# Homomorfisma Ring

Nayaka Reswara Nararya Hidayat

Nazra Arta Mevia Agustian

Wildan Bagus Wicaksono

---

**Contoh 1: UAS 2018**

Misalkan $A = \left\{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ dan $B = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 7b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan ring. Didefinisikan $\mu : A \to B$ dengan $\mu\left(a + b\sqrt{7}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 7b & a \end{bmatrix}$. Selidiki apakah $\mu$ merupakan homomorfisma surjektif. Jika ya, tentukan $\ker(\mu)$.

*Solusi.* Akan dibuktikan $\mu$ well-defined. Perhatikan bahwa jika $a + b\sqrt{7}, p + q\sqrt{7} \in A$ yang memenuhi $a + b\sqrt{7} = p + q\sqrt{7}$, karena $a, b \in \mathbb{Z}$ maka haruslah $a = p$ dan $b = q$. Diperoleh

$$\mu\left(a + b\sqrt{7}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 7b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 7q & a \end{bmatrix} = \mu\left(p + q\sqrt{7}\right)$$

seperti yang ingin dibuktikan. Akan dibuktikan $\mu$ surjektif. Ambil sebarang $\begin{bmatrix} a & b \\ 7b & a \end{bmatrix} \in B$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $a + b\sqrt{7} \in A$ memenuhi $\mu\left(a + b\sqrt{7}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 7b & a \end{bmatrix}$. Karena untuk sebarang $y \in B$ terdapat $x \in A$ yang memenuhi $\mu(x) = y$, maka $\mu$ surjektif. Akan dibuktikan $\mu$ homomorfisma. Ambil sebarang $a + b\sqrt{7}, p + q\sqrt{7} \in A$ dengan $a, b, p, q \in \mathbb{Z}$. Ini berarti

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left[a + b\sqrt{7}\right] + \left[p + q\sqrt{7}\right]\right) &= \mu\left([a + p] + [b + q]\sqrt{7}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a + p & b + q \\ 7(b + q) & a + p \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ 7b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ 7q & p \end{bmatrix} \\
&= \mu\left(a + b\sqrt{7}\right) + \mu\left(p + q\sqrt{7}\right), \\
\mu\left(\left[a + b\sqrt{7}\right]\left[p + q\sqrt{7}\right]\right) &= \mu\left([ap + 7bq] + [aq + bp]\sqrt{7}\right) \\
&= \begin{bmatrix} ap + 7bq & aq + bp \\ 7(aq + bp) & ap + 7bq \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ 7b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ 7q & p \end{bmatrix} \\
&= \mu\left(a + b\sqrt{7}\right) \mu\left(p + q\sqrt{7}\right).
\end{aligned}$$

Terbukti $\mu$ homomorfisma. Karena $\mu$ juga surjektif, maka $\mu$ merupakan homomorfisma yang surjektif (epimorfisma). Akan ditentukan $\ker(\mu)$. Misalkan $a+b\sqrt{7} \in \ker(\mu)$ dan tinjau $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ merupakan elemen nol di $B$. Maka

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mu\left(a+b\sqrt{7}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 7b & a \end{bmatrix} \implies a=0, b=0.$$

Jadi, $a+b\sqrt{7}=0$ yang berarti $\ker(\mu) = \boxed{\{0\}}$. ▼

**Contoh 2: UAS 2020**

Misalkan $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa pada matriks. Didefinisikan pengaitan $\theta : S \to \mathbb{Z}$ dengan $\theta\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = z$. Apakah pengaitan tersebut merupakan epimorfisma?

*Solusi.* Akan dibuktikan $\theta$ well-defined. Ambil sebarang $\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in S$ dengan $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$. Ini bearti $p = a, q = b, r = c$ sehingga diperoleh

$$\theta\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = r = c = \theta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right).$$

Akan dibuktikan $\theta$ surjektif. Ambil sebarang $k \in \mathbb{Z}$, perhatikan bahwa terdapat $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \in S$ yang memenuhi $\theta\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\right) = k$. Karena untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$ terdapat $x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \in S$ yang memenuhui $\theta(x) = k$, maka $\theta$ surjektif. Akan dibuktikan $\theta$ homomorfisma. Ambil sebarang $\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in S$. Perhatikan bahwa

$$\theta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = \theta\left(\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ 0 & c+r \end{bmatrix}\right) = c + r = \theta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) + \theta\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right),$$
$$\theta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right) = \theta\left(\begin{bmatrix} ap & aq+br \\ 0 & cr \end{bmatrix}\right) = cr = \theta\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right)\theta\left(\begin{bmatrix} p & q \\ 0 & r \end{bmatrix}\right).$$

