Solusi UAR — Struktur Aljabar II

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Soal 1. Diberikan ring $\mathbb{Z}[x]$ dan $\mathbb{C}$. Didefinisikan $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{C}$ sebagai $\varphi(P(x)) = P(i)$ untuk setiap $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Buktikan bahwa $P(a + bi) = 0$ jika dan hanya jika $P(a - ib) = 0$.

(b) Buktikan φ merupakan homomorfisma ring.

(c) Tentukan $\ker \varphi$.

Nazra Arta Mevia Agustian

....

Solusi.

(a) Akan digunakan properti konjugat pada bilangan kompleks, yait untuk $z, a, b \in \mathbb{C}$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$(\overline{z})^n = \overline{z^n}, \quad \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}, \quad \overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}.$$

Misalkan $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ dengan $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$. Misalkan $z = a + ib$, maka $\overline{z} = a - ib$. Diperoleh

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{x^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z}^k.$$

Karena a_k bilangan bulat yang berarti bilangan real, maka $\overline{a_k} = a_k$. Jadi,

$$\overline{P(z)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = P\left(\overline{z}\right).$$

Ini menunjukkan bahwa $P(z) = 0$ jika dan hanya jika $P\left(\overline{z}\right) = 0$ sehingga terbukti pada soal tersebut.

(b) Akan dibuktikan φ well-defined. Ambil sebarang $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dengan $P(x) = Q(x)$. Akibatnya, $\varphi(P(x)) = P(i) = Q(i) = \varphi(Q(x))$ seperti yang ingin dibuktikan. Akan dibuktikan φ homomorfisma ring. Ambil sebarang $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$. Ini berarti

$$\varphi(P(x) + Q(x)) = \varphi((P + Q)(x)) = (P + Q)(i) = P(i) + Q(i) = \varphi(P(x)) + \varphi(Q(x)).$$

Selain itu,

$$\varphi(P(x)Q(x)) = \varphi((PQ)(x)) = (PQ)(i) = P(i)Q(i) = \varphi(P(x))\varphi(Q(x))$$

sehingga terbukti homomorfisma ring.

(c) Misalkan $P(x) \in \ker \varphi$, ini berarti $P(i) = 0$. Dari (a), $0 = P(-i)$. Ini berarti

$$P(x) = (x-i)\Big(x-(-i)\Big)Q(x) = (x-i)(x+i)Q(x) = \left(x^2+1\right)Q(x)$$

untuk suatu $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Jadi, $\ker \varphi = \boxed{\left\langle x^2+1 \right\rangle}$.

Skema Penilaian:

(i) Menyelesaikan bagian (a). **(max 10 poin)**

- Memisalkan $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n$. .... **(1)**
- Menggunakan sifat-sifat $(\overline{z})^n = \overline{z}^n, \overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}, \overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}$. .... **(2)**
- Memverivikasi bahwa $\overline{a_n} = a_n$ dengan alasannya. .... **(2)**
- Menyelesaikan bukti. .... **(5)**

(ii) Menyelesaikan bagian (b). **(max 10 poin)**

- Membuktikan φ well-defined. .... **(2)**
- Membuktikan φ homomorfisma terhadap $+$. .... **(4)**
- Membuktikan φ homomorfisma terhadap $\cdot$. .... **(4)**

(iii) Menyelesaikan bagian (c). **(max 10 poin)**

- Memisalkan $P(x) \in \ker \varphi$. .... **(1)**
- Menunjukkan $P(i) = 0$ maak $P(-i) = 0$. .... **(3)**
- Membuktikan $P(x) \in \langle x^2+1 \rangle$. .... **(6)**

▼

Soal 2.

(a) Misalkan ring R merupakan himpunan semua fungsi kontinu di interval $[0, 2024]$ dan $I := \{f(x) \in R : f(1) = 0\}$. Buktikan bahwa $R/I \cong \mathbb{R}$.

(b) Periksa apakah $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ isomorfik sebagai ring atau tidak.

Wildan Bagus Wicaksono

. . . .

Solusi.

(a) Definisikan $\varphi : R \to \mathbb{R}$ dengan $\varphi(f(x)) = f(1)$.
Akan dibuktikan φ well-defined. Ambil sebarang $f, g \in R$ dengan $f = g$. Ini berarti $\varphi(f(x)) = f(1) = g(1) = \varphi(g(x))$ seperti yang ingin dibuktikan.
Akan dibuktikan φ surjektif. Ambil sebarang $p \in \mathbb{R}$. Karena fungsi konstan, yaitu $f(x) = p$ untuk setiap $x \in [0, 2024]$ merupakan fungsi kontinu, maka $f(x) \in R$. Ini memberikan $\varphi(f(x)) = f(1) = p$ yang berarti terbukti φ surjektif.
Akan dibuktikan φ homomorfisma. Ambil sebarang $f(x), g(x) \in R$, perhatikan bahwa

$$\varphi(f(x) + g(x)) = \varphi((f + g)(x)) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))$$
$$\varphi(f(x)g(x)) = \varphi((fg)(x)) = (fg)(1) = f(1) + g(1) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))$$

sehingga terbukti.
Akan dibuktikan $\ker(\varphi) = I$. Perhatikan bahwa

$$\ker \varphi = \{f(x) \in R : \varphi(f(x)) = 0\} = \{f(x) \in R : f(1) = 0\} = I.$$

Menurut teorema isomorfisma, $R/I \cong \mathbb{R}$.

