Homomorfisma Ring

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Definisi

Definisi 1 (Homomorfisma Ring)**.** Misalkan $(R, +, \cdot)$ dan $(S, \#, \bullet)$ masing-masing merupakan ring. Pemetaan $f : R \to S$ disebut **homomorfisma ring** jika untuk setiap $a, b \in R$ berlaku

1. $f(a + b) = f(a) \# f(b)$.
2. $f(a \cdot b) = f(a) \bullet f(b)$.

Definisi 2 (Image/bayangan)**.** Misalkan $(R, +, \cdot)$ dan $(S, \#, \bullet)$ masing-masing merupakan ring. Jiak $f : R \to S$ merupakan homomorfisma, **image/bayangan/range** dari f didefinisikan sebagai

$$f(R) = \{f(r) : r \in R\}.$$

Definisi 3. Misalkan $(R, +, \cdot)$ dan $(S, \#, \bullet)$ masing-masing merupakan ring. **Kernel** dari f didefnisikan sebagai

$$\ker(f) = \{x \in R : f(x) = 0_S\}.$$

Definisi 4 (Mono/Epi/Isomorfisma)**.** Misalkan $(R, +, \cdot)$ dan $(S, \#, \bullet)$ masing-masing merupakan ring. Diketahui $f : R \to S$ merupakan homomorfisma.

(a) Jika f fungsi 1-1, maka f disebut **monomorfisma**.

(b) Jika f fungsi surjektif, maka f disebut **epimorfisma**.

(c) Jika f fungsi surjektif dan 1-1, maka f disebut **isomorfisma**. Jika demikian, ring R disebut **isomorfik** dengan S, dinotasikan $R \cong S$.

Pada modul ini selanjutnya tidak akan ditulis $\#$ tetap sebagai $+$ dan $\bullet$ sebagai $\cdot$, seperti $f(a + b) = f(a) + f(b)$ dan $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$. Namun, dalam konteks ini tetap merujuk $+$ dan $\cdot$ operasi yang bersesuaian:

$$f(a +_R b) = f(a) +_S f(b), \quad f(a \cdot_R b) = f(a) \cdot_S f(b).$$

Sifat-Sifat

Teorema 5

Misalkan R dan S merupakan ring serta $f : R \to S$ merupakan homomorfisma ring. Maka

1. $f(0_R) = 0_S$.

2. Untuk setiap $a \in R$ berlaku $-f(a) = f(-a)$.

Bukti.

1. Karena f homomorfisma, maka

$$f(0_R) = f(0_R + 0_R) = f(0_R) + f(0_R).$$

Dari hukum kanselisasi diperoleh $f(0_R) = 0_S$ seperti yang ingin dibuktikan.

2. Hal ini ekivalen dengan membuktikan bahwa $f(a)+f(-a) = 0_S$. Karena f homomorfisma, maka

$$f(a) + f(-a) = f(a + (-a)) = f(0_R) = 0_S$$

seperti yang ingin dibuktikan.

□

Akibat 6

Misalkan R dan S merupakan ring serta $f : R \to S$ merupakan homomorfisma. Maka

$$f(a-b) = f\Big(a + (-b)\Big) = f(a) - f(b)$$

untuk setiap $a, b \in R$.

Teorema 7

Misalkan R dan S merupakan ring serta $f : R \to S$ merupakan homomorfisma.

1. $\ker(f)$ ideal dari R.
2. $f(R)$ merupakan subring dari S.

Bukti.

1. Akan dibuktikan $\ker(f)$ ideal dari R. Pertama, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in \ker(f)$ berlaku $x - y \in \ker(f)$. Dengan kata lain, hal ini ekivalen dengan membuktikan $f(x-y) = 0_S$ untuk setiap $x, y \in \ker(f)$. Karena $x, y \in \ker(f)$, maka $f(x) = 0_S = f(y)$. Selain itu, karena f homomorfisma, berdasarkan **Akibat 6** berlaku

$$f(x-y) = f(x) - f(y) = 0_S - 0_S = 0_S \implies x - y \in \ker(f).$$

Keuda, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x \in \ker(f)$ dan $r \in R$ berlaku $xr, rx \in \ker(f)$. Ambil sebarang $x \in \ker(f)$ dan $r \in R$, ini artinya $f(x) = 0_S$. Karena f homomorfisma,

$$f(xr) = f(x)f(r) = 0_S f(r) = 0_S, \quad f(rx) = f(r)f(x) = f(r)0_S = 0_S.$$

Ini menunjukkan $xr, rx \in \ker(f)$. Jadi, terbukti bahwa $\ker(f)$ ideal dari R.

