Isomorfisma Ring

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Contoh 1

Misalkan ring $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ dan $H = \left\{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Tunjukkan $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ dan H isomorfik sebagai ring.

Solusi. Tinjau $f : \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \to H$ dengan $f\left(a + b\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}$. Akan dibuktikan f well-defined. Misalkan $a + b\sqrt{2}, x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ dengan $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ dan memenuhi $a + b\sqrt{2} = x + y\sqrt{2}$. Ini berarti $a = x$ dan $b = y$ sehingga berlaku

$$f\left(a + b\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} = f\left(x + y\sqrt{2}\right)$$

seperti yang ingin dibuktikan. Akan dibuktikan f homomorfisma, yaitu f bijektif dan homomorfisma.

- Akan dibuktikan f injektif. Misalkan $a+b\sqrt{2}, x+y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ memenuhi $f\left(a + b\sqrt{2}\right) = f\left(x + y\sqrt{2}\right)$. Ini berarti

  $$\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} \implies a = x, b = y \implies a + b\sqrt{2} = x + y\sqrt{2}$$

  seperti yang ingin dibuktikan.

- Akan dibuktikan bahwa f surjektif. Ambil sebarang $\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \in H$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ memenuhi $f\left(a + b\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ yang menunjukkan setiap anggota di H memiliki pra-peta.

- Akan dibuktikan f homomorfisma. Ambil sebarang $a + b\sqrt{2}, x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ dengan $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$. Ini berarti

  $$\begin{aligned} f\left(\left[a + b\sqrt{2}\right] + \left[x + y\sqrt{2}\right]\right) &= f\left([a + x] + [b + y]\sqrt{2}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a + x & 2(b + y) \\ b + y & a + x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} \\
&= f\left(a + b\sqrt{2}\right) + f\left(x + y\sqrt{2}\right), \\
f\Big(\left[a + b\sqrt{2}\right]\left[x + y\sqrt{2}\right]\Big) &= f\Big([ax + 2by] + [ay + bx]\sqrt{2}\Big) \\
&= \begin{bmatrix} ax + 2by & 2(ay + bx) \\ ay + bx & ax + 2by \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2y \\ y & x \end{bmatrix} \\
&= f\left(a + b\sqrt{2}\right) f\left(x + y\sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Terbukti bahwa f isomorfisma, membuktikan $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \cong H$. ▼

Contoh 2

Untuk n bilangan asli, buktikan $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/\langle n\rangle$.

Solusi. Tinjau $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ dengan $f(x) = x_n$ dengan $x_n \equiv x \pmod{n}$ dan $0 \leq x_n < n$. Akan dibuktikan f well-defined. Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan $x = y$, akibatnya

$$x_n \equiv x \equiv y \equiv y_n \pmod{n} \implies x_n \equiv y_n \pmod{n}.$$

Karena $0 \leq x_n, y_n < n$, ini berarti haruslah $x_n = y_n \implies f(x) = f(y)$ seperti yang ingin dibuktikan.

Akan dibuktikan f epimorfisma, yaitu surjektif dan homomorfisma.

- Akan dibuktikan f surjektif. Ambil sebarang $p \in \mathbb{Z}_n$, perhatikan bahwa $p \in \mathbb{Z}$ memenuhi $f(p) = p$ yang membuktikan setiap anggota $\mathbb{Z}_n$ memiliki prapeta.
- Akan dibuktikan f homomorfisma. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$, menggunakan sifat modulo tentu

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (x+y)_n = x_n + y_n = f(x) + f(y), \\ f(xy) &= (xy)_n = x_n y_n = f(x)f(y) \end{aligned}$$

  seperti yang ingin dibuktikan.

