Solusi Tugas I — Struktur Aljabar II

Nayaka Reswara Nararya Hidayat

Nazra Arta Mevia Agustian

Wildan Bagus Wicaksono

Soal 1. Misalkan $A = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$.

(a) Buktikan bahwa $(A, +_{12}, \cdot_{12})$ membentuk ring.

(b) Tentukan, jika ada, semua elemen pembagi nol dan elemen unit di A.

(c) Periksa apakah $(A, +_{12}, \cdot_{12})$ membentuk daerah integral atau tidak.

Wildan Bagus Wicaksono

. . . .

Solusi. Perhatikan bahwa A himpunan tak kosong.

$+_{12}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$

$\cdot_{12}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$

(a) Berdasarkan tabel, telah dibuktikan:

- Berlaku sifat tertutup terhadap operasi $+_{12}$ dan $\cdot_{12}$ di A. Hal ini ditunjukkan dengan hasil operasi pada tabel tersebut merupakan anggota A.
- Berlaku sifat asosiatif terhadap operasi $+_{12}$ dan $\cdot_{12}$ di A. Hal ini sudah dijamin juga berdasarkan sifat operasi $+_{12}$ dan $\cdot_{12}$, yaitu $(a+b)+c \equiv a+(b+c) \pmod{12}$ dan $(ab)c \equiv a(bc) \pmod{12}$.
- Berlaku sifat komutatif terhadap operasi $+_{12}$. Hal ini sudah dijamin juga dari sifat operasi $+_{12}$, yaitu $a+b \equiv b+a \pmod{12}$.
- A memiliki elemen nol, yaitu $0_A = \overline{0}$. Hal ini dapat ditunjukkan melalui baris pertama dan kolom pertama, yaitu $\overline{0} + \overline{x} = \overline{x} = \overline{x} + \overline{0}$ untuk setiap $\overline{x} \in A$.
- Setiap elemen di A memiliki invers terhadap operasi $+_{12}$, yaitu $(-\overline{0}) = \overline{0}, (-\overline{3}) = \overline{9}, (-\overline{6}) = \overline{6}$, dan $(-\overline{9}) = \overline{3}$.
- Berlaku sifat distributif di A. Hal ini sudah dijamin dari sifat operasi $+_{12}$ dan $\cdot_{12}$, yaitu

$$a(b+c) \equiv ab+ac \pmod{12}, \quad (a+b)c \equiv ac+bc \pmod{12}.$$

Jadi, terbukti bahwa A membentuk ring.

(b) Untuk menentukan pembagi nol di A, maka perlu diperhatikan elemen $a, b \neq \overline{0}$ yang memenuhi $a \cdot_{12} b = \overline{0}$. Hal ini hanya dipenuhi untuk $\overline{6} \cdot \overline{6} = \overline{0}$. Jadi, $\boxed{\overline{6}}$ merupakan satu-satunya pembagi nol.

Perhatikan bahwa $\overline{9}$ merupakan elemen unit karena $\overline{9} \cdot_{12} x = x = x \cdot_{12} \cdot \overline{9}$ untuk setiap $x \in A$. Dengan memerhatikan tabel, diperoleh $\overline{9}^{-1} = \overline{9}$ dan $\overline{3}^{-1} = \overline{3}$ sehingga $\overline{3}$ dan $\overline{9}$ merupakan elemen unit. Namun, $\overline{6}$ bukan elemen unit karena untuk setiap $x \in A$ memenuhi $\overline{6} \cdot x \neq \overline{9}$. Jadi, $\boxed{\{\overline{3}, \overline{6}\}}$ sebagai himpunan elemen unit di A.

(c) Perhatikan bahwa $\overline{6} \neq \overline{0}_A$, namun $\overline{6} \cdot_{12} \overline{6} = \overline{0} = \overline{0}_A$. Ini menunjukkan bahwa $\overline{6}$ merupakan pembagi nol di A. Jadi, A $\boxed{\text{bukan daerah integral}}$.

Skema Penilaian:

- Bagian (a). **(max 5 poin)**
  - Menunjukkan hasil operasi antar elemen untuk membuktikan sifat tertutup di A. **(3 poin).**
  - Dapat menentukan elemen nol di A. **(1 poin)**
  - Dapat menentukan elemen invers di A terhadap $+_{12}$. **(1 poin)**
  - Memverivikasi sifat lainnya. **(2 poin)**
- Bagian (b). **(max 3)**
  - Menyebutkan semua pembagi nol di A. **(2)**
  - Menyebutkan elemen unit di A. **(1)**
  - Menyebutkan semua elemen unit di A. **(1)**
- Menyelesaikan bagian (c). **(2)**

Soal 2. Diberikan ring $\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right] = \left\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan biasa $+$ dan perkalian biasa $\cdot$. Periksa apakah $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right], +, \cdot\right)$ merupakan daerah integral atau field.

