Ideal Prima dan Ideal Maksimal

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Definisi

Definisi 1 (Ideal Maksimal)**.** Misalkan R merupakan ring. Suatu ideal M dari R disebut **ideal maksimal** jika:

(a) $M \neq R$,

(b) I ideal dari R yang memenuhi $M \subseteq I$, maka $I = M$ atau $I = R$.

Definisi 2 (Ideal Prima)**.** Misalkan R merupakan ring komutatif. Suatu ideal dari P dari R disebut **ideal prima** jika:

(a) $P \neq R$,

(b) untuk setiap $h, k \in R$ yang memenuhi $hk \in P$, maka $h \in P$ atau $k \in P$.

Sifat-Sifat

Teorema 3: Uji Ideal Prima

Misalkan R merupakan ring komutatif dengan elemen satuan dan $P \neq R$ merupakan ideal dari R. P merupakan ideal prima jika dan hanya jika R/P merupakan daerah integral.

Bukti.
($\Rightarrow$) Jika P ideal prima, akan dibuktikan R/P daerah integral. Misalkan $a + P, b + P \in R/P$ dengan $a, b \in R$ yang memenuhi $(a + P)(b + P) = 0_R + P$. Akan dibuktikan bahwa $a + P = P$ atau $b + P = P$. Ini berarti

$$ab + P = P \implies ab \in P.$$

Karena P ideal prima, maka $a \in P$ atau $b \in P$. Ini berakibat $a + P = P$ atau $b + P = P$ seperti yang ingin dibuktikan.
($\Leftarrow$) Jika R/P merupakan daerah integral, akan dibuktikan P ideal prima. Ambil sebarang $a, b \in R$ yang memenuhi $ab \in P$, akan dibuktikan bahwa $a \in P$ atau $b \in P$. Perhatikan bahwa $ab \in P$ berakibat $ab + P = P$. Dari sini diperoleh

$$P = ab + P = (a + P)(b + P).$$

Karena R/P daerah integral, maka haruslah $a + P = P$ atau $b + P = P$ yang menunjukkan $a \in P$ atau $b \in P$. Jadi, P ideal prima. $\square$

Teorema 4: Uji Ideal Maksimal

Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan dan $M \neq R$ ideal dari R. M merupakan ideal maksimal jika dan hanya jika R/M merupakan field.

Bukti.
($\Rightarrow$) M merupakan ideal maksimal, akan dibuktikan R/M merupakan field. Ambil sebarang $a + M \in R/M$ dengan $a + M \neq M$ yang artinya $a \notin M$, akan dibuktikan $a + M$ elemen unit. Konstruksi himpunan

$$X = \{ar + b : r \in R, b \in M\}.$$

Dapat dibuktikan bahwa X merupakan ideal dari R dan $M \subseteq R$, serta $X \neq M$. Karena M ideal maksimal, berakibat $X = R$. Mengingat R ring komutatif dengan elemen satuan, terdapat $p \in R, q \in M$ yang memenuhi $ap + q = 1_R$. Hal ini ekivalen dengan $ap - 1_R = q \in M$. Ini menunjukkan

$$ap - 1_R \in M \iff ap + M = 1_R + M \iff (a + M)(p + M) = 1_R + M.$$

Karena terdapat $p + M$ yang memenuhi $(a + M)(p + M) = 1_R + M$, ini menunjukkan $a + M$ merupakan unit. Jadi, R/M merupakan field.
($\Leftarrow$) Jika R/M merupakan field. Misalkan I ideal dari R dengan $M \subseteq I$ dengan $M \neq I$, akan dibuktikan bahwa $I = R$. Misalkan $a \in I \setminus M$, ini artinya $a \in I$ dan $a \notin M$ yang memberikan $a + M \neq M$. Karena R/M field, $a + M$ merupakan elemen unit sehingga terdapat $b + M \neq M$ yang memenuhi

$$1_R + M = (a + M)(b + M) = ab + M \implies ab - 1_R \in M.$$

Mengingat $M \subseteq I$, maka $ab - 1_R \in I$. Karena $a \in I$ dan I ideal dari R, ini berakibat $ab \in I$. Akibatnya,

$$1_R = ab - (ab - 1_R) \in I \implies 1_R \in I.$$

Karena I merupakan ideal dengan elemen satuan 1_R, diperoleh $I = R$. (**Soal 6 – Tugas 1**). □

Akibat 5

Misalkan R ring komutatif dengan elemen satuan dan $M \neq R$ ideal dari R.

