Isomorfisma Ring

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Definisi

Definisi 1 (Ring Isomorfik)**.** Dua ring R dan S dikatakan **isomorfik** jika terdapat isomorfisma $f : R \to S$ (atau $g : R \to S$).

Sifat-Sifat

Teorema 2: Homomorfisma Ring

Jika I ideal dari ring R, terdapat suatu homomorfisma f yang memenuhi $\ker(f) = I$.

Bukti. Tinjau $f : R \to R/I$ dengan $f(r) := r + I$ untuk setiap $r \in R$. Pembuktian $\ker(f) = I$ telah dibuktikan pada **Modul 5 – Soal 8**. □

Teorema 3: Isomorfisma Pertama

Misalkan R dan S merupakan ring serta $f : R \to S$ homomorfisma. Maka

$$\frac{R}{\ker(f)} \cong f(R).$$

Bukti. Misalkan $I = \ker(f)$, maka I merupakan ideal dari R (**Modul 5 – Teorema 7**) sehingga R/I merupakan ring faktor. Tinjau $g : R/I \to f(R)$ dengan $g(r + I) = f(r)$ dengan $r \in R$, akan dibuktikan g merupakan isomorfisma. Pertama, akan dibuktikan g well-defined. Ambil sebarang $a + I, b + I$ dengan $a + I = b + I$, ini berarti $a - b \in I$. Karena f homomorfisma,

$$0_S = f(0_R) = g(I) = g\Big((a - b) + I\Big) = f(a - b) = f(a) - f(b) = g(a + I) - g(b + I)$$

yang memberikan $g(a + I) = g(b + I)$. Terbukti g well-defined. Akan dibuktikan g surjektif. Ambil sebarang $x \in f(R)$, maka terdapat $r \in R$ yang memenuhi $x = f(r)$. Perhatikan bahwa $r + I \in R/I$ memenuhi $g(r + I) = f(r) = x$. Ini membuktikan bahwa untuk sebarang $x \in f(R)$ terdapat $p = r + I \in R/I$ yang memenuhi $g(p) = x$. Terbukti g surjektif. Akan dibuktikan g injektif. Misalkan $a + I, b + I \in R/I$ dengan $a, b \in R$ memenuhi $g(a + I) = g(b + I)$, ini berarti $f(a) = f(b)$. Karena f homomorfisma,

$$0_S = f(a) - f(b) = f(a - b) \implies a - b \in I.$$

Akibatnya, $a + I = b + I$. Terbukti bahwa g injektif. Akan dibuktikan g homomorfisma. Ambil sebarang $a + I, b + I \in R/I$. Karena f homomorfisma,

$$g\Big((a + I) + (b + I)\Big) = g\Big((a + b) + I\Big) = f(a + b) = f(a) + f(b) = g(a + I) + g(b + I),$$
$$g\Big((a + I)(b + I)\Big) = g\Big(ab + I\Big) = f(ab) = f(a)f(b) = g(a + I)g(b + I).$$

Terbukti g homomorfisma. Oleh karena itu, g isomorfisma sheingga $R/I \cong f(R)$. □

Akibat 4: Isomorfisma Pertama

Misalkan R dan S merupakan ring serta $f : R \to S$ epimorfisma. Maka

$$\frac{R}{\ker(f)} \cong S.$$

Teorema 5: Isomorfisma Kedua

Misalkan R merupakan ring, I subring dari R, dan J ideal dari R, maka

$$\frac{I+J}{J} \cong \frac{I}{I \cap J}$$

dengan $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\}$.

Bukti. Dapat dibuktikan bahwa J ideal dari $I + J$ dan $I \cap J$ ideal dari I (diserahkan sebagai latihan). Tinjau $f : I \to \frac{I+J}{J}$ dengan $f(i) = i + J$ dengan $i \in I$. Akan dibuktikan f well-defined. Misalkan $a, b \in I$ yang memenuhi $a = b$ yang berarti $a + J = b + J$, tinjau $f(a) = a + J = b + J = f(b + J)$, terbukti. Akan dibuktikan f epimorfisma. Pertama, akan dibuktikan f surjektif. Ambil sebarang $x + J \in \frac{I+J}{J}$ dengan $x \in (I + J)$. Ini berarti terdapat $i \in I, j \in J$ yang memenuhi $x = i + j$. Perhatikan bahwa

$$f(i) = i + J = (i + j) + J = x + J$$

yang membuktikan sebarang $x + J \in \frac{I+J}{J}$ memiliki pra-peta. Terbukti f surjektif. Kedua, akan dibuktikan f homomorfisma. Ambil sebarang $a, b \in I$, tinjau