2. Akan dibuktikan $f(R)$ subring dari S. Ambil sebarang $x, y \in f(R)$, akan dibuktikan bahwa $x - y, xy \in f(R)$. Karena $x, y \in f(R)$, terdapat $p, q \in R$ yang memenuhi $x = f(p)$ dan $y = f(q)$. Karena f homomorfisma dan menggunakan **Akibat 6**,

$$x - y = f(p) - f(q) = f(p - q), \quad xy = f(p)f(q) = f(pq).$$

Karena $p - q, pq \in R$ mengingat R merupakan ring, maka $x - y = f(p - q) \in f(R)$ dan $xy = f(pq) \in f(R)$. Jadi, terbukti bahwa $f(R)$ subring dari S.

□

Teorema 8: Sifat-Sifat Elemen

Misalkan R, S merupakan ring dai $f : R \to S$ homomorfisma ring.

1. Untuk setiap $r \in R$ dan $n \in \mathbb{Z}$ berlaku $f(nr) = nf(r)$.
2. Untuk setiap $r \in R$ dan $n \in \mathbb{N}$ berlaku $f(r^n) = f(r)^n$.
3. Jika R merupakan ring dengan elemen satuan 1_R dan $S \neq \{0_S\}$, maka $f(1_R)$ elemen kesatuan di $f(R)$. Terlebih lagi, jika f surjektif, maka $f(1_R) = 1_S$.

Bukti.

1. Jika $n = 0$, maka $nr = 0_R$ dan $nf(r) = 0_S$ yang mana

$$f(nr) = f(0_R) = 0_S = nf(r).$$

Jika $n \geq 1$, akan dibuktikan dengan induksi. Untuk $n = 1$, tinjau $f(nr) = f(r) = 1f(1)$ yang mana benar. Asumsikan untuk suatu N berlaku $f(Nr) = Nf(r)$. Karena f homomorfisma dan menggunakan hipotesis induksi $f(Nr) = Nf(r)$, diperoleh

$$f\Big((N+1)r\Big) = f(Nr + r) = f(Nr) + f(r) = Nf(r) + f(r) = (N+1)f(r).$$

Oleh karena itu, menurut induksi terbukti bahwa $f(nr) = nf(r)$ untuk setiap bilangan asli n. Jika $n < 0$, misalkan $n = -m$ dengan m bilangan asli. Menggunakan bagian sebelumnya dan **Teorema 5**,

$$f(nr) = f\Big((-m)r\Big) = f\Big(m(-r)\Big) = mf(-r) = -mf(r) = (-m)f(r) = nf(r).$$

Terbukti bahwa $f(nr) = nf(r)$.

2. Akan dibuktikan dengan induksi. Jika $n = 1$, $f(r^1) = f(r) = f(1)^1$ yang berarti benar. Asumsikan untuk suatu N berlaku $f\left(r^N\right) = f(r)^N$. Karena f homomorfisma, maka

$$f\left(r^{N+1}\right) = f\left(r^N r\right) = f\left(r^N\right)f(r) = f(r)^N f(r) = f(r)^{N+1}.$$

Oleh karena itu, menurut induksi terbukti bahwa $f(r^n) = f(r)^n$ untuk setiap bilangan asli n.

3. Akan dibuktikan $f(1_R)$ elemen kesatuan di $f(R)$. Dengan kata lain, akan dibuktikan bahwa $pf(1_R) = p = f(1_R)p$ untuk setiap $p \in f(R)$. Ambil sebarang $p \in f(R)$, ini artinya terdapat $t \in R$ yang memenuhi $p = f(t)$. Karena f homomorfisma,

$$pf(1_R) = f(t)f(1_R) = f(t1_R) = f(t) = p, \quad f(1_R)p = f(1_R)f(t) = f(1_Rt) = f(t) = p.$$

   Karena $pf(1_R) = p = f(1_R)p$ untuk setiap $p \in f(R)$, terbukti bahwa $f(1_R)$ elemen kesatuan di $f(R)$. Jika f surjektif, maka $f(R) = S$ dan bukti mengikuti.

