Latihan Soal

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

1. Periksa apakah fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yang didefinisikan sebagai $f(z) = iz$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ merupakan homomorfisma atau bukan.

2. Periksa apakah fungsi $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dengan $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ merupakan homomorfisma atau bukan.

3. Diberikan $T_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ himpunan matriks segitiga atas ordo 2×2 atas $\mathbb{Z}$. Didefinisikan $f : T_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ dengan $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = a$ untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in T_2(\mathbb{Z})$.

   (a) Buktikan f homomorfisma.

   (b) Apakah f epimorfisma?

   (c) Apakah f monomorfisma?

   (d) Tentukan $\ker f$.

4. Didefinisikan $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_4$ dengan $f([a]_{12}) = [a]_4$ untuk setiap $[a]_{12} \in \mathbb{Z}_{12}$.

   (a) Buktikan f well-defined.

   (b) Buktikan f homomorfisma ring.

   (c) Buktikan bahwa $\mathbb{Z}_{12}/\langle 4 \rangle \cong \mathbb{Z}_4$.

   (d) Bentuk operasi tabel Cayley penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_{12}/\langle 4 \rangle \cong \mathbb{Z}_4$.

5. Misalkan A, B, C merupakan ring sedemikian sehingga $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ merupakan homomorfisma. Buktikan bahwa $g \circ f : A \to C$ juga homomorfisma.

6. Diberikan ring komutatif R dengan karakteristik 2. Buktikan bahwa pemetaan $f : R \to R$ dengan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in R$ merupakan homomorfisma ring.

7. (a) Jika R ring komutatif dan n bilangan asli, buktikan bahwa

   $$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n$$

   dengan $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
   Hint. Buktikan dengan induksi.

   (b) Jika p prima, buktikan bahwa $\binom{p}{k}$ habis dibagi untuk $1 \leq k \leq p - 1$.

(c) Jika R ring komutatif dengan karakteristik p prima, buktikan bahwa pemetaan $f : R \to R$ dengan $f(x) = x^p$ merupakan homomorfisma.

8. Diberikan ring A dan ring B serta $f : A \to B$ homomorfisma. Buktikan bahwa f monomorfisma jika dan hanya jika $\ker(f) = \{0_R\}$.

9. Misalkan $\mathbb{F}$ merupakan field dan R merupakan ring. Jika $f : \mathbb{F} \to R$ merupakan homomorfisma, buktikan bahwa f monomorfisma atau $f(a) = 0_R$ untuk setiap $a \in \mathbb{F}$.

10. Jika ring R dan ring S isomorfik, buktikan bahwa $\mathrm{char}(R) = \mathrm{char}(S)$.

11. Buktikan $\mathbb{Z}_3[i] \cong \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^2+1\rangle}$.

12. Tunjukkan bahwa $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ tidak isomorfik ring dengan $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$.

13. Tunjukkan bahwa $\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{\langle a\rangle\times\langle b\rangle}$ isomorfik sebagai ring dengan $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$.

14. (a) Periksa apakah $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ isomorfik ring dengan $\mathbb{C}$ atau bukan.

    (b) Periksa apakah $\mathbb{R}$ isomorfik dengan ring $\mathbb{C}$ atau bukan.

15. (a) Buktikan bahwa $3\mathbb{Z}$ tidak isomorfik dengan $8\mathbb{Z}$.

    (b) Jika m, n bilangan asli dengan $m \neq n$, buktikan bahwa $m\mathbb{Z}$ tidak isomorfik ring dengan $n\mathbb{Z}$.

16. (Tantangan!) Tentukan semua homomorfisma ring dari $\mathbb{Q}$ ke $\mathbb{Q}$.

17. Misalkan $\mathbb{F}$ merupakan field dan $P(x) \in \mathbb{F}[x]$. Jika $\alpha \in \mathbb{F}$ memenuhi $P(\alpha) = 0_{\mathbb{F}}$, buktikan bahwa

$$\frac{\mathbb{F}[x]}{\langle P(x)\rangle} \cong \mathbb{F}[\alpha].$$