Wildan Bagus Wicaksono

. . . .

Solusi. Tulis ulang $R = \mathbb{Q}\left[\sqrt{3}\right]$, akan dibuktikan bahwa R merupakan field. Dalam hal ini telah diberikan informasi bahwa R merupakan ring. Perlu dibuktikan bahwa R merupakan ring komutatif, memiliki elemen satuan, dan setiap elemennya merupakan unit. Dapat diverivikasi bahwa $0 = 0 + 0\sqrt{3} \in R$ merupakan elemen nol di R.

- Misalkan $x + y\sqrt{3}, a + b\sqrt{3} \in R$ di mana $x, y, a, b \in \mathbb{Q}$. Maka

  $$\left(x + y\sqrt{3}\right) \cdot \left(a + b\sqrt{3}\right) = (ax + 3by) + (ay + bx)\sqrt{3} = \left(a + b\sqrt{3}\right)\left(x + y\sqrt{3}\right),$$

  terbukti R ring komutatif.

- Perhatikan bahwa $1 = 1 + 0\sqrt{3} \in R$. Karena untuk sebarang $x + y\sqrt{3} \in R$ dengan $x, y \in \mathbb{Q}$ berlaku

  $$\left(x + y\sqrt{3}\right) \cdot 1 = x + y\sqrt{3} = 1 \cdot \left(x + y\sqrt{3}\right),$$

  ini menunjukkan 1 sebagai elemen satuan di R, tulis $1_R = 1$. Jadi, R memiliki elemen satuan.

- Akan dibuktikan bahwa jika $x + y\sqrt{3} \in R$ dengan $x, y \in \mathbb{Q}$ dan $(x, y) \neq (0, 0)$, maka $x^2 - 3y^2 \neq 0$. Andaikan ada $x, y \in \mathbb{Q}$ dengan $(x, y) \neq (0, 0)$ yang memenuhi $x^2 - 3y^2 = 0$. Namun, $x^2 = 3y^2$ yang berarti $x = \pm y\sqrt{3}$. Jelas bahwa jika salah satu dari x atau y yang bernilai 0 maka yang lainnya bernilai 0. Jadi, asumsikan $x, y \neq 0$. Tulis $\frac{x}{y} = \pm\sqrt{3}$. Karena $x, y \in \mathbb{Q}$, maka $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, namun $\pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ sehingga kontradiksi. Jadi, $x + y\sqrt{3} \in R$ dengan $(x, y) \neq (0, 0)$ dan $x, y \in \mathbb{Q}$ berakibat $x^2 - 3y^2 \neq 0$. Ini berarti $\frac{x}{x^2-3y^2} \in \mathbb{Q}$ dan $\frac{-y}{x^2-3y^2} \in \mathbb{Q}$. Ini berarti

  $$\frac{x}{x^2 - 3y^2} - \frac{y}{x^2 - 3y^2}\sqrt{3} = \frac{x}{x^2 - 3y^2} + \frac{-y}{x^2 - 3y^2}\sqrt{3} \in R.$$

  Karena

  $$\begin{aligned}\left(x + y\sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2 - 3y^2} - \frac{y}{x^2 - 3y^2}\sqrt{3}\right) &= \frac{\left(x + y\sqrt{3}\right)\left(x - y\sqrt{3}\right)}{x^2 - 3y^2} \\ &= \frac{x^2 - 3y^2}{x^2 - 3y^2} \\ &= 1,\end{aligned}$$

  dan secara analog untuk $\left(\frac{x}{x^2-3y^2} - \frac{y}{x^2-3y^2}\sqrt{3}\right) \cdot \left(x + y\sqrt{3}\right) = 1$, ini menunjukkan bahwa

  $$\left(x + y\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{x}{x^2 - 3y^2} - \frac{y}{x^2 - 3y^2}\sqrt{3}.$$

  Jadi, setiap elemen tak nol di R merupakan unit.