□

Teorema 9: Sifat-Sifat Ideal

Misalkan R, S merupakan ring dan $f : R \to S$ merupakan homomorfisma.

1. Jika A ideal dari R dan f surjektif, maka $f(A)$ merupakan ideal dari S.
2. Jika B ideal dari S , maka $f^{-1}(B) := \{x \in R : f(x) \in B\}$ merupakan ideal dari R.

Bukti.

1. Akan dibuktikan $f(A)$ merupakan ideal dari B. Ambil sebarang $x, y \in f(A)$, akan dibuktikan bahwa $x - y \in f(A)$. Karena $x, y \in f(A)$, maka terdapat $p, q \in A$ yang memenuhi $x = f(p)$ dan $y = f(q)$. Karena f homomorfisma dan **Akibat 6**, berlaku

$$x - y = f(p) - f(q) = f(p - q).$$

   Karena $p - q \in A$ mengingat A ideal dari R, ini berarti $x - y = f(p - q) \in f(A)$. Ambil sebarang $x \in f(A)$ dan $s \in S$, akan dibuktikan bahwa $xs, sx \in f(A)$. Karena $x \in f(A)$ terdapat $p \in A$ yang memenuhi $f(p) = x$. Karena f surjektif, terdapat $q \in R$ yang memenuhi $f(q) = s$. Mengingat f homomorfisma,

$$xs = f(p)f(q) = f(pq), \quad sx = f(q)f(p) = f(qp).$$

   Karena A ideal dari R, maka $pq, qp \in A$. Ini berarti $xs = f(pq) \in f(A)$ dan $sx = f(qp) \in f(A)$. Jadi, terbukti bahwa $f(A)$ ideal dari S.

2. Akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(B)$ ideal dari R. Ambil sebarang $x, y \in f^{-1}(B)$, akan dibuktikan bahwa $x - y \in f^{-1}(B)$. Karena $x, y \in f^{-1}(B)$, ini artinya $f(x), f(y) \in B$. Untuk membuktikan $x - y \in f^{-1}(B)$, hal ini ekivalen dengan membuktikan $f(x - y) \in B$. Karena f homomorfisma dan **Akibat 6**, $f(x - y) = f(x) - f(y)$. Mengingat B ideal dan $f(x), f(y) \in B$, maka berakibat

$$f(x - y) = f(x) - f(y) \in B \implies x - y \in f^{-1}(B).$$

   Sekarang, ambil sebarang $x \in f^{-1}(B)$ dan $r \in R$. Akan dibuktikan bahwa $xr, rx \in f^{-1}(B)$ yang artinya ekivalen dengan membuktikan $f(rx), f(xr) \in f(B)$. Karena f homomorfisma,

$$f(rx) = f(r)f(x), \quad f(xr) = f(x)f(r).$$

Mengingat B ideal dari S, $f(x) \in B$, dan $f(r) \in S$, ini berarti $f(x)f(r), f(r)f(x) \in B$. Ini menunjukkan bahwa

$$f(rx) = f(r)f(x) \in B, \quad f(xr) = f(x)f(r) \in B \implies rx, xr \in f^{-1}(B).$$

Jadi, terbukti bahwa $f^{-1}(B)$ ideal dari R.

$\square$

Teorema 10

Misalkan R, S merupakan ring dan $f : R \to S$ merupakan homomorfisma.

1. Jika R ring komutatif, maka $f(R)$ juga ring komutatif.
2. f merupakan monomorfisma jika dan hanya jika $\ker(f) = \{0_R\}$.

Bukti.

1. Akan dibuktikan bahwa $f(R)$ merupakan ring komutatif. Ambil sebarang $x, y \in f(R)$, akan dibuktikan bahwa $xy = yx$. Karena $x, y \in f(R)$ terdapat $p, q \in R$ yang memenuhi $x = f(p)$ dan $y = f(q)$. Karena R ring komutatif dan f homomorfisma,

$$xy = f(p)f(q) = f(pq) = f(qp) = f(q)f(p) = yx$$

seperti yang ingin dibuktikan.