Akan dibuktikan bahwa $\ker(f) = \langle n\rangle$. Perhatikan bahwa $x \in \langle n\rangle$, ini artinya $x = nk$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $f(x) = (nk)_n = 0$ sehingga $x \in \ker(f)$ yang membuktikan $\langle n\rangle \subseteq \ker(f)$. Misalkan $y \in \ker(f)$, ini berarti $0 = f(y) = y_n$ yang berarti y habis dibagi n. Artinya, $y \in \langle n\rangle$ yang membuktikan $\ker(f) \subseteq \langle n\rangle$. Jadi, $\ker(f) = \langle n\rangle$. Menurut **Akibat 5**,

$$\frac{\mathbb{Z}}{\ker(f)} \cong \mathbb{Z}_n \implies \frac{\mathbb{Z}}{\langle n\rangle} \cong \mathbb{Z}_n.$$

▼

Contoh 3

Buktikan bahwa
$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{-5}\right] \cong \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^2+5\rangle}$$
dengan $\mathbb{Q}\left[\sqrt{-5}\right] = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Solusi. Pandang $\mathbb{Q}$ merupakan field. Definisikan $f : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}\left[\sqrt{-5}\right]$ dengan $f(P(x)) = P\left(\sqrt{-5}\right)$ untuk setiap $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Mudah dibuktikan bahwa f well-defined (diserahkan kepada pembaca). Akan dibuktikan bahwa f epimofisma, yaitu surjektif dan homomorfisma.

- Akan dibuktikan bahwa f surjektif. Ambil sebarang $a+b\sqrt{-5} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{-5}\right]$ dengan $a, b \in \mathbb{Q}$. Tinjau bahwa $P(x) := a + bx \in \mathbb{Q}[x]$ memenuhi $f(P(x)) = P\left(\sqrt{-5}\right) = a + b\sqrt{-5}$, ini menunjukkan bahwa setiap elemen di $\mathbb{Q}\left[\sqrt{-5}\right]$ memiliki pra-peta.

- Akan dibuktikan bahwa f homomorfisma. Ambil sebarang $P(x), Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$, tentu $A(x) := P(x) + Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ dan $B(x) := P(x)Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Ini berarti
$$f\Big(P(x)+Q(x)\Big) = f\Big(A(x)\Big) = A\left(\sqrt{-5}\right) = P\left(\sqrt{-5}\right) + Q\left(\sqrt{-5}\right) = f(P(x)) + f(Q(x)).$$
Selain itu,
$$f\Big(P(x)Q(x)\Big) = f\Big(B(x)\Big) = B\left(\sqrt{-5}\right) = P\left(\sqrt{-5}\right) Q\left(\sqrt{-5}\right) = f(P(x))f(Q(x)).$$
Terbukti.

Akan dibuktikan $\ker(f) = \langle x^2+5\rangle$. Misalkan $P(x) \in \langle x^2+5\rangle$, ini berarti $P(x) = Q(x)\left(x^2+5\right)$ untuk suatu $Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Perhatikan bahwa
$$f(P(x)) = P\left(\sqrt{-5}\right) = Q\left(\sqrt{-5}\right)(-5+5) = 0 \implies P(x) \in \ker(f).$$
Jadi, $\langle x^2+5\rangle \subseteq \ker(f)$. Misalkan $Q(x) \in \ker(f)$, ini berarti $0 = f(Q(x)) = Q\left(\sqrt{-5}\right)$. Karena $Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ dan $\mathbb{Q}$ field, terdapat tepat satu polinomial $H(x), R(x) \in \mathbb{Q}[x]$ yang memenuhi
$$Q(x) = \left(x^2+5\right)H(x) + R(x), \quad \deg R(X) < \deg\left(x^2+5\right) = 2.$$
Oleh karena itu, $R(x) = ax + b$ dengan $a, b \in \mathbb{Q}$. Dari sini diperoleh
$$0 = Q\left(\sqrt{-5}\right) = (-5+5)H\left(\sqrt{-5}\right) + R\left(\sqrt{-5}\right) = 0 + a\sqrt{-5} + b = a\sqrt{-5} + b.$$
Karena $a, b \in \mathbb{Q}$, ini berarti $a = b = 0$ yang memberikan $Q(x) = \left(x^2+5\right)H(x) \in \langle x^2+5\rangle$. Jadi, $\ker(f) \subseteq \langle x^2+5\rangle$. Jadi, $\ker(f) = \langle x^2+5\rangle$.
Menurut **Akibat 5**, maka
$$\frac{\mathbb{Q}[x]}{\ker(f)} \cong \mathbb{Q}\left[\sqrt{-5}\right] \implies \frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^2+5\rangle} \cong \mathbb{Q}\left[\sqrt{-5}\right].$$

