Solusi UTR — Struktur Aljabar II

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Soal 1. Diberikan $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right] = \{x + y\sqrt{-3} : x, y \in \mathbb{Z}\}$ dan didefiniskan operasi $*$ dan $\cdot$ sebagai berikut.

$$\left(a + b\sqrt{-3}\right) * \left(c + d\sqrt{-3}\right) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-3}$$
$$\left(a + b\sqrt{-3}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{-3}\right) = (ac - 3bd) + (ad + bc)\sqrt{-3}.$$

Periksa apakah $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ merupakan ring, daerah integral, atau field.

....

Solusi. Misalkan $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$, akan dibuktikan R merupakan ring. Ambil sebarang $a + b\sqrt{-3}, p + q\sqrt{-3}, x + y\sqrt{-3} \in R$ di mana $a, b, p, q, x, y \in \mathbb{Z}$.

- Akan dibuktikan bersifat tertutup terhadap $*$ dan $\cdot$. Perhatikan bahwa

$$\left(a + b\sqrt{-3}\right) * \left(c + d\sqrt{-3}\right) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-3} \in R$$
$$\left(a + b\sqrt{-3}\right) \cdot \left(c + d\sqrt{-3}\right) = (ac - 3bd) + (ad + bc)\sqrt{-3} \in R.$$

  karena $a + c, b + d, ac - 3bd, ad + bc \in \mathbb{Z}$.

- Akan dibuktikan bersifat komutatif terhadap $*$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\left(a + b\sqrt{-3}\right) * \left(c + d\sqrt{-3}\right) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{-3} \\ &= (c + a) + (d + b)\sqrt{-3} \\ &= \left(c + d\sqrt{-3}\right) * \left(a + b\sqrt{-3}\right)\end{aligned}$$

  seperti yang ingin dibuktikan.

- Akan dibuktikan berlaku sifat asosiatif terhadap $*$ dan $\cdot$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}&\left[\left(a + b\sqrt{-3}\right) * \left(p + q\sqrt{-3}\right)\right] * \left(x + y\sqrt{-3}\right) \\ = &\left[(a + p) + (b + q)\sqrt{-3}\right] * \left(x + y\sqrt{-3}\right) \\ = &\left([a + p] + x\right) + \left([b + q] + y\right)\sqrt{-3} \\ = &\left(a + [p + x]\right) + \left(b + [q + y]\right)\sqrt{-3} \\ = &\left(a + b\sqrt{-3}\right) * \left[(p + x) + (q + y)\sqrt{-3}\right] \\ = &\left(a + b\sqrt{-3}\right) * \left[\left(p + q\sqrt{-3}\right) * \left(x + y\sqrt{-3}\right)\right]\end{aligned}$$

sehingga terbukti berlaku sifat asosiatif terhadap $*$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&\left[\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot\left(p+q\sqrt{-3}\right)\right]\cdot\left(x+y\sqrt{-3}\right)\\
&=\left[(ap-3bq)+(aq+bp)\sqrt{-3}\right]\cdot\left(x+y\sqrt{-3}\right)\\
&=\left[(ap-3bq)x-3(aq+bp)y\right]+\left[(aq+bp)x+(ap-3bq)y\right]\sqrt{-3}\\
&=\left[a(px-3qy)-3(qx+py)b\right]+\left[a(qx+py)-(px-3qy)b\right]\sqrt{-3}\\
&=\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot\left[(px-3qy)+(qx+py)\sqrt{-3}\right]\\
&=\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot\left[\left(p+q\sqrt{-3}\right)\cdot\left(x+y\sqrt{-3}\right)\right]
\end{aligned}$$

sehingga terbukti berlaku sifat asosiatif terhadap $\cdot$.

- Perhatikan bahwa $0=0+0\sqrt{-3}\in R$ memenuhi

  $$\left(a+b\sqrt{-3}\right)*\left(0+0\sqrt{-3}\right)=\left(0+0\sqrt{-3}\right)*\left(a+b\sqrt{-3}\right)=(0-0)+(0+0)\sqrt{-3}=0+0\sqrt{3}$$

  yang menunjukkan $0_R=0$. Jadi, R memiliki elemen nol.