Terbukti bahwa $\theta$ homomorfisma. Karena $\theta$ homomorfisma yang surjektif, ini artinya $\theta$ merupakan $\boxed{\text{epimorfisma}}$. ▼

**Contoh 3: UAS 2023**

Misalkan $R$ adalah ring, $J$ dan $K$ masing-masing ideal di $R$ dengan $J \subseteq K$. Didefinisikan pemetaan $\theta : R/J \to R/K$ dengan $\theta(a+J) = a+K$ untuk setiap $a+J \in R/J$.

(a) Buktikan $\theta$ epimorfisma.

(b) Buktikan $\ker\theta = K/J$.

(a) Akan dibuktikan $\theta$ well-defined. Ambil sebarang $x+J \in \frac{R}{j}$ dan $y+J \in \frac{R}{J}$ yang memenuhi $x+J = y+J$ di mana $x, y \in R$. Ini berarti $x-y \in J$ dan karena $J \subseteq K$ memberikan $x-y \in K \iff x+K = y+K$. Dari sini diperoleh

$$\theta(x+J) = x+K = y+K = \theta(y+J) \implies \theta(x+J) = \theta(y+J)$$

seperti yang ingin dibuktikan.
Akan dibuktikan $\theta$ surjektif. Ambil sebarang $r+K \in \frac{R}{K}$ di mana $r \in R$, tinjau terdapat $r+J \in \frac{R}{J}$ sedemikian sehingga $\theta(r+J) = r+K$ sehingga terbukti bahwa $\theta$ surjektif.
Akan dibuktikan $\theta$ homomorfisma. Ambil sebarang $a+J, b+J \in \frac{R}{J}$ di mana $a, b \in R$. Ini berarti

$$\theta\Big((a+J)+(b+J)\Big) = \theta\Big((a+b)+J\Big) = (a+b)+K = (a+K)+(b+K) = \theta(a+J)+\theta(b+J).$$

Di sisi lain,

$$\theta\Big((a+J)(b+J)\Big) = \theta(ab+J) = ab+K = (a+K)(b+K) = \theta(a+J)\theta(b+J).$$

Terbukti bahwa $\theta$ homomorfisma.
Jadi, terbukti bahwa $\theta$ merupakan homomorfisma surjektif (epimorfisma).

(b) Ambil sebarang $x+J \in \ker(\theta)$ di mana $x \in R$. Tinjau bahwa $0_R + K$ merupakan elemen nol di $\frac{R}{K}$, ini berarti

$$0_R + K = \theta(x+J) = x+K \implies 0_R + K = x+K \iff x - 0_R \in K \iff x \in K.$$

Ini berarti $x+J \in \frac{K}{J}$ sehingga diperoleh $\ker(\theta) \subseteq \frac{K}{J}$.
Ambil sebarang $k+J \in \frac{K}{J}$ di mana $k \in K$. Ini berarti $\theta(k+J) = k+K = 0_R + K$ yang menunjukkan bahwa $k+J \in \ker(\theta)$. Jadi, $\frac{K}{J} \subseteq \ker(\theta)$.
Dari sini, terbukti bahwa $\ker(\theta) = \frac{K}{J}$.

**Contoh 4**

Periksa apakah pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan $f(x) = 5x$ merupakan homomorfisma atau bukan.

*Solusi.* Untuk membuktikan $f$ homomorfisma, perlu dibuktikan $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dan $f(xy) = f(x)f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$. Namun,

$$f(2) = 5(2) = 10, \quad f(1)f(2) = 5(1) \cdot 5(2) = 50.$$

Karena $f(2) \neq f(1)f(2)$, ini menunjukkan $f$ bukan homomorfisma. ▼

**Contoh 5**

Periksa apakah pemetaan $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_{12}$ yang didefinisikan $f(x) = 3x$ merupakan isomorfisma atau bukan.