Ini membuktikan bahwa R meruapkan $\boxed{\text{field}}$, akibatnya juga $\boxed{\text{daerah integral}}$. ▼

Catatan. *Dalam menentukan elemen invers dari* $x + y\sqrt{3} \in R$ *dapat diperoleh dengan menyelesaikan* $a, b \in \mathbb{Q}$ *dalam* x, y *dari persamaan*

$$\left(x + y\sqrt{3}\right) \cdot \left(a + b\sqrt{3}\right) = 1 = \left(a + b\sqrt{3}\right) \cdot \left(x + y\sqrt{3}\right).$$

Dengan konteks $\cdot$ *merupakan operasi perkalian biasanya,*

$$a + b\sqrt{3} = \frac{1}{x + y\sqrt{3}} = \frac{1}{x + y\sqrt{3}} \left(\frac{x - y\sqrt{3}}{x - y\sqrt{3}}\right) = \frac{x}{x^2 - 3y^2} + \frac{-y}{x^2 - 3y^2}\sqrt{3}.$$

Maka $a = \frac{x}{x^2-3y^2}$ *dan* $b = \frac{-y}{x^2-3y^2}$. *Untuk menunjukkan bahwa untuk sebarang* $x, y \in \mathbb{Q}$ *maka* $a, b \in \mathbb{Q}$ *seperti pada solusi yang telah dijelaskan.*

Skema Penilaian:

- Membuktikan ring komutatif. **(2)**
- Membuktikan memiliki elemen satuan. **(2)**
- Membuktikan setiap elemennya merupakan unit lalu menyimpulkan field. **(4)**
  Jika tidak membuktikan untuk setiap $x+y\sqrt{3} \in R$ dengan $(x, y) \neq (0, 0)$ maka $x^2-3y^2 \neq 0$. **(3)**
- Menyimpulkan R daerah integral. **(2)**

Soal 3. Tentukan semua subring yang mungkin dari $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$.

Nayaka Reswara Nararya Hidayat

. . . .

Solusi.

Lemma: Modul 2 – Lemma 18

Diberikan bilangan asli n dan dibentuk ring $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. Semua subring dari $\mathbb{Z}_n$ adalah $k\mathbb{Z}_n$ di mana k faktor positif dari n.

Faktor positif dari 5 adalah 1 dan 5. Jadi, semua subring yang dimaksud adalah $1\mathbb{Z}_5 = \boxed{\mathbb{Z}_5}$ dan $5\mathbb{Z}_5 = \boxed{\{\overline{0}\}}$.

Skema Penilaian:

- Menyebutkan satu subring saja. **(5)**
- Menyebutkan semua subring yang mungkin. **(10)**

Soal 3. Misalkan R adalah suatu ring dan A, B subring dari R.

(a) Buktikan bahwa $A \cap B$ merupakan subring dari R.

(b) Berikan contoh A, B, dan R untuk menunjukkan bahwa $A \cup B$ **belum tentu** subring dari R.

Nayaka Reswara Nararya Hidayat

. . . .

Solusi.

(a) Ambil sebarang $x, y \in A \cap B$. Akan dibuktikan bahwa $x - y, xy \in A \cap B$. Karena $x, y \in A \cap B$, maka $x, y \in A$ dan $x, y \in B$. Karena A, B merupakan subring dari R, maka $x - y, xy \in A$ dan $x - y, xy \in B$. Ini menunjukkan $x - y, xy \in A \cap B$. Terbukti bahwa $A \cap B$ subring dari R.

(b) Pilih $R = \mathbb{Z}_{12}$ dengan $A = 3\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ dan $B = 4\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$. Diperoleh $A \cup B = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{9}\}$. Karena $\overline{3} + \overline{4} = \overline{7} \notin A \cup B$, ini menunjukkan bahwa tidak berlaku sifat tertutup terhadap $+_{12}$ di $A \cup B$. Jadi, $A \cup B$ bukan subring.

Skema Penilaian:

- Menyelesaikan bagian (a). **(10)**
- Menyelesaikan bagian (b). **(5)**
  Jika tidak memberikan contoh sifat mana yang disangkal. **(0)**

Soal 5. Diberikan ring $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ dan $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$. Didefinisikan operasi $\bigoplus$ dan $\bigotimes$ pada $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ dengan

$$(a, b) \bigoplus (c, d) = (a +_3 c, b +_5 d), \quad (a, b) \bigotimes (c, d) = (a \cdot_3 c, b \cdot_5 d)$$

untuk setiap $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$. Dibentuk ring $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, \bigoplus, \bigotimes)$.

(a) Tentukan order dari $(\overline{2}, \overline{4}) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

(b) Tentukan $char(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$.