(a) Jika M ideal maksimal, maka M ideal prima.

(b) Jika R/M berhingga, M ideal prima jika dan hanya jika M ideal maksimal.

(c) Jika R berhingga, M ideal prima jika dan hanya jika M ideal maksimal dari R.

Akibat 6

Diberikan field $\mathbb{F}$ dan $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. Maka $\langle p(x) \rangle$ ideal maksimal dari $\mathbb{F}[x]$ jika dan hanya jika $p(x)$ tak tereduksi di $\mathbb{F}[x]$.

Lemma 7: Serba-Serbi $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}_n$

Misalkan $n > 1$ bilangan asli.

(a) $n\mathbb{Z}$ ideal maksimal dari $\mathbb{Z}$ jika dan hanya jika n prima.

(b) $n\mathbb{Z}$ ideal prima dari $\mathbb{Z}$ jika dan hanya jika n prima.

(c) $m\mathbb{Z}_n$ ideal maksimal jika dan hanya jika m faktor prima dari n.

(d) $m\mathbb{Z}_n$ ideal prima jika dan hanya jika m faktor prima dari n.

Bukti. Pembuktiannya memerlukan pengetahuan teori bilangan.

(a) $(\Rightarrow)$ Jika $n\mathbb{Z}$ ideal maksimal dari $\mathbb{Z}$, akan dibuktikan n prima. Andaikan n komposit, maka terdapat bilangan asli $1 < a, b < n$ yang memenuhi $n = ab$. Dalam hal ini $\langle a \rangle = a\mathbb{Z}$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}$ dengan $n\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Namun, $n\mathbb{Z} \neq a\mathbb{Z}$ dan $a\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ sehingga terjadi kontradiksi. Jadi, haruslah n prima.

$(\Leftarrow)$ Jika n prima, akan dibuktikan $n\mathbb{Z}$ ideal maksimal dari $\mathbb{Z}$. Sebagaimana **Soal 2 - Modul 6**, $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$. Karena n prima, dari **Lemma 12 - Modul 1** diperoleh $\mathbb{Z}_n$ field. Dari sifat isomorfik, tentu $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ juga field yang menurut **Teorema 4** berlaku $n\mathbb{Z}$ ideal maksimal.

(b) $(\Rightarrow)$ Jika $n\mathbb{Z}$ ideal prima, akan dibuktikan n prima. Andaikan n komposit, maka terdapat bilangan asli $1 < a, b < n$ yang memenuhi $ab = n$. Perhatikan bahwa $ab \in n\mathbb{Z}$, namun karena $1 < a, b < n$ mengakibatkan a, b masing-masing bukan kelipatan n. Dengan kata lain, $a \notin n\mathbb{Z}$ dan $b \notin n\mathbb{Z}$ sehingga kontradiksi dengan $n\mathbb{Z}$ ideal prima. Jadi, n harus prima.

$(\Leftarrow)$ Jika n prima. Sebagaimana sebelumnya, $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}_n} \cong \mathbb{Z}_n$. Karena $\mathbb{Z}_n$ berhingga, demikian juga $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ berdasarkan sifat isomorfik. Karena n prima dan $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ berhingga, menurut (a) dan **Akibat 5(b)** berlaku M ideal maksimal sekaligus ideal prima. Terbukti bahwa $n\mathbb{Z}$ ideal prima.

(c) $(\Rightarrow)$ Jika $m\mathbb{Z}_n$ ideal maksimal, akan dibuktikan m faktor prima dari n. Karena $m\mathbb{Z}_n$ ideal dari $\mathbb{Z}_n$, menurut **Lemma 18 - Modul 2** berlaku m faktor positif dari n. Selanjutnya, akan dibuktikan m prima yang mana buktinya analog seperti pada (a).