*Bukti.* Perhatikan bahwa $f\left(\overline{1}\right) f\left(\overline{3}\right) = \overline{3} \cdot \overline{9} = \overline{3}$, sedangkan $f\left(\overline{3}\right) = \overline{9}$. Karena $f\left(\overline{1}\right) f\left(\overline{3}\right) \neq f\left(\overline{3}\right)$, maka $f$ bukan homomorfisma. Akibatnya, $f$ juga bukan isomorfisma. $\square$

**Catatan.** *Untuk menganalisa bagaimana $f$ bukan homomorfisma dapat melakukan trik berikut. Jika $f$ homomorfisma harusnya berlaku*

$$f(xy) = f(x)f(y) \iff 3xy = 9xy \iff 6xy = 0.$$

*Dengan kata lain, $6xy \equiv 0 \pmod{12}$. Namun, ini dapat disangkal untuk $x = \overline{1}$ dan $y = \overline{3}$. Tentu juga dapat disangkal oleh $x = y = \overline{1}$.*

**Contoh 6**

Diberikan ring $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ dan ring $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Tunjukkan bahwa pengaitan $f : \mathbb{C} \to S$ dengan $f(x + iy) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ merupakan homomorfisma ring.

*Solusi.* Akan dibuktikan $f$ well-defined. Perhatikan bahwa jika $a+ib = c+id$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ini berarti $a = c$ dan $b = d$. Diperoleh

$$f(a + ib) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = f(c + id)$$

seperti yang ingin dibuktikan. Akan dibuktikan $f$ homomorfisma. Ambil sebarang $a+ib, c+id \in \mathbb{C}$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Maka

$$\begin{aligned} f\Big((a + ib) + (c + id)\Big) = f\Big((a + c) + i(b + d)\Big) &= \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \\ &= f(a + ib) + f(c + id). \end{aligned}$$

Selain itu,

$$\begin{aligned} f\Big((a + ib)(c + id)\Big) = f\Big((ac - bd) + (ad + bc)i\Big) &= \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \\ &= f(a + ib)f(c + id). \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $f$ merupakan homomorfisma. ▼

**Contoh 7**

Misalkan $R$ dan $S$ merupakan ring dengan $|S| > 1$.

(a) Buktikan pemetaan $f : R \times S \to R$ yang didefinisikan dengan $f(a, b) = a$ merupakan homomorfisma ring. Apakah $f$ merupakan monomorfisma?

(b) Buktikan pemetaan $f : R \to R \times S$ yang didefinisikan dengan $f(a) = (a, 0_S)$ merupakan monomorfisma.

*Solusi.*

(a) Akan dibuktikan bahwa $f$ merupakan homomorfisma. Ambil sebarang $(a, b), (c, d) \in R \times S$. Diperoleh

$$\begin{aligned} f\Big((a,b)+(c,d)\Big) &= f(a+c, b+d) = a+c = f(a,b)+f(c,d) \\ f\Big((a,b)(c,d)\Big) &= f(ac, bd) = ac = f(a,b)f(c,d). \end{aligned}$$

Terbukti $f$ merupakan homomorfisma. Akan ditinjau apakah $f$ monomorfisma atau bukan. Karena $|S| > 1$, maka terdapat $c, d \in S$ dengan $c \neq d$. Namun, $f(a, c) = a = f(a, d) \implies f(a, c) = f(a, d)$ padahal $(a, c) \neq (a, d)$. Ini berarti $f$ bukan monomorfisma.

(b) Akan dibuktikan $f$ merupakan homomorfisma. Ambil sebarang $x, y \in A$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (x+y, 0_S) = (x, 0_S) + (y, 0_S) = f(x) + f(y), \\ f(xy) &= (xy, 0_S) = (x, 0_S)(y, 0_S) = f(x)f(y). \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $f$ homomorfisma. Akan dibuktikan $f$ monomorfisma. Misalkan $a, b \in R$ memenuhi $f(a) = f(b)$, ini berarti $(a, 0_S) = (b, 0_S)$. Ini memberikan $a = b$ sehingga terbukti bahwa $f$ monomorfisma.

▼

**Contoh 8**

Misalkan $I$ ideal dari ring $R$. Buktikan bahwa $f : R \to R/I$ dengan $f(r) = r + I$ merupakan homomorfisma dan $\ker(f) = I$.