(c) Tentukan semua ideal di $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, \bigoplus, \bigotimes)$.

(d) Apakah $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, \bigoplus, \bigotimes)$ merupakan ideal pokok?

Nazra Arta Mevia Agustian

....

Solusi.

(a) Perhatikan lemma berikut.

Lemma: Modul 2 – Lemma 15

Misalkan $(R, +_R, \cdot_R), (S, +_S, \cdot_S)$ merupakan ring dan dibentuk ring $(R \times S, \bigoplus, \bigotimes)$ dengan

$$(r_1, s_1) \bigoplus (r_2, s_2) = (r_1 +_R r_2, s_1 +_S s_2), \quad (r_1, s_1) \bigotimes (r_2, s_2) = (r_1 \cdot_R r_2, s_1 \cdot_S s_2)$$

untuk setiap $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$. Jika $(r, s) \in R \times S$ dengan $o(r), o(s) < \infty$, maka $o(r, s) = \text{KPK}(o(r), o(s))$.

Perhatikan bahwa $\overline{2} \in \mathbb{Z}_3$ berlaku $o\left(\overline{2}\right) = 3$ karena

$$1 \cdot \overline{2} = \overline{2} \neq \overline{0}, \quad 2 \cdot \overline{2} = \overline{1} \neq \overline{0}, \quad 3 \cdot \overline{2} = \overline{0}.$$

Selain itu, untuk $\overline{4} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $o\left(\overline{4}\right) = 5$ karena

$$1 \cdot \overline{4} = \overline{1} \neq \overline{0},\ 2 \cdot \overline{4} = \overline{3} \neq \overline{0},\ 3 \cdot \overline{4} = \overline{2} \neq \overline{0},\ 4 \cdot \overline{4} = \overline{1}, 5 \cdot \overline{4} = \overline{0}.$$

Oleh karena itu, $o\left(\overline{2}, \overline{4}\right) = \text{kpk}(3, 5) = \boxed{15}$.

(b) Akan digunakan teorema berikut.

Teorema: Modul 2 – Teorema 10 dan Teorema 11

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1_R. Jika $o(1_R) = n$, maka $char(R) = n$.

Perhatikan bahwa $1_{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5} = \left(\overline{1}, \overline{1}\right)$ sebagai elemen satuan di $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$. Karena dalam $\mathbb{Z}_3$ berlaku $o\left(1_{\mathbb{Z}_3}\right) = o\left(\overline{1}\right) = 3$ dan dalam $\mathbb{Z}_5$ berlaku $o\left(1_{\mathbb{Z}_5}\right) = o\left(\overline{1}\right) = 5$, dari lemma sebelumnya berlaku $o\left(\overline{1}, \overline{1}\right) = \text{kpk}(3, 5) = 15$. Karena $o\left(1_{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5}\right) = o\left(\overline{1}, \overline{1}\right) = 15$, dari teorema di atas berlaku $char(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) = \boxed{15}$.

(c) Perhatikan lemma dan akibat berikut.

Lemma: Modul 2 – Lemma 17

Misalkan R dan S merupakan ring dengan satuan, serta $1_R \neq 0_R$ dan $1_S \neq 0_S$. Dibentuk ring $(R \times S, \bigoplus, \bigotimes)$ dengan

$$(r_1, s_1) \bigoplus (r_2, s_2) = (r_1 +_R r_2, s_1 +_S s_2), \quad (r_1, s_1) \bigotimes (r_2, s_2) = (r_1 \cdot_R r_2, s_1 \cdot_S s_2)$$

untuk setiap $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$. Jika K merupakan ideal di $R \times S$, maka $K = I \times J$ di mana I ideal dari R dan J ideal dari S.

Akibat: Modul 2 – Akibat 19

Diberikan bilangan asli n dan dibentuk ring $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. Semua subring dari $\mathbb{Z}_n$ adalah $k\mathbb{Z}_n = \langle k \rangle$ di mana k faktor positif dari n. Jadi, $\langle k \rangle$ juga merupakan subring, ideal, sekaligus ideal pokok.