$(\Leftarrow)$ Jika m faktor prima dari n. Dari **Lemma 18 - Modul 2** $m\mathbb{Z}_n$ ideal dari $\mathbb{Z}_n$. Akan dibuktikan $m\mathbb{Z}_n$ ideal maksimal. Andaikan ada ideal I dari $\mathbb{Z}_n$ dengan $m\mathbb{Z}_n \subset I \subseteq \mathbb{Z}_n$, akan dibuktikan bahwa $I = \mathbb{Z}_n$. Dari **Lemma 18 - Modul 2** haruslah $I = k\mathbb{Z}_n$ dengan k faktor positif dari n. Perhatikan bahwa $m \in m\mathbb{Z}_n$ yang berakibat $m \in I = k\mathbb{Z}_n$. Ini artinya haruslah $k \mid m$. Karena m prima, $k = 1$ atau $k = m$. Namun, $k = m$ memberikan $I = m\mathbb{Z}_n$ yang mana kontradiksi. Oleh karena itu, $m = 1$ yang memberikan $I = k\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n$. Terbukti bahwa $m\mathbb{Z}_n$ ideal maksimal.

(d) $(\Rightarrow)$ Jika $m\mathbb{Z}_n$ ideal prima, akan dibuktikan m faktor prima dari n. Karena $m\mathbb{Z}_n$ ideal dari $\mathbb{Z}_n$, menurut **Lemma 18 - Modul 2** berlaku m faktor positif dari n. Selanjutnya, akan dibuktikan m prima yang mana buktinya analog seperti pada (b).

($\Leftarrow$) Jika m faktor prima dari n. Dari **Lemma 18 - Modul 2** $m\mathbb{Z}_n$ ideal dari $\mathbb{Z}_n$. Akan dibuktikan $m\mathbb{Z}_n$ ideal prima. Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}_n$ yang memenuhi $ab \in m\mathbb{Z}_n$, akan dibuktikan bahwa $a \in m\mathbb{Z}_n$ atau $b \in m\mathbb{Z}_n$. Karena $ab \in m\mathbb{Z}_n$, ini berarti ab habis dibagi m. Karena m prima, maka a habis dibagi m atau b habis dibagi m. Ini menunjukkan $a \in m\mathbb{Z}_n$ atau $b \in m\mathbb{Z}_n$.

$\square$

Soal

1. Periksa apakah $2\mathbb{Z}$ dan $4\mathbb{Z}$ termasuk ideal prima atau ideal maksimal dari $\mathbb{Z}$.

2. Carilah ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_8$ dan $\mathbb{Z}_{12}$.

3. Verivikasi apakah $\langle x^2+1\rangle$ dan $\langle x^3+1\rangle$ merupakan ideal prima dari $\mathbb{Z}_3[x]$ atau bukan.

4. Tunjukkan bahwa $\langle x^2+x+1\rangle$ ideal maksimal di $\mathbb{Z}_2[x]$.

5. Diberikan $\langle x^3+cx+3\rangle$ merupakan ideal di ring polinomial $\mathbb{Z}_5[x]$. Tentukan semua nilai $c \in \mathbb{Z}_5$ sedemikian sehingga $\langle x^3+cx^2+\overline{3}\rangle$ ideal prima dari $\mathbb{Z}_5[x]$.

6. Diketahui ring $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] = \left\{a+b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ dan

$$I = \left\{a+b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}, a-b \in 2\mathbb{Z}\right\}$$

   adalah ideal dari R. Buktikan bahwa I ideal maksimal dari $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$.

7. (ONMIPA 2024).
   (a) Buktikan $\langle x-2024\rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.
   (b) Tentukan bilangan asli terbesar a sehingga $\langle x^2+ax+2024\rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.

8. Apakah $\langle x\rangle$ merupakan ideal prima dari $\mathbb{Z}[x]$?

9. Misalkan $f : R \to S$ merupakan homomorfisma ring dan Q ideal prima dari S. Buktikan bahwa $P = f^{-1}(Q) = \{r \in R : f(r) \in Q\}$ merupakan ideal prima dari R.