Ideal Prima dan Ideal Maksimal

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Contoh 1

Periksa apakah $2\mathbb{Z}$ dan $4\mathbb{Z}$ termasuk ideal prima atau ideal maksimal dari $\mathbb{Z}$.

Solusi. Sebagaimana **Lemma 7**, $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal prima dan ideal maksimal namun $4\mathbb{Z}$ bukan ideal prima maupun ideal maksimal dari $\mathbb{Z}$. Apabila dibuktikan dengan definisi dapat dibuktikan dengan cara berikut.

- Akan dibuktikan bahwa $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal prima. Misalkan $a, b\mathbb{Z}$ memenuhi $ab \in 2\mathbb{Z}$, akan dibuktikan bahwa $a \in 2\mathbb{Z}$ dan $b \in 2\mathbb{Z}$. Karena $ab \in 2\mathbb{Z}$, ini artinya ab merupakan bilangan genap. Akibatnya, a atau b haruslah bilangan genap yang berarti $a \in 2\mathbb{Z}$ dan $b \in 2\mathbb{Z}$. Terbukti bahwa $2\mathbb{Z}$ ideal prima dari $\mathbb{Z}$.

  Akan dibuktikan bahwa $2\mathbb{Z}$ merupakan idal maksimal dari $\mathbb{Z}$. Misalkan I ideal dari $\mathbb{Z}$ yang memenuhi $2\mathbb{Z} \subset I \subseteq \mathbb{Z}$, akan dibuktikan bahwa $I = \mathbb{Z}$. Karena I ideal dari $\mathbb{Z}$, maka $I = k\mathbb{Z}$ untuk suatu bilangan asli $k \neq 2$. Karena $2 \in 2\mathbb{Z}$, maka $2 \in k\mathbb{Z}$ sehingga haruslah $2 = kx$ untuk suatu $x \in \mathbb{Z}$. Karena $k \neq 2$, maka kemungkinannya hanyalah $k = 1$ sehingga $I = k\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Jadi, $2\mathbb{Z}$ merupakan ideal maksimal.

- Akan dibuktikan bahwa $4\mathbb{Z}$ bukan ideal prima. Perhatikan bahwa $2 \in \mathbb{Z}$ memenuhi $2 \cdot 2 \in 4\mathbb{Z}$, namun $2 \notin 4\mathbb{Z}$. Ini menunjukkan $4\mathbb{Z}$ bukan ideal prima.

  Akan dibuktikan bahwa $4\mathbb{Z}$ merupakan ideal maksimal. Tinjau bahwa $4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ yang mana $2\mathbb{Z}$ juga ideal dari $\mathbb{Z}$, ini menunjukkan $4\mathbb{Z}$ bukan ideal maksimal.

▼

Contoh 2

Carilah ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_8$ dan $\mathbb{Z}_{12}$.

Solusi. Semua ideal di $\mathbb{Z}_8$ adalah $\{\overline{0}\}$, $1\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_8$, $2\mathbb{Z}_8$, dan $4\mathbb{Z}_8$. Dari **Lemma 7**, semua ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_8$ adalah $\boxed{2\mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}}$.

Semua ideal di $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $\{\overline{0}\}$, $1\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_{12}$, $2\mathbb{Z}_{12}$, $3\mathbb{Z}_{12}$, $4\mathbb{Z}_{12}$, dan $6\mathbb{Z}_{12}$. Dari **Lemma 7**, semua ideal maksimal di $\mathbb{Z}_{12}$ adalah

$$\boxed{2\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}} \quad \text{dan} \quad \boxed{3\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}}.$$

▼

Contoh 3

Verivikasi apakah $\langle x^2+1\rangle$ dan $\langle x^3+1\rangle$ merupakan ideal prima dari $\mathbb{Z}_3[x]$ atau bukan.