Perhatikan **Akibat 19**. Faktor positif dari 3 adalah 1 dan 3, jadi semua ideal di $\mathbb{Z}_3$ adalah $1\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_3$ dan $3\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}\}$. Faktor positif dari 5 adalah 1 dan 5, jadi semua ideal di $\mathbb{Z}_5$ adalah $1\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5$ dan $5\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}\}$. Perhatikan **Lemma 17**. Karena $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ memiliki elemen satuan $1_{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5} = (\overline{1}, \overline{1}) \neq (\overline{0}, \overline{0}) = 0_{\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5}$, semua ideal dari $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ diperoleh dari

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 &= \{(a, b) : a \in \mathbb{Z}_3, b \in \mathbb{Z}_5\} \\
\mathbb{Z}_3 \times \{\overline{0}\} &= \{(a, \overline{0}) : a \in \mathbb{Z}_3\} \\
\{\overline{0}\} \times \mathbb{Z}_5 &= \{(\overline{0}, a) : a \in \mathbb{Z}_5\} \\
\{\overline{0} \times \overline{0}\} &= \{(\overline{0}, \overline{0})\}.
\end{aligned}$$

(d) Perhatikan $(\overline{1}, \overline{1}) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ memenuhi $(a, b) \bigotimes (\overline{1}, \overline{1}) = (a, b)$ untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$. Ini berarti $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 = \langle (\overline{1}, \overline{1}) \rangle$ sehingga $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ merupakan $\boxed{\text{ideal pokok}}$.

Skema Penilaian:

- Menyelesaikan bagian (a). **(5)**
- Menyelesaikan bagian (b). **(5)**
- Menyelesaikan baigan (c). **5**
  Jika hanya menyebutkan 1. **(1)**
  Jika hanya menyebutkan 2. **(3)**
  Jika hanya menyebutkan 3. **(4)**
- Menyelesaikan bagian (d). **(5)**

Soal 6. Diberikan ring R dengan elemen satuan 1_R dan I ideal dari R.

(a) Diketahui $1_R \in I$. Buktikan bahwa untuk setiap $x \in R$ berlaku $x \in I$. Simpulkan $I = R$.

(b) Jika $I \neq R$, buktikan $1_R \notin I$.

Nazra Arta Mevia Agustian

....

(a) Jelas bahwa $I \subseteq R$ dari definisi ideal. Ambil sebarang $r \in R$. Karena $1_R \in I$ maka berlaku $r = 1_R r \in I$. Ini menunjukkan bahwa $R \subseteq I$. Akibatnya, $I = R$.

(b) Kontraposisi dari kalimat "Jika $1_R \in I$ maka $I = R$", cukup dari (a).

Skema Penilaian:

- Menyelesaikan bagian (a). **(10)**
- Menyelesaikan bagian (b). **(5)**

Soal 7. Diberikan dua field $(X, +, \cdot)$ dan $(Y, \#, *)$ dengan $|X|, |Y| > 1$. Didefinisikan operasi biner $\bigoplus$ dan $\bigotimes$ pada $X \times Y$ dengan

$$(a, b) \bigoplus (c, d) = (a + c, b \# d), \quad (a, b) \bigotimes (c, d) = (a \cdot c, b * d)$$

untuk setiap $(a, b), (c, d) \in X \times Y$. Akibatnya, $(X \times Y, \bigoplus, \bigotimes)$ membentuk ring.

(a) Tentukan elemen nol dan elemen satuan di $(X \times Y, \bigoplus, \bigotimes)$. (jika ada.)

(b) Tentukan semua elemen pembagi nol dan elemen unit di $(X \times Y, \bigoplus, \bigotimes)$. (jika ada.)

Catatan. Mahasiswa tidak perlu membuktikan $(X \times Y, \bigoplus, \bigotimes)$ merupakan ring di lembar jawaban. Namun, diharapkan mahasiswa mengetahui bagaimana membuktikan bahwa $X \times Y$ merupakan ring dan diserahkan sebagai latihan mandiri.

Wildan Bagus Wicaksono

. . . .

Solusi. Akan ditentukan semua elemen pembagi nol di $X \times Y$. Sebelum mengerjakan bagian (b), maka harus diidentifikasi terlebih dahulu $0_{X\times Y}$ dan $1_{X\times Y}$ terlebih dahulu (jika ada).

