$$

Skema Penilaian:

(i) Menyelesaikan (a). .... **(4)**

(ii) Menyelesaikan (b). **(max 10)**

- Menyelesaikan tabel penjumlahan. .... **(5)**
- Menyelesaikan tabel perkalian. .... **(5)**

(iii) Menyelesaikan (c). .... **(6)**

Soal 2. Misalkan R ring komutatif serta I dan J adalah ideal dari R.

(a) Buktikan bahwa $I \cap J$ ideal dari R.

(b) Buktikan bahwa ring faktor $\frac{R}{I \cap J}$ komutatif jika dan hanya jika masing-masing ring faktor $\frac{R}{I}$ dan $\frac{R}{J}$ juga komutatif.

Nayaka Reswara Nararya Hidayat

. . . . *Solusi.*

(a) Misalkan $x, y \in I \cap J$, ini berarti $x \in I$ dan $x \in J$, serta $y \in I$ dan $y \in J$. Karena I ideal dari R, maka $x - y \in I$ dan $x - y \in J$. Akibatnya, $x - y \in I \cap J$. Sekarang misalkan $r \in R$ dan $a \in I \cap J$, ini berarti $a \in I$ dan $a \in J$. Karena I, J ideal dari R, maka $ar, ra \in I$ dan $ar, ra \in J$. Ini menunjukkan $ar, ra \in I \cap J$. Jadi, terbukti bahwa $I \cap J$ ideal dari R.

(b) Misalkan $K = I \cap J$. Karena K ideal dari R (bagian a), maka R/K juga ring faktor.
($\Rightarrow$) Jika $\frac{R}{K}$ komutatif. Akan dibuktikan $\frac{R}{I}$ dan $\frac{R}{J}$ ring komutatif. Ambil sebarang $a + I, b + I \in R/I$. Karena R/K komutatif, maka

$$(a + K)(b + K) = (b + K)(a + K)$$

yang ekivalen dengan

$$ab + K = ba + K \iff ab - ba \in K = I \cap J.$$

Ini berarti $ab - ba \in I$ dan $ab - ba \in J$ yang berakibat pula $ab + I = ba + I$ sehingga R/I komutatif. Secara analog, diperoleh R/J juga komutatif.
($\Leftarrow$) Jika R/I dan R/J masing-masing ring faktor komutatif. Akan dibuktikan R/K komutatif. Ambil sebarang $a + K, b + K \in R/K$. Karena $R/I, R/J$ ring faktor komutatif, maka

$$(a + I)(b + I) = (b + I)(a + I) \quad \text{dan} \quad (a + J)(b + J) = (b + J)(a + J).$$

Ini berarti $ab + I = ba + I$ dan $ab + J = ba + J$ yang memberikan $ab - ba \in I$ dan $ab - ba \in J$. Artinya $ab - ba \in I \cap J = K$ yang memberikan

$$ab + K = ba + K \iff (a + K)(b + K) = (b + K)(a + K)$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Skema Penialaian:

(i) Menyelesaikan bagian (a). **(max 10)**

- Membuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in I \cap J$ berlaku $x - y \in I \cap J$. . . . . . . **(5)**
- Membuktikan bahwa untuk setiap $a \in R, r \in I \cap J$ berlaku $ar, ra \in I \cap J$. . . **(5)**

(ii) Menyelesaikan bagian (b). **(max 15)**

- Pembuktian jika R/K ring komutatif. Membuktikan $ab - ba \in K$. . . . . **(3)**

- Membuktikan $(a+I)(b+I) = (b+I)(a+I)$ dan menyimpulkan R/I ring komutatif. Begitu juga dengan R/J. .... **(4)**
- Pembuktian jika $R/I, R/J$ ring komutatif, kemudian membuktikan $ab - ba \in I$ dan $ab - ba \in J$. .... **(4)**
- Membuktikan $(a + K)(b + K) = (b + K)(a + K)$. .... **(4)**

▼

Soal 3. Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ dan ring $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$, kemudian dibentuk pemetaan $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$ dengan $f(x) := 5x$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$.

(a) Buktikan bahwa f merupakan homomorfisma ring, namun bukan epimorfisma.

(b) Tentukan $\ker(f)$.

Wildan Bagus Wicaksono

. . . .

Solusi. Dalam menyelesaikan soal ini diperlukan pengetahuan sifat-sifat modulo. Untuk mempermudah penulisan, tulis $[a]_n$ sebagai $a \pmod{n}$. Sebagai contoh, $[20]_3 = [2]_3$ dan $[42]_6 = [0]_6$. Maka berlaku sifat berikut:

$$[a+b]_n = [a]_n + [b]_n, \quad [ab]_n = [a]_n[b]_n.$$

Dalam soal telah dinyatakan f pemetaan, maka akan dilewati pembuktian well-defined terkait.