(b) Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\boxed{\text{tidak isomorfik ring}}$. Andaikan $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Karena $\mathbb{Z}$ merupakan daerah integral, menurut sifat isomorfik berlaku $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ juga daerah integral. Namun, $(2, 0), (0, 3) \neq (0, 0)$ memenuhi $(2, 0)(0, 3) = (0, 0)$ yang menunjukkan $(2, 0)$ pembagi nol. Kontradiksi dengan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ daerah integral. Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tidak isomorfik ring.

▼

Skema Penilaian:

(i) Menyelesaikan bagian (a). **(max 25 poin)**

- Membuktikan φ well-defined. . . . . **(3)**
- Membuktikan φ surjektif. . . . . **(7)**
- Membuktikan $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$. . . . . **(4)**
- Membuktikan $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$. . . . . **(4)**
- Membuktikan $\ker(\varphi) = I$. . . . . **(4)**

- Menyimpulkan dengan teorema isomorfisma. .... **(7)**

(ii) Menyelesaikan bagian (b). **(max 15 poin)**

- Melakukan metode kontradiksi, yaitu mengandaikan $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. .... **(3)**
- Menyatakan bahwa $\mathbb{Z}$ daerah integral. .... **(5)**
- Menyatakan bahwa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bukan daerah integral dengan alasannya. .... **(5)**
- Menyimpulkan hasil akhir. .... **(2)**

Soal 3. Tunjukkan bahwa ideal $\langle x^2+1\rangle$ merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$ tapi tidak maksimal di $\mathbb{Z}[x]$.

Nayaka Reswara Nararya Hidayat

. . . .

Solusi. Berdasarkan **Teorema 3 - Modul 8** dan **Teorema 4 - Modul 8**, cukup dibuktikan bahwa $\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2+1\rangle}$ merupakan daerah integral namun bukan field.
Didefinisikan $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[i]$ dengan $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ dan $\varphi(P(x)) = P(i)$ untuk setiap $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dengan cara yang sama sebagaimana soal 1, φ merupakan homomorfisma ring dan $\ker\varphi = \langle x^2+1\rangle$. Akan dibuktikan φ surjektif. Ambil sebarang $a+ib \in \mathbb{Z}[i]$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa terdapat $P(x) = a+bx \in \mathbb{Z}[x]$ memenuhi $\varphi(P(x)) = P(i) = a+ib$. Jadi, φ surjektif. Menurut teorema isomorfisma,

$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{\ker\varphi} \cong \mathbb{Z}[i] \iff \frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2+1\rangle} \cong \mathbb{Z}[i].$$

Akan dibuktikan terlebih dahulu $\mathbb{Z}[i]$ merupakan daerah integral. Misalkan $p+iq, x+iy \in \mathbb{Z}[i]$ dengan $p, q, x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $(p+iq)(x+iy) = 0$. Ini berarti

$$0 = (px-qy) + i(py+qx) \implies px-qy = 0, py+qx = 0.$$

Ini berarti

$$0 = (px-qy)^2 + (py+qx)^2 = p^2x^2 + q^2y^2 - 2pqxy + p^2y^2 + q^2x^2 + 2pqxy = \left(p^2+q^2\right)\left(x^2+y^2\right).$$

Akibatnya, $p^2+q^2 = 0$ atau $x^2+y^2 = 0$ yang hanya memberikan $p = q = 0$ atau $x = y = 0$. Akibatnya, $p+iq = 0$ atau $x+iy = 0$ yang membuktikan $\mathbb{Z}[i]$ daerah integral. Dari sifat isomorfik, $\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2+1\rangle}$ merupakan daerah integral yang membuktikan $\langle x^2+1\rangle$ ideal prima.
Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}[i]$ bukan field, cukup tinjau bahwa $2 \in \mathbb{Z}[i]$ bukan elemen unit. Jadi, $\mathbb{Z}[i]$ bukan field dan menurut sifat isomorfik $\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2+1\rangle}$ bukan field. Jadi, $\langle x^2+1\rangle$ bukan ideal maksimal. ▼

Skema Penilaian:

(i) Menunjukkan $\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2+1\rangle}$ isomorfik dengan $\mathbb{Z}[i]$. **(max 12 poin)**

- Menunjukkan φ homomorfisma ring. Jika menyatakan "dengan cara yang sama dengan nomor 1" juga dibenarkan. . . . . **(4)**
- Menunjukkan $\ker\varphi = \langle x^2+1\rangle$. Jika menyatakan "dengan cara yang sama dengan nomor 1" juga dibenarkan. . . . . **(4)**
- Menunjukkan isomorfik dengan teorema isomorfik. . . . . **(4)**

(ii) Menunjukkan $\mathbb{Z}[i]$ merupakan daerah integral. . . . . **(6)**
Jika hanya disebutkan tanpa dibuktikan. . . . . **(4)**

(iii) Menunjukkan $\mathbb{Z}[i]$ bukan field. . . . . **(4)**
Jika hanya disebutkan tanpa dibuktikan. . . . . **(3)**

(iv) Menyatakan bahwa cukup diperiksa $\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2+1\rangle}$ merupakan daerah integral, namun bukan field. .... **(2)**

(v) Membuktikan $\frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^2+1\rangle}$ merupakan daerah integral, namun bukan ideal prima. .... **(6)**