(a) Akan ditentukan $0_{X\times Y}$. Karena X dan Y merupakan field (yang artinya merupakan ring), maka X dan Y masing-masing memiliki elemen nol, sebut saja $0_X \in X$ dan $0_Y \in Y$. Perhatikan bahwa untuk setiap $(a, b) \in X \times Y$ berlaku $a + 0_X = a = 0_X + a$ dan $b \# 0_Y = b = 0_Y \# b$. Tinjau bahwa $(0_X, 0_Y) \in X \times Y$ memenuhi

$$\begin{aligned}(a, b) \bigoplus (0_X, 0_Y) &= (a + 0_X, b \# 0_Y) = (a, b),\\ (0_X, 0_Y) \bigoplus (a, b) &= (0_X + a, 0_Y \# b) = (a, b)\end{aligned}$$

Karena $(a, b) \bigoplus (0_X, 0_Y) = (a, b) = (0_X, 0_Y) \bigoplus (a, b)$, ini menunjukkan bahwa $0_{X\times Y} = (0_X, 0_Y)$ sebagai elemen nol di $X \times Y$. Jadi, $\boxed{0_{X\times Y} = (0_X, 0_Y)}$.
Akan ditentukan $1_{X\times Y}$. Karena X dan Y merupakan field (yang artinya merupakan ring dengan satuan), maka X dan Y masing-masing memiliki elemen satuan, sebut saja $1_X \in X$ dan $1_Y \in Y$. Perhatikan bahwa untuk setiap $(a, b) \in X \times Y$ berlaku $a \cdot 1_X = a = 1_X \cdot a$ dan $b * 1_Y = b = 1_Y * b$. Tinjau bahwa $(1_X, 1_Y) \in X \times Y$ memenuhi

$$\begin{aligned}(a, b) \bigotimes (1_X, 1_Y) &= (a \cdot 1_X, b * 1_Y) = (a, b),\\ (1_X, 1_Y) \bigotimes (a, b) &= (1_X \cdot a, 1_Y * b) = (a, b).\end{aligned}$$

Karena $(a, b) \bigotimes (1_X, 1_Y) = (a, b) = (1_X, 1_Y) \bigotimes (a, b)$, ini menunjukkan $(1_X, 1_Y)$ merupakan elemen satuan di $X \times Y$. Jadi, $\boxed{1_{X\times Y} = (1_X, 1_Y)}$.

(b) Untuk membuktikan $(a, b) \in X \times Y$ dengan $(a, b) \neq (0_X, 0_Y)$ merupakan pembagi nol di $X \times Y$, perlu dibuktikan terdapat $(p, q) \in X \times Y$ yang memenuhi

$$(a, b) \bigotimes (p, q) = (0_X, 0_Y) = (p, q) \bigotimes (a, b).$$

Sedangkan, untuk membuktikan $(c, d) \in X \times Y$ dengan $(a, b) \neq (0_X, 0_Y)$ merupakan elemen unit di $X \times Y$, perlu dibuktikan terdapat $(r, s) \in X \times Y$ yang memenuhi

$$(c, d) \bigotimes (p, q) = (1_X, 1_Y) = (p, q) \bigotimes (c, d).$$

Selain itu, kondisi $|X| > 1$ menunjukkan bahwa $0_X \neq 1_X$, secara analog $0_Y \neq 1_Y$ (why?).

> **Klaim I.** Semua elemen pembagi nol di $X \times Y$ berbentuk $(a, 0_Y)$ dan $(0_X, b)$ di mana $a \neq 0_X$ dan $b \neq 0_Y$.

Bukti. Misalkan $(a, b) \neq (0_X, 0_Y)$ pembagi nol di $X \times Y$. Maka terdapat $(p, q) \neq (0_X, 0_Y)$ yang memenuhi

$$(0_X, 0_Y) = (a, b)(p, q) = (ap, bq) \implies ap = 0_X, \quad bq = 0_Y.$$

Karena X, Y field, maka X, Y juga daerah integral. Akibatnya, $ap = 0_X$ memberikan $a = 0_X$ atau $p = 0_X$. Demikian juga $b = 0_Y$ atau $q = 0_Y$. Jika $a = 0_X$, maka $(a, b) = (0_X, b)$ sehingga haruslah $b \neq 0_Y$. Oleh karena itu, $q = 0_Y$. Ini menunjukkan bahwa $(a, b) = (0_X, b)$ dengan $b \neq 0_Y$ merupakan pembagi nol karena terdapat $(p, 0_Y)$ dengan $p \neq 0_X$ yang memenuhi $(a, b)(p, 0_Y) = (0_X, b)(p, 0_Y) = (0_X, 0_Y)$. Secara analog, $(0_X, b)$ juga pembagi nol di $X \times Y$. □

> **Klaim II.** Semua elemen unit di $X \times Y$ berbentuk (a, b) dengan $a \neq 0_X$ dan $b \neq 0_Y$.