*Solusi.* Akan dibuktikan bahwa $f$ well-defined. Misalkan $x, y \in R$ dengan $x = y$. Ini berarti $x + I = y + I \implies f(x + I) = f(y + I)$ seperti yang ingin dibuktikan.
Akan dibuktikan $f$ merupakan homomorfisma. Ambil sebarang $r, s \in R$, maka

$$f(r+s) = (r+s) + I = (r+I) + (s+I) = f(r) + f(s),$$
$$f(rs) = rs + I = (r+I)(s+I) = f(r)f(s).$$

Terbukti bahwa $f$ merupakan homomorfisma. Akan dibuktikan bahwa $\ker(f) = I$. Dalam hal ini, akan dibuktikan bahwa $\ker(f) \subseteq I$ dan $I \subseteq \ker(f)$.

- Akan dibuktikan $I \subseteq \ker(f)$. Misalkan $a \in I$, ini berarti $f(a) = a + I = I$. Menginat $I = 0_R + I$ adalah elemen nol di $I$, ini berarti $a \in \ker(f)$. Jadi, $I \subseteq \ker(f)$.

- Akan dibuktikan $\ker(f) \subseteq I$. Misalkan $b \in \ker(f)$, ini berarti $f(b) = I$. Di sisi lain,

  $$I = f(b) = b + I \implies I = b + I \iff b \in I.$$

  Jadi, $\ker(f) \subseteq I$.

Terbukti bahwa $\ker(f) = I$. ▼

**Contoh 9**

Misalkan $R$ dan $S$ merupakan ring serta $f : R \to S$ merupakan homomorfisma. Selain itu, $R$ ring dengan elemen satuan $1_R$.

(a) Jika $x \in R$ merupakan unit, buktikan $f(x)$ juga merupakan unit di $f(R)$.

(b) Jika $x$ merupakan unit, buktikan bahwa $f\left(x^{-1}\right) = f(x)^{-1}$.

*Bukti.* Telah dibuktikan bahwa $f(1_R)$ merupakan elemen kesatuan di $f(R)$.

(a) Untuk membuktikan $f(x)$ merupakan unit, hal ini ekivalen dengan membuktikan bahwa terdapat $p \in f(R)$ yang memenuhi $pf(x) = f(1_R) = f(x)p$. Karena $x$ unit di $R$, terdapat $y \in R$ yang memenuhi $xy = 1_R = yx$. Karena $f$ homomorfisma,

$$f(xy) = f(1_R) = f(yx) \iff f(x)f(y) = f(1_R) = f(y)f(x).$$

Karena terdapat $f(y) \in f(R)$ yang memenuhi $f(x)f(y) = f(1_R) = f(y)f(x)$, ini menunjukkan $f(x)$ merupakan unit.

(b) Dari bagian (a), ini menunjukkan $f(y) = f(x)^{-1}$. Di sisi lain, $xy = 1_R = yx$ menunjukkan $y = x^{-1}$. Jadi, terbukti bahwa $f\left(x^{-1}\right) = f(x)^{-1}$.

$\square$

**Contoh 10**

Misalkan $R$ dan $S$ merupakan ring serta $f : R \to S$ merupakan isomorfisma.

(a) Buktikan bahwa $f^{-1}$ merupakan isomorfisma.

(b) $r$ unit di $R$ jika dan hanya jika $f(r)$ merupakan unit di $S$.

(c) $r \in R$ merupakan pembagi nol di $R$ jika dan hanya jika $f(r)$ merupakan pembagi nol di $S$.

(d) $R$ komutatif jika dan hanya jika $S$ komutatif.

(e) $R$ merupakan daerah integral jika dan hanya jika $S$ merupakan daerah integral.

(f) $R$ merupakan field jika dan hanya jika $S$ merupakan field.

Dengan kata lain, jika $f : R \to S$ merupakan isomomorfisma, sifat-sifat dalam $R$ "diwarisi" ke $S$.

*Bukti.* Karena $f$ merupakan isomorfisma, maka $f$ merupakan homomorfisma yang 1-1 dan surjektif. Karena $f$ bijektif (1-1 dan surjektif), maka $f^{-1}$ juga bijektif (buktikan!). Karena $f$ surjektif, maka $f(1_R) = 1_S$.