- Perhatikan bahwa $-a+(-b)\sqrt{-3}\in R$ memenuhi

  $$\begin{aligned}
  \left(a+b\sqrt{-3}\right)*\left(-a+(-b)\sqrt{-3}\right)&=\left(-a+(-b)\sqrt{-3}\right)*\left(a+b\sqrt{-3}\right)\\
  &=(-a+a)+(-b+b)\sqrt{-3}\\
  &=0.
  \end{aligned}$$

  Jadi, $-\left(a+b\sqrt{-3}\right)=-a+(-b)\sqrt{-3}$.

- Akan dibuktikan berlaku sifat distributif.

  $$\begin{aligned}
  &\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot\left[\left(p+q\sqrt{-3}\right)*\left(x+y\sqrt{-3}\right)\right]\\
  &=\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot\left[(p+x)+(q+y)\sqrt{-3}\right]\\
  &=\left[a(p+x)-3b(q+y)\right]+\left[a(q+y)+b(p+x)\right]\sqrt{-3}\\
  &=\left[(ap-3bq)+(aq+bp)\sqrt{-3}\right]*\left[(ax-3by)+(ay+bx)\sqrt{-3}\right]\\
  &=\left[\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot\left(p+q\sqrt{-3}\right)\right]*\left[\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot\left(x+y\sqrt{-3}\right)\right]
  \end{aligned}$$

  yang menunjukkan berlaku sifat distributif kiri. Selain itu,

  $$\begin{aligned}
  &\left[\left(a+b\sqrt{-3}\right)*\left(c+d\sqrt{-3}\right)\right]\cdot\left(x+y\sqrt{-3}\right)\\
  &=\left[(a+c)+(b+d)\sqrt{-3}\right]\cdot\left(x+y\sqrt{-3}\right)\\
  &=\left[(a+c)x-3(b+d)y\right]+\left[(a+c)y+(b+d)x\right]\sqrt{-3}\\
  &=\left[(ap-3bq)+(aq+bp)\sqrt{-3}\right]*\left[(ax-3by)+(ay+bx)\sqrt{-3}\right]\\
  &=\left[\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot\left(p+q\sqrt{-3}\right)\right]*\left[\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot\left(x+y\sqrt{-3}\right)\right]
  \end{aligned}$$

  sehingga terbukti berlaku sifat distributif kanan.

Jadi, R membentuk $\boxed{\text{ring}}$.
Akan dibuktikan R merupakan daerah integral. Akan dibuktikan terlebih dahulu R merupakan ring komutatif dengan satuan.

- Akan dibuktikan R merupakan ring komutatif. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot\left(p+q\sqrt{-3}\right) &= (ap-3bq)+(aq+bp)\sqrt{-3}\\ &= (pa-3qb)+(qa+pb)\sqrt{-3}\\ &= \left(p+q\sqrt{-3}\right)\cdot\left(a+b\sqrt{-3}\right)\end{aligned}$$

  yang terbukti.

- Perhatikan bahwa $1=1+0\sqrt{-3}\in R$ memenuhi

$$\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot 1 = 1\cdot\left(a+b\sqrt{-3}\right) = (a+0)+(0+b)\sqrt{-3} = a+b\sqrt{-3}$$

  sehingga membuktikan R memiliki elemen satuan $1_R=1$.

Misalkan $a+b\sqrt{-3}, x+y\sqrt{-3}\in R$ memenuhi

$$0=\left(a+b\sqrt{-3}\right)\cdot\left(x+y\sqrt{-3}\right)=(ax-3by)+(ay+bx)\sqrt{-3}.$$

Diperoleh $ax-3by=0$ dan $ay+bx=0$.

- Jika $a=0$, maka $-3by=0$ dan $bx=0$. Jika $b=0$, maka $a+b\sqrt{-3}=0$. Jika $b\neq 0$, maka $y=0$ dan $x=0$ sehingga $x+y\sqrt{-3}=0$.

- Jika $a\neq 0$, maka $x=\frac{3by}{a}$. Diperoleh

$$0=ay+bx=ay+\frac{3b^2y}{a}=\frac{a^2y+3b^2y}{a}=\frac{y\left(a^2+3b^2\right)}{a}.$$

  Karena $a\neq 0$, maka $a^2+3b^2>0$ sehingga haruslah $y=0$. Diperoleh $x=0$ sehingga $x+y\sqrt{-3}=0$.