2. ($\Rightarrow$) Jika f monomorfisma, akan dibuktikan bahwa $\ker(f) = \{0_R\}$. Misalkan $x \in \ker(f)$, akan dibuktikan bahwa $x = 0_R$ sebagai satu-satunya kemungkinan. Karena $x \in \ker(f)$, maka $f(x) = 0_S$. Menurut **Teorema 5**, $0_S = f(0_R)$ sehingga $f(0_R) = f(x)$. Karena f monomorfisma, maka $0_R = x$ seperti yang ingin dibuktikan.

3. Jika $\ker(f) = \{0_R\}$. Akan dibuktikan f monomorfisma. Asumsikan $x, y \in R$ memenuhi $f(x) = f(y)$, akan dibuktikan bahwa $x = y$. Karena f homomorfisma dan berdasarkan **Akibat 6**, maka

$$0_S = f(x) - f(y) = f(x - y) \implies x - y \in \ker(f).$$

Karena $\ker(f) = \{0_R\}$, oleh karena itu $x - y = 0_R \iff x = y$ seperti yang ingin dibuktikan.

$\square$

Soal

1. (UAS 2018). Misalkan $A = \left\{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ dan $B = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 7b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan ring. Didefinisikan $\mu : A \to B$ dengan $\mu\left(a + b\sqrt{7}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 7b & a \end{bmatrix}$. Selidiki apakah μ merupakan homomorfisma surjektif. Jika ya, tentukan $\ker(\mu)$.

2. (UAS 2020). Misalkan $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa pada matriks. Didefinisikan pengaitan $\theta : S \to \mathbb{Z}$ dengan $\theta\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \right) = z$. Apakah pengaitan tersebut merupakan epimorfisma?

3. (UAS 2023). Misalkan R adalah ring, J dan K masing-masing ideal di R dengan $J \subseteq K$. Didefinisikan pemetaan $\theta : R/J \to R/K$ dengan $\theta(a+J) = a+K$ untuk setiap $a+J \in R/J$.

   (a) Buktikan θ epimorfisma.

   (b) Buktikan $\ker \theta = K/J$.

4. Periksa apakah pemetaan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan $f(x) = 5x$ merupakan homomorfisma atau bukan.

5. Periksa apakah pemetaan $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_{12}$ yang didefinisikan $f(x) = 3x$ merupakan isomorfisma atau bukan.

6. Diberikan ring $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ dan ring $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Tunjukkan bahwa pengaitan $f : \mathbb{C} \to S$ dengan $f(x+iy) = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$ merupakan homomorfisma ring.

7. Misalkan R dan S merupakan ring.

   (a) Buktikan pemetaan $f : R \times S \to R$ yang didefinisikan dengan $f(a, b) = a$ merupakan homomorfisma ring.

   (b) Buktikan pemetaan $f : R \to R \times S$ yang didefinisikan dengan $f(a) = (a, 0_S)$ merupakan monomorfisma.

8. Misalkan I ideal dari ring R. Buktikan bahwa $f : R \to R/I$ dengan $f(r) = r+I$ merupakan homomorfisma dan $\ker(f) = I$.

9. Misalkan R dan S merupakan ring dengan elemen satuan 1_R dan 1_S berturut-turut, serta $f : R \to S$ merupakan homomorfisma.

   (a) Jika $x \in R$ merupakan unit, buktikan $f(x)$ juga merupakan unit.

   (b) Jika x merupakan unit, buktikan bahwa $f\left(x^{-1}\right) = f(x)^{-1}$.

10. Misalkan R dan S merupakan ring serta $f : R \to S$ merupakan isomorfisma.

    (a) Buktikan bahwa f^{-1} merupakan isomorfisma.

    (b) r unit di R jika dan hanya jika $f(r)$ merupakan unit di S.

    (c) $r \in R$ merupakan pembagi nol di R jika dan hanya jika $f(r)$ merupakan pembagi nol di S.

(d) R komutatif jika dan hanya jika S komutatif.

(e) R merupakan daerah integral jika dan hanya jika S merupakan daerah integral.

(f) R merupakan field jika dan hanya jika S merupakan field.

Dengan kata lain, jika $f : R \to S$ merupakan isomomorfisma, sifat-sifat dalam R "diwarisi" ke S.

11. (a) Buktikan bahwa $\mathbb{Z}_3[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ isomorfik dengan $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 1\rangle$. Dari sifat isomorfik, simpulkan $\mathbb{Z}_3[i]$ field.

    (b) Jika R, S merupakan ring, buktikan bahwa $R \times S \cong S \times R$.