(a) Akan dibuktikan $f^{-1} : S \to R$ merupakan isomorfisma. Telah diketahui $f^{-1}$ 1-1 dan surjektif, akan dibuktikan $f$ homomorfisma. Ambil sebarang $x, y \in S$, akan dibuktikan bahwa

$$f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y), \quad f^{-1}(xy) = f^{-1}(x)f^{-1}(y).$$

Karena $f$ surjektif, terdapat $p, q \in R$ yang memenuhi $f(p) = x$ dan $f(q) = y$. Dalam hal ini, tentu $p = f^{-1}(x)$ dan $q = f^{-1}(y)$. Karena $f$ homomorfisma,

$$x + y = f(p) + f(q) = f(p+q) \implies f^{-1}(x+y) = p + q = f^{-1}(x) + f^{-1}(y).$$

Selain itu,

$$xy = f(p)f(q) = f(pq) \implies f^{-1}(xy) = pq = f^{-1}(x)f^{-1}(y).$$

Terbukti bahwa $f$ homomorfisma. Jadi, $f^{-1}$ merupakan isomorfisma.

(b) ($\Rightarrow$) Jika $r$ unit di $R$, akan dibuktikan $f(r)$ unit di $S$. Karena $r$ unit di $S$, terdapat $x \in R$ yang memenuhi $xr = 1_R = rx$. Karena $f$ homomorfisma,

$$f(xr) = f(1_R) = f(rx) \iff f(x)f(r) = 1_S = f(r)f(x).$$

Karena terdapat $f(x) \in S$ yang memenuhi $f(x)f(r) = 1_S = f(r)f(x)$, maka $f(r)$ merupakan unit di $S$.

($\Leftarrow$) Jika $f(r)$ merupakan unit di $S$, akan dibuktikan $r$ unit di $R$. Karena $f(r)$ unit di $S$, terdapat $q \in S$ yang memenuhi $qf(r) = 1_S = f(r)q$. Karena $f$ surjektif, terdapat $k \in R$ yang memenuhi $f(k) = q$. Karena $f$ homomorfisma,

$$qf(r) = 1_S = f(r)q \iff f(k)f(r) = f(1_R) = f(r)f(k) \iff f(kr) = f(1_R) = f(rk).$$

Karena $f$ fungsi 1-1, maka $kr = 1_R = rk$. Karena terdapat $k \in R$ yang memenuhi $kr = 1_R = rk$, ini berarti $r$ merupakan unit.

(c) ($\Rightarrow$) Jika $R$ ring komutatif, akan dibuktikan $S$ ring komutatif. Ambil sebarang $x, y \in S$, akan dibuktikan $xy = yx$. Karena $f$ surjektif, terdapat $p, q \in R$ yang memenuhi $x = f(p)$ dan $y = f(q)$. Karena $R$ ring komutatif dan $f$ homomorfisma,

$$xy = f(p)f(q) = f(pq) = f(qp) = f(q)f(p) = yx$$

seperti yang ingin dibuktikan.

($\Leftarrow$) Jika $S$ ring komutatif, akan dibuktikan $R$ ring komutatif. Ambil sebarang $a, b \in R$, akan dibuktikan $ab = ba$. Dari (a) telah diperoleh $f^{-1}$ isomorfisma. Karena $f^{-1}$ surjektif, terdapat $p, q \in S$ yang memenuhi $a = f^{-1}(p)$ dan $b = f^{-1}(q)$. Karena $f^{-1}$ homomorfisma dan $S$ ring komutatif, maka

$$ab = f^{-1}(p)f^{-1}(q) = f^{-1}(pq) = f^{-1}(qp) = f^{-1}(q)f^{-1}(p) = ba$$

seperti yang ingin dibuktikan.

(d) ($\Rightarrow$) Jika $R$ merupakan daerah integral, akan dibuktikan $S$ merupakan daerah integral. Misalkan $x, y \in S$ memenuhi $xy = 0_S$, akan dibuktikan bahwa $x = 0_S$ atau $y = 0_S$. Karena $f$ surjektif, terdapat $p, q \in R$ yang memenuhi $x = f(p)$ dan $y = f(q)$. Karena $f$ homomorfisma,

$$0_S = xy = f(p)f(q) = f(pq) \implies f(0_R) = f(pq).$$

Karena $f$ fungsi 1-1, maka $pq = 0_R$. Mengingat $R$ daerah integral, maka $p = 0_R$ atau $q = 0_R$. Ini artinya $x = f(p) = 0_S$ atau $y = f(q) = 0_S$ seperti yang ingin dibuktikan.