Karena berlaku $a+b\sqrt{-3}=0$ atau $x+y\sqrt{-3}=0$, ini berarti R merupakan $\boxed{\text{daerah integral}}$.
Akan dibuktikan R tidak membentuk field. Perhatikan bahwa $2=2+0\sqrt{-3}\in R$. Andaikan ada $x+y\sqrt{-3}\in R$ dengan $x,y\in\mathbb{Z}$ yang memenuhi

$$1=\left(2a+0\sqrt{-3}\right)\cdot\left(a+b\sqrt{-3}\right)=(2a+0)+(0+2b)\sqrt{-3}=2a+2b\sqrt{-3}.$$

Karena $a,b\in\mathbb{Z}$, maka $2a=1$ dan $2b=0$ sehingga $a=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ dan $b=0$. Ini membuktikan $a+b\sqrt{-3}\notin R$. Jadi, 2 bukan elemen unit sehingga R $\boxed{\text{bukan field}}$.
Skema Penilaian:

- Menunjukkan $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ ring. **(max 15)**
  - Menunjukkan sifat tertutup terhadap $*$ dan $\cdot$. **(3)**

  - Menunjukkan sifat komutatif terhadap $*$. **(2)**
  - Menunjukkan adanya elemen nol. **(2)**
  - Menunjukkan adanya invers terhadap $*$. **(2)**
  - Menunjukkan sifat asosiatif terhadap $*$ dan $\cdot$. **(3)**
  - Menunjukkan sifat distributif. **(4)**

- Menunjukkan $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ daerah integral. **(max 6)**
  - Menunjukkan sifat komutatif terhadap $\cdot$. **(1)**
  - Menunjukkan adanya elemen satuan. **(2)**
  - Menunjukkan tidak ada pembagi nol. **(3)**

- Menunjukkan $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]$ bukan field dengan memberikan salah satu contoh penyangkal. **(3)**

Soal 2. Diberikan ring $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ di mana $+$ dan $\cdot$ didefinisikan sebagai

$$(a,b,c) + (x,y,z) = (a +_6 x, b +_{10} y, c +_3 z), \quad (a,b,c)(x,y,z) = (a \cdot_6 x, b \cdot_{10} y, c \cdot_3 z)$$

untuk setiap $(a,b,c), (x,y,z) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3$.

(a) Tentukan *char* $(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3)$.

(b) Tentukan tiga ideal non-trivial dari $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3$.

(c) Dari (c), periksa apakah ideal yang Anda tuliskan merupakan ideal pokok atau bukan.

. . . .

Solusi. Misalkan $R = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3$.

Teorema: Modul 2 – Teorema 10

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1_R dan $o(1_R)$ menyatakan order 1_R di $(R, +)$.

1. Jika $o(1_R) = \infty$, maka $char(R) = 0$.
2. Jika $o(1_R) = n$ di mana n bilangan asli, maka $char(R) = n$.

Lemma: Modul 2 – Lemma 17

Misalkan R dan S merupakan ring dengan satuan, serta $1_R \neq 0_R$ dan $1_S \neq 0_S$. Dibentuk ring $(R \times S, \bigoplus, \bigotimes)$ dengan

$$(r_1, s_1) \bigoplus (r_2, s_2) = (r_1 +_R r_2, s_1 +_S s_2), \quad (r_1, s_1) \bigotimes (r_2, s_2) = (r_1 \cdot_R r_2, s_1 \cdot_S s_2)$$

untuk setiap $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$. Jika K merupakan ideal di $R \times S$, maka $K = I \times J$ di mana I ideal dari R dan J ideal dari S.

Akibat: Modul 2 – Akibat 19

Diberikan bilangan asli n dan dibentuk ring $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. Semua subring berbeda dari $\mathbb{Z}_n$ adalah $k\mathbb{Z}_n = \langle k \rangle$ di mana k faktor positif dari n. Jadi, $\langle k \rangle$ juga merupakan subring, ideal, sekaligus ideal pokok.

(a) Perhatikan bahwa $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$ elemen satuan di R. Karena order dari $\bar{1}$ di $(\mathbb{Z}_6, +), (\mathbb{Z}_{10}, +)$, dan $(\mathbb{Z}_3, +)$ berturut-turut adalah $6, 10, 1$, maka order dari $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1})$ di $(R, +)$ adalah $\text{kpk}(6, 10, 3) = 30$. Jadi, dengan **Teorema 10** berlaku $char(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_3) = \boxed{30}$.