Bukti. Misalkan $(a, b) \neq (0_X, 0_Y)$ merupakan elemen unit di $X \times Y$. Maka terdapat $(p, q) \neq (0_X, 0_Y)$ yang memenuhi

$$(1_X, 1_Y) = (a, b)(p, q) = (ap, bq), \quad (1_X, 1_Y) = (p, q)(a, b) = (pa, qb)$$

sehingga $ap = pa = 1_X$ dan $bq = qb = 1_Y$. Karena X, Y field serta $a \neq 0_X$ dan $b \neq 0_Y$, maka $p = a^{-1} \in X$ dan $q = b^{-1} \in Y$. Ini menunjukkan bahwa $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$ sehingga (a, b) merupakan unit. □

Jadi, semua elemen pembagi nol di $X \times Y$ adalah

$$\boxed{\text{semua elemen } X \times Y \text{ berbentuk } (a, 0_Y), (0_X, b) \text{ dengan } a \neq 0_X, b \neq 0_Y}$$

dan semua elemen unit di $X \times Y$ adalah

$$\boxed{\text{semua elemen } X \times Y \text{ berbentuk } (a, b) \text{ dengan } a \neq 0_X, b \neq 0_Y}.$$

Skema Penilaian:

- Bagian (a). **(max 6 poin)**
  - Berhasil mengidentifikasi $0_{X \times Y}$. **(3)**

    - Berhasil mengidentifikasi $1_{X\times Y}$. **(3)**
- Bagian (b). **(max 14 poin)**
    - Berhasil menemukan semua elemen pembagi nol. **(7)**
    - Berhasil menemukan semua elemen unit. **(7)**

Tambahan. Dalam solusi ini akan disajikan bagaimana membuktikan $X \times Y$ merupakan ring. Telah diketahui bahwa X dan Y merupakan ring, kemudian langkah-langkah pembuktiannya menggunakan sifat-sifat dalam ring X dan Y. Perhatikan bahwa $(0_X, 0_Y) \in X \times Y$ sehingga $X \times Y$ tak kosong. Ambil sebarang $(a,b),(c,d),(e,f) \in X \times Y$.

- Akan dibuktikan berlaku sifat tertutup terhadap $\bigoplus$ dan $\bigotimes$. Perhatikan bahwa

$$(a,b) \bigoplus (c,d) = (a+c, b \# d), \quad (a,b) \bigotimes (c,d) = (a \cdot c, b * d).$$

Karena $a+c, a\cdot c \in X$ dan $b \# d, b * d \in Y$, ini menunjukkan $(a+b, c \# d) \in X \times Y$ dan $(a \cdot c, b * d) \in X \times Y$. Jadi, $(a,b) \bigoplus (c,d) \in X \times Y$ dan $(a,b) \bigotimes (c,d) \in X \times Y$ sehingga terbukti berlaku sifat tertutup.

- Akan dibuktikan berlaku sifat komutatif terhadap $\bigoplus$. Menggunakan fakta berlaku sifat komutatif di masing-masing ring X dan Y terhadap operasi $+$ dan $\#$ (berturut-turut), diperoleh

$$(a,b) \bigoplus (c,d) = (a+c, b \# d) = (c+a, d \# b) = (c,d) \bigoplus (a,b)$$

seperti yang ingin dibuktikan.

- Akan dibuktikan berlaku sifat asosiatif terhadap $\bigoplus$ dan $\bigotimes$. Menggunakan fakta sifat asosiatif berlaku pada X dan Y terhadap operasi $+$ dan $\#$ berturut-turut, diperoleh

$$\begin{aligned}\Big[(a,b) \bigoplus (c,d)\Big] \bigoplus (e,f) &= (a+c, b \# d) \bigoplus (e,f) \\ &= \Big([a+c]+e, [b \# d] \# f\Big) \\ &= \Big(a+[c+e], b \# [d \# f]\Big) \\ &= (a,b) \bigoplus (c+e, d \# f) \\ &= (a,b) \bigoplus \Big[(c,d) \bigoplus (e,f)\Big]\end{aligned}$$

yang membuktikan sifat asosiatif berlaku terhadap $\bigoplus$. Menggunakan fakta sifat asosiatif juga berlaku pada X dan Y terhadap operasi $\cdot$ dan $*$ berturut-turut, diperoleh

$$\begin{aligned}\Big[(a,b) \bigotimes (c,d)\Big] \bigotimes (e,f) &= (a \cdot c, b * d) \bigotimes (e,f) \\ &= \Big([a \cdot c] \cdot e, [b * d] * f\Big) \\ &= \Big(a \cdot [c \cdot e], b * [d * f]\Big) \\ &= (a,b) \bigotimes (c \cdot e, d * f)\end{aligned}$$

$$= (a,b) \bigotimes [(c,d) \bigotimes (e,f)]$$

yang membuktikan sifat asosiatif berlaku terhadap $\bigotimes$.