($\Leftarrow$) Jika $S$ merupakan daerah integral, akan dibuktikan $R$ merupakan daerah integral. Misalkan $a, b \in R$ memenuhi $ab = 0_R$, akan dibuktikan bahwa $a = 0_R$ atau $b = 0_R$. Dari (a) telah diperoleh $f^{-1}$ isomorfisma. Karena $f^{-1}$ surjektif, terdapat $p, q \in S$ yang memenuhi $a = f^{-1}(p)$ dan $b = f^{-1}(q)$. Karena $f^{-1}$ homomorfisma,

$$0_R = ab = f^{-1}(p)f^{-1}(q) = f^{-1}(pq) \implies f^{-1}(0_S) = f^{-1}(pq).$$

Karena $f^{-1}$ fungsi 1-1, maka $0_S = pq$. Mengingat $S$ daerah integral, maka $p = 0_S$ atau $q = 0_S$. Ini menunjukkan bahwa $a = f^{-1}(p) = f^{-1}(0_S) = 0_R$ atau $b = f^{-1}(q) = f^{-1}(0_S) = 0_R$ seperti yang ingin dibuktikan.

(e) Sebagai latihan, kembangkan dari empat bagian sebelumnya.

$\square$

**Contoh 11**

(a) Buktikan bahwa $\mathbb{Z}_3[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ isomorfik dengan $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$. Dari sifat isomorfik, simpulkan $\mathbb{Z}_3[i]$ field.

(b) Jika $R, S$ merupakan ring, buktikan bahwa $R \times S \cong S \times R$.

*Solusi.* Untuk menunjukkan dua ring $R, S$ isomorfik, yaitu $R \cong S$, harus ditunjukkan terdapat fungsi isomorfisma $f : R \to S$ (atau $f : S \to R$). Konstruksi fungsi $f$ yang dimaksud setiap orang bisa berbeda-beda.

Perhatikan bahwa $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle = \{a + bx + \langle x^2+1\rangle : a, b \in \mathbb{Z}_3\}$.

(a) Tinjau $f : \mathbb{Z}_3[i] \to \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$ dengan $f(a+ib) = (a+bx) + \langle x^2+1\rangle$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$. Akan dibuktikan bahwa $f$ isomorfisma.
Akan dibuktikan $f$ well-defined. Misalkan $a+ib, c+id \in \mathbb{Z}_3[i]$ yang memenuhi $a+ib = c+id$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$. Ini berarti $a = c$ dan $b = d$ sehingga diperoleh

$$f(a+ib) = (a+bx) + \left\langle x^2+1\right\rangle = (c+dx) + \left\langle x^2+1\right\rangle = f(c+id)$$

seperti yang ingin dibuktikan. Akan dibuktikan $f$ surjektif. Ambil sebarang $m + nx + \langle x^2+1\rangle \in \mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2+1\rangle$ dengan $m, n \in \mathbb{Z}_3[x]$. Perhatikan bahwa $m + in \in \mathbb{Z}_3[i]$ memenuhi $f(m+in) = m + nx + \langle x^2+1\rangle$, maka hal ini menunjukkan $f$ surjektif.
Akan dibuktikan $f$ fungsi 1-1. Misalkan $a+ib, p+iq \in \mathbb{Z}_3[i]$ memenuhi $f(a+ib) = f(p+iq)$. Akan dibuktikan $a + ib = p + iq$. Ini berarti

$$f(a+ib) = f(p+iq) \implies (a+bx) + \left\langle x^2+1\right\rangle = (p+qx) + \left\langle x^2+1\right\rangle.$$

Ini berarti haruslah

$$(a+bx) - (p+qx) \in \left\langle x^2+1\right\rangle \iff (a-p) + (b-q)x \in \left\langle x^2+1\right\rangle.$$