$$\begin{aligned} f(a + b) &= (a + b) + J = (a + J) + (b + J) = f(a) + f(b), \\ f(ab) &= ab + J = (a + J)(b + J) = f(a)f(b), \end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Akan dibuktikan $\ker(f) = I \cap J$. Misalkan $x \in I \cap J$, ini berarti $x \in J$ sehingga berlaku $f(x) = x + J = J \implies x \in \ker(f)$. Jadi, $I \cap J \subseteq \ker(f)$. Misalkan $y \in \ker(f)$, ini berarti $y \in I$ dan $J = f(y) = y + J$ yang berarti $y \in J$. Ini menunjukkan $y \in I \cap J$ sehingga membuktikan $\ker(f) \subseteq I \cap J$. Jadi, $\ker(f) = I \cap J$. Menurut **Akibat 4**,

$$\frac{I}{I \cap J} \cong \frac{I+J}{J}.$$

□

Teorema 6: Isomorfisma Ketiga

Misalkan R merupakan ring. Jika I, J ideal dari R dengan $I \subseteq J$, maka

$$\frac{R/I}{J/I} \cong \frac{R}{J}.$$

Bukti. Dapat dibuktikan bahwa I ideal dari J (diserahkan kepada pembaca), maka $R/I, J/I, R/J$ merupakan ring faktor. Tinjau $f : R/I \to R/J$ dengan $f(r + I) = r + J$ untuk $r \in R$. Akan dibuktikan f well-defined. Misalkan $a+I, b+I \in R/I$ dengan $a, b \in R$ memenuhi $a+I=b+I$, ini berarti $a-b \in I$. Karena $I \subseteq J$, maka $a-b \in J$. Ini berakibat

$$a+J=b+J \iff f(a+I)=f(b+I)$$

sehingga terbukti. Akan dibuktikan f epimorfisma. Pertama, akan dibuktikan f surjektif. Ambil sebarang $a+J \in R/J$, perhatikan bahwa $a+I \in R/I$ memenuhi $f(a+I)=a+J$ yang menunjukkan setiap $a+J \in R/J$ memiliki pra-peta. Akan dibuktikan f homomorfisma. Ambil sebarang $a+I, b+I \in R/I$, perhatikan bahwa

$$f\Big((a+I)+(b+I)\Big)=f\Big((a+b)+I\Big)=(a+b)+J=(a+J)+(b+J)=f(a+I)+f(b+I),$$
$$f\Big((a+I)(b+I)\Big)=f(ab+I)+ab+J=(a+J)(b+J)=f(a+I)f(b+I),$$

terbukti. Akan dibuktikan $\ker(f)=J/I$. Misalkan $x+I \in J/I$ dengan $x \in J$, perhatikan bahwa $f(x+I)=x+J=J$ sehingga $x \in \ker(f)$. Jadi, $J/I \subseteq \ker(f)$. Misalkan $y+I \in \ker(f)$ dengan $y \in R$, maka $J=f(y+I)=y+J$ sehingga $y \in J$. Akibatnya, $y+I \in J/I$ yang menunjukkan $\ker(f) \subseteq J/I$. Jadi, $\ker(f)=J/I$ dan menurut **Akibat 4**,

$$\frac{R/I}{J/I} \cong \frac{R}{J}.$$

□

Soal

1. Misalkan ring $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2} : a,b \in \mathbb{Z}\right\}$ dan $H=\left\{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{Z}\right\}$. Tunjukkan $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ dan H isomorfik sebagai ring.
2. Untuk n bilangan asli, buktikan $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/\langle n\rangle$.
3. Buktikan bahwa $\mathbb{Q}\left[\sqrt{-5}\right] \cong \mathbb{Q}[x]/\langle x^2+5\rangle$ dengan $\mathbb{Q}\left[\sqrt{-5}\right]=\{a+b\sqrt{-5} : a,b \in \mathbb{Q}\}$.
4. Jika S merupakan ring, didefinisikan

$$\mathcal{M}_2(S)=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in S\right\}$$

merupakan ring himpunan matriks 2×2 dengan entri-entri anggota dari ring S. Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan $I=\langle 2024\rangle$ ideal dari $\mathbb{Z}$. Buktikan bahwa

$$\frac{\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})}{\mathcal{M}_2(\langle 2024\rangle)} \cong \mathcal{M}_2\left(\frac{\mathbb{Z}}{\langle 2024\rangle}\right).$$

5. Buktikan bahwa $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]=\left\{a+b\sqrt{2} : a,b \in \mathbb{Q}\right\}$ tidak isomorfik dengan $\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right]=\left\{a+b\sqrt{5} : a,b \in \mathbb{Q}\right\}$.
6. Misalkan I dan J ideal dari ring R sedemikian sehingga $I+J=R$. Buktikan bahwa

$$\frac{R}{I\cap J} \cong \frac{R}{I} \times \frac{R}{J}.$$