Solusi. Tinjau bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan field. Menurut **Teorema 3**, cukup diperiksa apakah $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$ dan $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3+1\rangle$ merupakan daerah integral atau bukan. Perhatikan bahwa

$$\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^2+1\rangle} = \left\{a+bx+\left\langle x^2+1\right\rangle : a,b\in\mathbb{Z}_3\right\}, \quad \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{\langle x^3+1\rangle} = \left\{a+bx+cx^2+\left\langle x^3+1\right\rangle : a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}.$$

Perhatikan pula bahwa $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$ dan $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3+1\rangle$ masing-masing berhingga, oleh karena itu hal ini ekivalen dengan memeriksa $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$ dan $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3+1\rangle$ merupakan field atau bukan. Menurut **Teorema 5 - Modul 4**, cukup diperiksa apakah x^2+1 dan x^3+1 tak tereduksi atau tereduksi di $\mathbb{Z}_3[x]$. Perhatikan bahwa untuk $x=\overline{2}$ pada x^3+1 berlaku $x^3+1=\overline{2}+\overline{1}=\overline{0}$ yang menunjukkan x^3+1 tereduksi. Sedangkan, pada x^2+1 berlaku

$$\overline{0}^2+\overline{1}=\overline{1}\neq\overline{0}, \quad \overline{1}^2+\overline{1}=\overline{2}\neq\overline{0}, \quad \overline{2}^2+\overline{1}=\overline{2} \implies x^2+1\neq 0\ \forall x\in\mathbb{Z}_3.$$

Jadi, x^2+1 tak tereduksi di $\mathbb{Z}_3[x]$. Oleh karena itu, $\langle x^2+1\rangle$ merupakan $\boxed{\text{ideal prima}}$ dan $\langle x^3+1\rangle$ merupakan $\boxed{\text{bukan ideal prima}}$ dari $\mathbb{Z}_3[x]$. ▼

Contoh 4

Tunjukkan bahwa $\langle x^2 + x + 1 \rangle$ ideal maksimal di $\mathbb{Z}_2[x]$.

Solusi. Menurut **Teorema 4**, cukup diperiksa apakah $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+x+1 \rangle}$ merupakan field atau bukan. Misalkan $f(x) := x^2 + x + 1$, tinjau

$$f\left(\overline{0}\right) = \overline{1}, \quad f\left(\overline{1}\right) = \overline{1} \implies f(x) \neq \overline{0}\ \forall x \in \mathbb{Z}_2.$$

Ini berarti $f(x) = x^2 + x + 1$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}_2[x]$. Menurut **Teorema 5 - Modul 4**, maka $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2+x+1 \rangle}$ merupakan field sehingga $\langle x^2 + x + 1 \rangle$ merupakan $\boxed{\text{ideal maksimal}}$ dari $\mathbb{Z}_2[x]$. ▼

Contoh 5

Diberikan $\langle x^3 + cx + 3 \rangle$ merupakan ideal di ring polinomial $\mathbb{Z}_5[x]$. Tentukan semua nilai $c \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga $\langle x^3 + cx^2 + \overline{3} \rangle$ ideal prima dari $\mathbb{Z}_5[x]$.

Solusi. Menurut **Teorema 3**, haruslah $\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{\langle x^3+cx+\overline{3} \rangle}$ merupakan daerah integral. Mengingat $\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{\langle x^3+cx+\overline{3} \rangle}$ berhingga, hal ini ekivalen $\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{\langle x^3+cx+\overline{3} \rangle}$ merupakan field. Menurut **Teorema 5 - Modul 4**, haruslah $f(x) = x^3 + cx + \overline{3}$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}_5[x]$. Ini haruslah $f(x) \neq \overline{0}$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_5$. Perhatikan bahwa

$$f\left(\overline{0}\right) = \overline{3}, \quad f\left(\overline{1}\right) = c + \overline{4}, \quad f\left(\overline{2}\right) = \overline{4}c + \overline{1}, \quad f\left(\overline{3}\right) = \overline{4}c, \quad f\left(\overline{4}\right) = c + \overline{2}.$$

Dari sini diperoleh $c + \overline{4}, \overline{4}c + 1, \overline{4}c, c + \overline{2}$ haruslah masing-masing tidak bernilai $\overline{0}$. Kondisi ini dipenuhi untuk $\boxed{c \in \{\overline{2}, \overline{4}\}}$. ▼

Contoh 6

Diketahui ring $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ dan

$$I = \left\{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}, a - b \in 2\mathbb{Z}\right\}$$

adalah ideal dari R. Buktikan bahwa I ideal maksimal dari $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$.