Namun, mengingat $(a-b) + (b-q)x$ berderajat 0 atau 1, sedangkan $x^2+1$ berderajat 2, oleh karena itu $(a-p) + (b-q)x \in \langle x^2+1\rangle$ jika dan hanya jika $(a-p) + (b-q)x = 0 \iff a - p = 0 = b - q \iff a = p, b = q$. Oleh karena itu, $a + ib = p + iq$ sehingga terbukti $f$ fungsi 1-1.
Akan dibuktikan $f$ homomorfisma. Ambil sebarang $a + ib, c + id \in \mathbb{Z}_3[x]$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f\Big([a+ib] + [p+iq]\Big) &= f\Big([a+p] + [b+q]i\Big) \\ &= \Big([a+p] + [b+q]x\Big) + \left\langle x^2+1\right\rangle \\ &= \Big[(a+bx) + \left\langle x^2+1\right\rangle\Big] + \Big[(p+qx) + \left\langle x^2+1\right\rangle\Big] \\ &= f(a+ib) + f(p+iq). \end{aligned}$$

Selin itu,

$$f\Big([a+ib][p+iq]\Big) = f\Big([ap-bq] + [aq+bp]i\Big) = (ap-bq) + (aq+bp)x + \left\langle x^2+1\right\rangle.$$

Perhatikan bahwa $bq\left(x^2+1\right) \in \left\langle x^2+1\right\rangle$, ini berarti

$$\begin{aligned}
f\Big([a+ib][p+iq]\Big) &= (ap-bq)+(aq+bp)x+\Big\langle x^2+1\Big\rangle \\
&= (ap-bq)+(aq+bp)+bq\Big(x^2+1\Big)+\Big\langle x^2+1\Big\rangle \\
&= \Big[ap+(aq+bp)x+bqx^2\Big]+\Big\langle x^2+1\Big\rangle \\
&= (a+bx)(p+qx)+\Big\langle x^2+1\Big\rangle \\
&= (a+bx)(p+qx)+\Big\langle x^2+1\Big\rangle \\
&= \Big[a+bx+\Big\langle x^2+1\Big\rangle\Big]\Big[p+qx+\Big\langle x^2+1\Big\rangle\Big] \\
&= f(a+ib)f(p+iq).
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti $f$ homomorfisma. Karena berlaku juga $f$ fungsi 1-1 dan surjektif, terbukti bahwa $f$ isomorfisma. Jadi, terbukti $\mathbb{Z}_3[i]$ dan $\mathbb{Z}_3[x]/\left\langle x^2+1\right\rangle$ isomorfik.

(b) Akan dibuktikan $R\times S$ dan $S\times R$ isomorfik. Definisikan $f : R\times S \to S\times R$ dengan $f(r,s) = (s,r)$ untuk setiap $(r,s) \in R\times S$. Akan dibuktikan bahwa $f$ merupakan isomorfisma.
Akan dibuktikan $f$ well-defined. Misalkan $(r,s),(p,q) \in R\times S$ memenuhi $(r,s) = (p,q)$. Ini artinya $r = p$ dan $s = q$, diperoleh

$$f(r,s) = (s,r) = (q,p) = f(p,q)$$

seperti yang ingin dibuktikan.
Akan dibuktikan $f$ surjektif. Ambil sebarang $(a,b) \in S\times R$, perhatikan bahwa $(b,a) \in R\times S$ memenuhi $f(b,a) = f(a,b)$. Terbukti bahwa $f$ surjektif.
Akan dibuktikan $f$ fungsi 1-1. Misalkan $(r,s),(p,q) \in R\times S$ memenuhi $f(r,s) = f(p,q)$, ini berarti $(s,r) = (q,p)$. Diperoleh $s = q$ dan $r = p$ sehingga $(r,s) = (p,q)$. Terbukti bahwa $f$ fungsi 1-1.
Akan dibuktikan $f$ homomorfisma. Untuk setiap $(r,s),(p,q) \in R\times S$ berlaku

$$\begin{aligned}
f\Big((r,s)+(p,q)\Big) &= f(r+p,s+q) = (s+q,r+p) = (s,r)+(q,p) = f(r,s)+f(p,q), \\
f\Big((r,s)(p,q)\Big) &= f(rp,sq) = (sq,rp) = (s,r)(q,p) = f(r,s)f(p,q).
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $f$ homomorfisma. Karena $f$ juga fungsi 1-1 dan surjektif, maka $f$ isomorfisma. Jadi, $R\times S \cong S\times R$.

▼