- Akan dibuktikan $X \times Y$ memiliki elemen nol. Perhatikan bahwa untuk $(a,b) \in X \times Y$ berlaku $a + 0_X = a = 0_X + a$ dan $b \# 0_Y = b = 0_Y \# b$. Tinjau bahwa $(0_X, 0_Y) \in X \times Y$ memenuhi

$$\begin{aligned}
(a,b) \bigoplus (0_X, 0_Y) &= (a + 0_X, b \# 0_Y) = (a,b), \\
(0_X, 0_Y) \bigoplus (a,b) &= (0_X + a, 0_Y \# b) = (a,b)
\end{aligned}$$

  Karena $(a,b) \bigoplus (0_X, 0_Y) = (a,b) = (0_X, 0_Y) \bigoplus (a,b)$, ini menunjukkan bahwa $0_{X\times Y} = (0_X, 0_Y)$ sebagai elemen nol di $X \times Y$.

- Akan dibuktikan setiap elemen di $X \times Y$ memiliki invers terhadap $\bigoplus$. Perhatikan bahwa $a \in X, b \in Y$, maka terdapat $(-a) \in X$ dan $(-b) \in Y$ yang memenuhi $a + (-a) = 0_X = (-a) + a$ dan $b \# (-b) = 0_Y = (-b) \# b$. Perhatikan bahwa $(-a,-b) \in X \times Y$ dan memenuhi

$$\begin{aligned}
(a,b) \bigoplus (-a,-b) &= \Big(a + (-a), b \# (-b)\Big) = (0_X, 0_Y) = 0_{X\times Y}, \\
(-a,-b) \bigoplus (a,b) &= \Big((-a) + a, (-b) \# b\Big) = (0_X, 0_Y) = 0_{X\times Y}.
\end{aligned}$$

  Karena $(a,b) \bigoplus (-a,-b) = 0_{X\times Y} = (-a,-b) \bigoplus (a,b)$, ini menunjukkan bahwa $-(a,b) = (-a,-b)$. Jadi, setiap elemen di $X \times Y$ memiliki invers terhadap $\bigoplus$.

- Akan dibuktikan berlaku sifat distributif. Karena $a,c,e \in X$ dan $b,d,f \in Y$, tentu berlaku sifat distributif:

$$\begin{aligned}
(a+b)\cdot c &= (a\cdot c) + (b \cdot d), & a \cdot (b+c) &= (a\cdot b) + (a \cdot c), \\
(d \# e) * f &= (d * f) \# (e * f), & d * (e \# f) &= (d * e) \# (d * f).
\end{aligned}$$

  Diperoleh

$$\begin{aligned}
\Big[(a,b) \bigoplus (c,d)\Big] \bigotimes (e,f) &= (a+c, b \# d) \bigotimes (e,f) \\
&= \Big([a+c]\cdot e, [b \# d] * f\Big) \\
&= \Big([a\cdot e] + [c \cdot e], [b * f] \# [d * f]\Big) \\
&= (a\cdot e, b * f) \bigoplus (c \cdot e, d * f) \\
&= \Big[(a,b) \bigotimes (e,f)\Big] \bigoplus \Big[(c,d) \bigotimes (e,f)\Big]
\end{aligned}$$

  yang menunjukkan berlaku sifat distributif kanan. Di sisi lain,

$$\begin{aligned}
(a,b) \bigotimes \Big[(c,d) \bigoplus (e,f)\Big] &= (a,b) \bigotimes \Big[(c+e, d \# f)\Big] \\
&= \Big[a \cdot (c+e), b * (d \# f)\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big([a \cdot c] + [a \cdot e], [b * d] \# [b * f]\Big) \\
&= (a \cdot c, b * d) \bigoplus (a \cdot e, b * f) \\
&= \Big[(a, b) \bigotimes (c, d)\Big] \bigoplus \Big[(a, b) \bigotimes (e, f)\Big]
\end{aligned}
$$

yang menunjukkan berlaku sifat distributif kiri.

Jadi, terbukti bahwa $X \times Y$ membentuk ring.