Solusi. Menurut **Teorema 4**, hal ini ekivalen dengan membuktikan bahwa

$$\frac{\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]}{I} = \left\{I, 1 + I, \sqrt{-5} + I\right\}.$$

Dengan menonstruksikan tabel Cayley terhadap operasi perkalian,

$\cdot$	I	$1+I$	$\sqrt{-5}+I$
I	I	I	I
$1+I$	I	$1+I$	$\sqrt{-5}+I$
$\sqrt{-5}+I$	I	$\sqrt{-5}+I$	$1+I$

Terlihat bahwa perkalian setiap dua elemen tak nol di $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]/I$ tak nol. Ini membuktikan $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]/I$ merupakan field sehingga I ideal maksimal dari $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$. ▼

Contoh 7: ONMIPA 2024

(a) Buktikan $\langle x - 2024 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.

(b) Tentukan bilangan asli terbesar a sehingga $\langle x^2 + ax + 2024 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.

Solusi. Perhatikan bahwa $\mathbb{R}$ merupakan field.

(a) Karena polinom linier di $\mathbb{R}[x]$ merupakan polinomial tak tereduksi, maka $\mathbb{R}[x]/\langle x - 2024 \rangle$ merupakan field. Akibatnya, $\langle x - 2024 \rangle$ ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.

(b) Cukup ditinjau bahwa $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + ax + 2024 \rangle$ merupakan field. Secara ekivalen, haruslah $x^2 + ax + 2024$ tak tereduksi di $\mathbb{R}[x]$. Dengan kata lain, $x^2 + ax + 2024 \neq 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ yang artinya polinom tersebut tidak memiliki akar-akar bilangan real. Hal in iterjadi jika diskrimannya kurang dari 0, yaitu

$$0 > D = a^2 - 4(1)(2024) = a^2 - 8096 \implies -89 \leq a \leq 89.$$

Jadi, bilangan asli terbesar a yang memenuhi adalah $a = \boxed{89}$.

▼

Contoh 8

Apakah $\langle x \rangle$ merupakan ideal prima dari $\mathbb{Z}[x]$?

Solusi. Tinjau $f : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ yang memenuhi $f(P(x)) = P(0)$ untuk setiap $P \in \mathbb{Z}[x]$. Dapat dibuktikan bahwa f well-defined dan epimorfisma (diserahkan kepada pembaca). Misalkan $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, misalkan

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dengan $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$.

Misalkan $Q(x) \in \ker(f)$, ini artinya

$$\begin{aligned} 0 &= f(Q(x)) = Q(0) = a_0 \\ \implies Q(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x \\ &= x\left(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1\right) \in \langle x \rangle . \end{aligned}$$

Jadi, $\ker(f) \subseteq \langle x \rangle$. Jika $Q(x) \in \langle x \rangle$, ini artinya $Q(x) = xR(x)$ untuk suatu $R(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Misalkan $R(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$. Ini berarti

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = b_m x^{m+1} + b_{m-1}x^m + \cdots + b_1 x^2 + b_0 x.$$

Ini berarti haruslah $a_0 = 0$ yang memberikan $Q(0) = 0 \implies Q(x) \in \ker(f)$. Jadi, $\langle x \rangle \subseteq \ker(f)$ sehingga $\ker(f) = \langle x \rangle$. Menurut teorema isomorfisma, $\mathbb{Z}[x]/\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$. Karena $\mathbb{Z}$ merupakan daerah integral, maka $\mathbb{Z}[x]/\langle x \rangle$ juga daerah integral. Menurut **Toerema 3**, maka $\langle x \rangle$ ideal prima dari $\mathbb{Z}$. ▼

Contoh 9

Misalkan $f : R \to S$ merupakan homomorfisma ring dan Q ideal prima dari S. Buktikan bahwa $P = f^{-1}(Q) = \{r \in R : f(r) \in Q\}$ merupakan ideal prima dari R.

Solusi. Misalkan $x, y \in R$ yang memenuhi $xy \in P$. Akan dibuktikan bahwa $x \in P$ atau $y \in P$. Karena $xy \in P$, ini berarti $f(xy) \in Q$. Karena f homomorfisma, $f(xy) = f(x)f(y)$. Mengingat $f(x)f(y) \in Q$ dan Q ideal prima dari S, maka $f(x) \in Q$ atau $f(y) \in Q$. Ini menunjukkan bahwa $x \in P$ atau $y \in P$. Terbukti P ideal prima dari R. ▼