▼

Contoh 4

Jika S merupakan ring, didefinisikan

$$\mathcal{M}_2(S) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in S \right\}$$

merupakan ring himpunan matriks 2×2 dengan entri-entri anggota dari ring S. Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan $I = \langle 2024 \rangle$ ideal dari $\mathbb{Z}$. Buktikan bahwa

$$\frac{\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})}{\mathcal{M}_2(\langle 2024 \rangle)} \cong \mathcal{M}_2\left(\frac{\mathbb{Z}}{\langle 2024 \rangle}\right).$$

Solusi. Bentuk $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/I)$ dengan

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{2024} + I & b_{2024} + I \\ c_{2024} + I & d_{2024} + I \end{bmatrix}$$

dengan x_{2024} menyatakan sisa bagi ketika 2024, atau $x \pmod{2024}$. Akan dibuktikan bahwa f well-defined. Misalkan $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dengan

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \implies a = p, b = q, c = r, d = s.$$

Tentu hal ini berakibat $a_{2024} = p_{2024}$, $b_{2024} = q_{2024}$, $c_{2024} = r_{2024}$, dan $d_{2024} = s_{2024}$ yang memberikan

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{2024} + I & b_{2024} + I \\ c_{2024} + I & d_{2024} + I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{2024} + I & q_{2024} + I \\ r_{2024} + I & s_{2024} + I \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right)$$

seperti yang ingin dibuktikan. Akan dibuktikan bahwa f epimorfisma, yaitu surjektif dan homomorfisma.

- Akan dibuktikan f surjektif. Ambil sebarang $\begin{bmatrix} a+I & b+I \\ c+I & d+I \end{bmatrix}$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tinjau bahwa $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ memenuhi $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+I & b+I \\ c+I & d+I \end{bmatrix}$ yang membuktikan setiap elemen di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/I)$ memiliki pra-peta. Terbukti f surjektif.

- Akan dibuktikan f homomorfisma. Ambil sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, ini berarti

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} (a+p)+I & (b+q)+I \\ (c+r)+I & (d+s)+I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a+I)+(p+I) & (b+I)+(q+I) \\ (c+I)+(r+I) & (d+I)+(s+I) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} a+I & b+I \\ c+I & d+I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p+I & q+I \\ r+I & s+I \end{bmatrix}$$
$$= f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right).$$

Selain itu,

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (ap+br)+I & (aq+bs)+I \\ (cp+dr)+I & (cq+ds)+I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (ap+I)+(br+I) & (aq+I)+(bs+I) \\ (cp+I)+(dr+I) & (cq+I)+(ds+I) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a+I)(p+I)+(b+I)(r+I) & (a+I)(q+I)+(b+I)(s+I) \\ (c+I)(p+I)+(d+I)(r+I) & (c+I)(q+I)+(d+I)(s+I) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+I & b+I \\ c+I & d+I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p+I & q+I \\ r+I & s+I \end{bmatrix} \\ &= f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) f\left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa f homomorfisma.

Akan dibuktikan bahwa $\ker(f) = \mathcal{M}_2(I)$ dan tinjau $\begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix}$ elemen nol di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/I)$. Misalkan $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(I)$. Ini berarti $a, b, c, d \in I$ sehingga berakibat

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+I & b+I \\ c+I & d+I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \ker(f).$$

Ini berarti $\mathcal{M}_2(I) \subseteq \ker(f)$. Sekarang misalkan $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in \ker(f)$, ini berarti

$$\begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} p+I & q+I \\ r+I & s+I \end{bmatrix}.$$

Ini berarti $p + I = I, q + I = I, r + I = I$, dan $s + I = I$. Diperoleh $p, q, r, s \in I$ sehingga $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(I)$. Ini berarti $\ker(f) \subseteq \mathcal{M}_2(I)$. Jadi, $\ker(f) = \mathcal{M}_2(I)$. Dari **Akibat 5**,

$$\frac{\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})}{\ker(f)} \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/I) \implies \frac{\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})}{\mathcal{M}_2(\langle 2024 \rangle)} \cong \mathcal{M}_2\left(\frac{\mathbb{Z}}{\langle 2024 \rangle}\right).$$

▼

Contoh 5

Buktikan bahwa $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ tidak isomorfik dengan $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right] = \left\{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