(b) Perhatikan **Akibat 19**. Ideal dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0}\}, 2\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}, 3\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, dan $\mathbb{Z}_6$. Ideal dari $\mathbb{Z}_{10}$ adalah $\{0\}, 2\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}, 5\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{5}\}$, dan $\mathbb{Z}_5$. Ideal dari $\mathbb{Z}_3$ adalah $\{\bar{0}\}$ dan $\mathbb{Z}_3$. Dengan **Lemma 17**, tiga (dari semua) ideal non-trivial dari R diantaranya

$$I_1 := \{\bar{0}\} \times \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_3 = \{(\bar{0}, \bar{0}, x) : x \in \mathbb{Z}_3\}$$

$$I_2 := \{\overline{0}\} \times \mathbb{Z}_{10} \times \{\overline{0}\} = \{(\overline{0}, x, \overline{0}) : x \in \mathbb{Z}_{10}\}$$
$$I_3 := \mathbb{Z}_6 \times \{\overline{0}\} \times \{\overline{0}\} = \{(x, \overline{0}, \overline{0}) : x \in \mathbb{Z}_6\}.$$

(c) Ketiganya termasuk ideal pokok, diverivikasi dengan

$$I_1 = \langle \overline{0}, \overline{0}, \overline{1} \rangle, \quad I_2 = \langle \overline{0}, \overline{1}, \overline{0} \rangle, \quad I_3 = \langle \overline{1}, \overline{0}, \overline{0} \rangle.$$

Skema Penlaian:

- Menyelesaikan bagian (a). **(max 12 poin)**
  - Berhasil menentukan $o(\overline{1})$ di $\mathbb{Z}_6$. **(2)**
  - Berhasil menentukan $o(\overline{1})$ di $\mathbb{Z}_{10}$. **(2)**
  - Berhasil menentukan $o(\overline{1})$ di $\mathbb{Z}_3$.**(2)**
  - Berhasil menentukan $o(\overline{1}, \overline{1}, \overline{1})$. **(3)**
  - Berhasil menentukan $char(R)$. **(3)**
- Menyelesaikan bagian (b). **(8)**
- Menyelesaikan bagian (c). **(5)**

Soal 3. Diberikan field $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$, kemudian $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ dengan

$$f(x) = \overline{2}x^5 + x^4 + x^3 + \overline{3}x^2 - x - \overline{1}, \quad g(x) = \overline{2}x^3 - \overline{2}x^2 + \overline{2}x + 1.$$

(a) Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian $f(x)$ jika dibagi $g(x)$.

(b) Tentukan faktor persekutuan terbesar dari $f(x)$ dan $g(x)$.

. . . .

Solusi. Perhatikan bahwa

$$f(x) = \overline{2}x^5 + x^4 + x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{4}, \quad g(x) = \overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + 1.$$

(a) Gunakan pembagian bersusun.

$$\begin{array}{r|l l}
 & x^2 - x + \overline{1} & \\ \cline{2-2}
\overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{1} & \overline{2}x^5 + x^4 + x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{4} & \\
 & \overline{2}x^5 + \overline{3}x^4 + \overline{2}x^3 + x^2 & \\ \cline{2-2}
 & -\overline{2}x^4 - x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{4}x + \overline{4} & \\
 & -\overline{2}x^4 - \overline{3}x^3 - \overline{2}x^2 - x & \\ \cline{2-2}
 & \overline{2}x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{4} & \overline{5}x = \overline{0} \\
 & \overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{1} & \\ \cline{2-2}
 & x^2 - \overline{2}x + \overline{3} = x^2 + \overline{3}x + \overline{3} &
\end{array}$$

Jadi, hasil baginya adalah $x^2 - x + \overline{1} = \boxed{x^2 + \overline{4}x + \overline{1}}$ dan sisa baginya $\boxed{x^2 + \overline{3}x + \overline{3}}$.

(b) Gunakan Algoritma Euclid,

$$\begin{aligned}
\overline{2}x^5 + x^4 + x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{4} &= \left(\overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{1}\right)\left(x^2 + \overline{4}x + \overline{1}\right) + x^2 + \overline{3}x + \overline{3} \\
\overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{1} &= \left(x^2 + \overline{3}x + \overline{3}\right)(\overline{2}x + \overline{2}) + \overline{0}.
\end{aligned}$$

Karena $x^2 + \overline{3}x + \overline{3}$ merupakan polinomial monik, jadi $\text{fpb}(f(x), g(x)) = \boxed{x^2 + \overline{3}x + \overline{3}}$.