(a) Akan dibuktikan f homomorfisma. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= [5a]_{10} + [5b]_{10} = [5a + 5b]_{10} = f(a+b), \\ f(a)f(b) &= [5a]_{10}[5b]_{10} = [5a \cdot 5b]_{10} = [25ab]_{10} = [5ab]_{10} = f(ab). \end{aligned}$$

karena $[25]_{10} = [5]_{10}$. Terbukti bahwa f homomorfisma. Akan dibuktikan f bukan epimorfisma. Perhatikan bahwa

$$f(0) = f(2) = f(4) = 0, \quad f(1) = f(3) = f(5) = 5.$$

Ini berarti $2 \in \mathbb{Z}_{10}$ tidak memiliki prapeta. Jadi, f bukan surjektif sehingga f bukan epimorfisma.

(b) Dalam hal ini akan ditentukan $\ker(f) = \{a \in \mathbb{Z}_6 : f(a) = 0\}$. Dari bagian (a), diperoleh bahwa $\ker(f) = \boxed{\{0, 2, 4\}}$.

Skema Penilaian:

(i) Menyelesaikan bagian (a). **(max 15 poin)**

- Membuktikan $f(a+b) = f(a) + f(b)$. . . . . **(5)**
- Membuktikan $f(ab) = f(a)f(b)$. . . . . **(5)**
- Membuktikan ada elemen yang tidak memiliki pra-peta. **(5)**

(ii) Menyelesaikan bagian (b). . . . . **(10)**

▼

Soal 4.

(a) Diberikan ring $A := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ dan $I := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{Q} \right\}$ ideal dari A. Buktikan bahwa $A/I \cong \mathbb{Q}$.

(b) Diberikan ring $\mathbb{Z}_{40}$, $\mathbb{Z}_4$, dan $\mathbb{Z}_{10}$. Buktikan bahwa $\mathbb{Z}_{40}$ tidak isomorfik ring dengan $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$.

Wildan Bagus Wicaksono

. . . .

Solusi.

(a) Tinjau $f : A \to \mathbb{Q}$ dengan $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) = a$. Akan dibuktikan f well-defined. Ambil sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}$ yang memenuhi $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}$ yang artinya $a = c$ dan $b = d$. Ini berarti

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) = a = c = f\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)$$

sehingga terbukti. Akan dibuktikan f surjektif. Ambil sebarang $x \in \mathbb{Q}$, perhatikan bahwa $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \in A$ memenuhi $f\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}\right) = x$ yang menunjukkan setiap elemen di $\mathbb{Q}$ memiliki pra-peta yang membuktikan f surjektif. Akan dibuktikan f homomorfisma. Ambil sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}$, maka

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & a+c \end{bmatrix}\right) = a + c = f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}\right),$$

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{bmatrix}\right) = ac = f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\right) f\left(\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)$$

seperti yang ingin dibuktikan. Karena f homomorfisma dan surjektif, maka f epimorfisma. Akan dibuktikan bahwa $\ker(f) = I$. Misalkan $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \ker(f)$, ini berarti

$$0 = f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) = a \implies \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I$$

sehingga $\ker(f) \subseteq I$. Misalkan $\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ini berarti

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \implies \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \ker(f).$$

Ini menunjukkan $I \subseteq \ker(f)$. Jadi, $\ker(f) = I$ dan menurut teorema isomorfisma berlaku

$$\frac{A}{\ker(f)} \cong \mathbb{Q} \implies \frac{A}{I} \cong \mathbb{Q}$$

seperti yang ingin dibuktikan.

(b) Andaikan $\mathbb{Z}_{40} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$, maka terdapat isomorfisma $f : \mathbb{Z}_{40} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$ yang berarti f bersifat injektif. Ini artinya nilai dari $f(0), f(1), \ldots, f(39)$ semuanya berbeda-beda. Perhatikan bahwa $f(0) = 0$ serta $20 \cdot 2 = 0 = 10 \cdot 4$. Karena f homomorfisma,

$$f(20 \cdot 2) = f(0) = f(10 \cdot 4) \implies f(20)f(2) = 0 = f(10)f(4).$$

Ini menunjukkan bahwa dari $f(2), f(20), f(10), f(4)$ ada dua yang bernilai 0, tentu ini kontradiksi dengan f injektif. Jadi, terbukti bahaw $\mathbb{Z}_{40}$ tidak isomorfik ring dengan $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$.

Skema Penilaian:

(i) Menyelesaikan bagian (a). **(max 20)**

- Memberikan konstruksi $f : A \to \mathbb{Q}$ yang mungkin. .... **(3)**
- Membuktikan f well-defined. .... **(3)**
- Membuktikan f surjektif. .... **(3)**
- Membuktikan f homomorfisma. .... **(3)**
- Membuktikan bahwa $\ker(f) \subseteq I$ dan $i \subseteq \ker(f)$. .... **(5)**
- Menyimpulkannya dengan teorema isomorfisma. .... **(3)**

(ii) Menyelesaikan bagian (b). **(max 10)**

- Mengandaikan isomorfik. .... **(2)**
- Menyatakan f injektif. .... **(3)**
- Menyelesaikan bukti. .... **(5)**