Solusi. Andaikan $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \cong \mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$, ini artinya terdapat isomorfisma $f : \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \to \mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$. Perhatikan bahwa 1 merupakan elemen satuan di $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ sekaligus $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$, ini berarti $f(1) = 1$ berdasarkan sifat isomorfisma. Karena f homomorfisma,

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2.$$

Selain itu, berlaku pula

$$f(2) = f\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}\right) f\left(\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}\right)^2 \implies f\left(\sqrt{2}\right) = \pm\sqrt{2}.$$

Namun, ini menunjukkan $f\left(\sqrt{2}\right) \notin \mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$ yang mana kontradiksi. Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ tidak isomorfik dengan $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]$. ▼

Contoh 6

Misalkan I dan J ideal dari ring R sedemikian sehingga $I + J = R$. Buktikan bahwa

$$\frac{R}{I \cap J} \cong \frac{R}{I} \times \frac{R}{J}.$$

Solusi. Karena $I + J = R$, artinya setiap $r \in R$ terdapat $i \in I, j \in J$ yang memenuhi $r = i + j$. Definisikan $f : R \to \frac{R}{I} \times \frac{R}{J}$ dengan $f(r) = (r + I, r + J)$ untuk setiap $r \in R$. Akan dibuktikan f well-defined. Ambil sebarang $a, b \in R$ yang memenuhi $a = b$. Tentu ini berakibat $a + I = b + I$ dan $a + J = b + J$ sehingga

$$f(a) = (a + I, a + J) = (b + I, b + J) = f(b)$$

sehingga terbukti. Akan dibuktikan f epimorfisma, yaitu surjektif dan homomorfisma.

- Akan dibuktikan bahwa f surjektif. Ambil sebarang $(p + I, q + J) \in R/I \times R/J$ dengan $p, q \in R$. Karena $I + J = R$, ini artinya terdapat $p_I \in I, p_J \in J$ yang memenuhi $p = p_I + p_J$. Dengan alasan yang sama, terdapat $q_I \in I, q_J \in J$ yang memenuhi $q = q_I + q_J$. Ini berarti

  $$(p + I, q + J) = (p_I + p_J + I, q_I + q_J + J) = (p_J + I, q_I + J) = \big((p_J + q_I) + I, (p_J + q_I) + J).$$

  Dengan memilih $p_J + q_I \in R$,

  $$f(p_J + q_I) = ((p_J + q_I) + I, (p_J + q_I) + J) = (p + I, q + J)$$

  yang menunjukkan setiap elemen di $R/I \times R/J$ memiliki pra-peta.

- Akan dibuktikan f homomorfisma. Ambil sebarang $a, b \in R$. Diperoleh

  $$\begin{aligned} f(a + b) &= \big((a + b) + I, (a + b) + J\big) \\ &= \big((a + I) + (b + I), (a + J) + (b + J)\big) \\ &= (a + I, a + J) + (b + I, b + J) \\ &= f(a) + f(b), \\ f(ab) &= (ab + I, ab + J) \\ &= \big((a + I)(b + I), (a + J)(b + J)\big) \\ &= (a + I, a + J)(b + I, b + J) \\ &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

  seperti yang ingin dibuktikan.

Akan dibuktikan $\ker(f) = I \cap J$ dan tinjau (I, J) elemen nol di $R/I \times R/J$. Misalkan $x \in I \cap J$, ini berarti $x \in I$ dan $x \in J$ yang berakibat

$$f(x) = (x + I, x + J) = (I, J) \implies x \in \ker(f).$$

Jadi, $I \cap J \subseteq \ker(f)$. Misalkan $y \in \ker(f)$, ini berarti

$$(I, J) = f(y) = (y + I, y + J) \implies y + I = I, y + J = J$$

sehingga diperoleh $y \in I$ dan $y \in J$. Jadi, $y \in I \cap J$ yang berarti $\ker(f) \subseteq I \cap J$. Oleh karena itu, $I \cap J = \ker(f)$ yang menurut **Akibat 5** berlaku

$$\frac{R}{\ker(f)} \cong \frac{R}{I} \times \frac{R}{J} \implies \frac{R}{I \cap J} \cong \frac{R}{I} \times \frac{R}{J}.$$

▼