Skema Penilaian:

- Menyelesaikan bagian (a). Dinilai berdasarkan sudah sejauh mana proses pembagian bersusun yang dilakukan. **(10)**
- Menyelesaikan bagian (b). **(max 15)**
  - Menyatakan $f(x) = g(x)\,(x^2 + \overline{4}x + \overline{1}) + x^2 + \overline{3}x + \overline{3}$. **(5)**
  - Menyatakan $\overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{1} = (x^2 + \overline{3}x + \overline{3})\,(\overline{2}x + \overline{2}) + \overline{0}$. **(5)**
  - Menyimpulkan faktor persekutuan terbesarnya $x^2 + \overline{3}x + \overline{3}$. **(5)**

Soal 4. Tentukan semua $c \in \mathbb{Z}_7$ sedemikian sehingga $\dfrac{\mathbb{Z}_7[x]}{\langle x^3 - x^2 + c \rangle}$ merupakan field di mana $\langle x^3 - x^2 + c \rangle$ ideal dari $\mathbb{Z}_7[x]$.

....

Solusi.

Teorema: Modul 3 – Teorema 13

Diberikan field $\mathbb{F}$ dan $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ dengan $\deg f \in \{2, 3\}$. Maka f tereduksi jika dan hanya jika terdapat $p \in \mathbb{F}$ yang memenuhi $f(p) = 0_{\mathbb{F}}$.

Teorema: Modul 4 – Teorema 5

Misalkan $\mathbb{F}$ merupakan field dan $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ polionm dengan $\deg p \geq 1$. Ring faktor $\mathbb{F}[x]/\langle p(x) \rangle$ field jika dan hanya jika $p(x)$ tak tereduksi.

Menurut **Teorema 5**, pada soal di atas cukup ditentukan $c \in \mathbb{Z}_7$ sedemikian sehingga $f(x) = x^3 - x^2 + c \in \mathbb{Z}_7[x]$ tak tereduksi. Karena $\deg f = 3$ dan $\mathbb{Z}_7$ merupakan field, menurut **Teorema 13** cukup dibuktikan $f(x) \neq \overline{0}$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_7$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f\left(\overline{0}\right) &= \overline{0} - \overline{0} + c &&= c \\ f\left(\overline{1}\right) &= \overline{1} - \overline{1} + c &&= c \\ f\left(\overline{2}\right) &= \overline{8} - \overline{2} + c &&= \overline{6} + c \\ f\left(\overline{3}\right) &= \overline{27} - \overline{9} + c &&= \overline{4} + c \end{aligned}$$

Untuk mempermudah perhitungan selanjutnya, perhatikan bahwa $\overline{4} = -\overline{3}, \overline{5} = -\overline{2}$, dan $\overline{6} = -\overline{1}$. Maka

$$\begin{aligned} f\left(\overline{4}\right) &= f\left(-\overline{3}\right) = -\overline{27} - \overline{9} + c &&= \overline{6} + c \\ f\left(\overline{5}\right) &= f\left(-\overline{2}\right) = -\overline{8} - \overline{4} + c &&= \overline{2} + c \\ f\left(\overline{6}\right) &= f\left(-\overline{1}\right) = -\overline{1} - \overline{1} + c &&= \overline{5} + c. \end{aligned}$$

Dari sini haruslah,

$$c, \quad \overline{2} + c, \quad \overline{4} + c, \quad \overline{5} + c, \quad \overline{6} + c$$

semunya harus bernilai tak nol. Dengan kata lain, $c \notin \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}\}$ sehingga $\boxed{c = \overline{4}}$ atau $\boxed{c = \overline{6}}$.

Skema Penilaian:

- Menyatakan bahwa hal ini ekuivalen dengan membuktikan $x^3 - x^2 + c$ tak tereduksi. **(5)**
- Menyatakan bahwa sama saja dengan mencari semua c sehingga $x^3 - x^2 + c \neq \overline{0}$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_7$. **(10)**
- Berhasil menemukan semua nilai c yang mungkin. **(10)**
  Jika hanya salah satu saja. **(5)**