# Ring Faktor dan Field Berhingga

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

**Contoh 1**

Misalkan ring $\mathbb{Z}$ dan $I = \langle 5 \rangle$ ideal dari $\mathbb{Z}$. Konstruksikan tabel penjumlahan dan perkalian untuk $\mathbb{Z}/I$.

*Solusi.* Perhatikan bahwa

$$\mathbb{Z}/I = \{I, 1+I, 2+I, 3+I, 4+I\}.$$

Sebagai contoh:

- Tinjau $11 \in \mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai $11 = 1 + 10 \in 1 + \langle 5 \rangle$.
- Tinjau $2024 \in \mathbb{Z}$ dapat dinyatakan sebagai $2024 = 4 + 2020 \in 4 + \langle 5 \rangle$.

Diperoleh tabel sebagai berikut.

| $+$ | $I$ | $1+I$ | $2+I$ | $3+I$ | $4+I$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $1+I$ | $2+I$ | $3+I$ | $4+I$ |
| $1+I$ | $1+I$ | $2+I$ | $3+I$ | $4+I$ | $I$ |
| $2+I$ | $2+I$ | $3+I$ | $4+I$ | $I$ | $1+I$ |
| $3+I$ | $3+I$ | $4+I$ | $I$ | $1+I$ | $2+I$ |
| $4+I$ | $4+I$ | $I$ | $1+I$ | $2+I$ | $3+I$ |

| $\cdot$ | $I$ | $1+I$ | $2+I$ | $3+I$ | $4+I$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ | $I$ |
| $1+I$ | $I$ | $1+I$ | $2+I$ | $3+I$ | $4+I$ |
| $2+I$ | $I$ | $2+I$ | $4+I$ | $1+I$ | $3+I$ |
| $3+I$ | $I$ | $3+I$ | $1+I$ | $4+I$ | $2+I$ |
| $4+I$ | $I$ | $4+I$ | $3+I$ | $2+I$ | $1+I$ |

Contoh perhitungannya adalah sebagai berikut:

- $(3+I)+(4+I) = (3+4)+I = 7+I = 2+(5+I)$. Mengingat $5 \in I$, maka $5+I = I$ dan dapat ditulis menjadi $(3+I)+(4+I) = 2+I$.
- $(2+I)+(3+I) = (2+3)+I = 5+I = I$ karena $5 \in I$.
- $(3+I)(4+I) = (3 \cdot 4)+I = 12+I = 2+(10+I)$. Karena $10 \in I$, maka $10+I = I$ sehingga $(3+I)(4+I) = 2+I$.
- $(3+I)I = (3+I)(0+I) = (3 \cdot 0)+I = 0+I = I$.

▼

**Contoh 2**

Misalkan $\mathbb{Z}[x]$ ring polinomial dengan koefisien anggota dari ring $\mathbb{Z}$. Misalkan $I = \langle 3, x^2+1\rangle$ ideal dari ring $\mathbb{Z}[x]$ yang dibangun oleh dua unsur 3 dan $x^2+1$. Tuliskan unsur-unsur di $\mathbb{Z}[x]/\langle 3, x^2+1\rangle$.

*Solusi.* Perhatikan bahwa

$$\left\langle x^2+1\right\rangle = \left\{p(x)\left(x^2+1\right) : p(x) \in \mathbb{Z}[x]\right\}.$$

Oleh karena itu, $\langle x^2+1\rangle$ meliputi semua poliomial yang habis dibagi $x^2+1$. Akibatnya, untuk sebarang $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ terdapat tepat satu $h(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dengan $\deg r < \deg\left(x^2+1\right) = 2$ yang memenuhi

$$a(x) = h(x)\left(x^2+1\right) + r(x).$$

Karena $\deg r < 2$, misalkan $r(x) = px + q$ di mana $p, q \in \mathbb{Z}$. Jadi,

$$a(x) = h(x)\left(x^2+1\right) + px + q \in \left\langle x^2+1\right\rangle + px + q.$$

Jadi,

$$\mathbb{Z}[x]/\left\langle x^2+1\right\rangle = \left\{px + q + \left\langle x^2+1\right\rangle : p, q \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Sekarang perhatikan bahwa $\mathbb{Z}/\langle 3\rangle = \{\langle 3\rangle, 1+\langle 3\rangle, 2+\langle 3\rangle\}$. Dengan kata lain, semua bilangan bulat dinyatakan sebagai $x+\langle 3\rangle$ di mana $x$ adalah sisa pembagian saat dibagi 3. Sebagai contoh,

$$2024 = 1 + 2022 \in 1 + \langle 3\rangle, \quad 8 = 2 + 6 \in 2 + \langle 3\rangle.$$

Ini berarti

$$\mathbb{Z}[x]/\left\langle 3, x^2+1\right\rangle = \left\{px + q + \left\langle 3, x^2+1\right\rangle : p, q \in \mathbb{Z}; 0 \leq p, q \leq 2\right\}.$$

Untuk mempermudah penulisan misalkan $I = \langle 3, x^2+1\rangle$. Jadi,

$$\mathbb{Z}[x]/I = \boxed{\{I, 1+I, 2+I, x+I, (x+1)+I, (x+2)+I, 2x+I, 2x+1+I, 2x+2+I\}}.$$

▼

**Contoh 3**

Misalkan $\mathbb{Z}_5[x]$ dan $I = \langle x^2 + x + \overline{2} \rangle$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_5[x]$ yang dibangun oleh $x^2 + x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$. Carilah invers perkalian dari $\overline{2}x + \overline{3} + I$ di $\mathbb{Z}_5[x]/I$.

*Solusi.* Akan ditentukan $P \in \mathbb{Z}_5[x]/I$ yang memenuhi $\left(\overline{2}x + \overline{3} + I\right) P = \overline{1} + I$. Perhatikan bahwa

$$\mathbb{Z}_5[x]/I = \{ax + b + I : a, b \in \mathbb{Z}_5\}.$$

Misalkan $P = ax + b + I$ di mana $a, b \in \mathbb{Z}_5[x]$. Ini berarti

$$\begin{aligned}
\overline{1} + I &= \left(\overline{2}x + \overline{3} + I\right)(ax + b + I) \\
&= \left(\overline{2}x + \overline{3}\right)(ax + b) + I \\
&= \overline{2}ax^2 + \left(\overline{2}b + \overline{3}a\right)x + \overline{3}b + I \\
&= \overline{2}a\left(x^2 + x + \overline{2}\right) + \left(\overline{2}b + a\right)x + \left(\overline{3}b - \overline{4}a\right) + I.
\end{aligned}$$

Karena $\overline{2}a\left(x^2 + x + \overline{2}\right) \in I$, maka

$$\overline{1} + I = \left(\overline{2}b + a\right)x + \left(\overline{3}b - \overline{4}a\right) + I = \left(\overline{2}b + a\right)x + \left(\overline{3}b + a\right) + I.$$

Dari sini haruslah $\overline{2}b + a = \overline{0}$ dan $\overline{3}b + a = \overline{1}$. Kurangkan kedua persamaan,

$$\overline{1} - \overline{0} = \left(\overline{3}b + a\right) - \left(\overline{2}b - a\right) = b \implies b = \overline{1}.$$

Substitusi, $a = \overline{0} - \overline{2}b = -\overline{2} = \overline{3}$. Jadi, $P = \boxed{\overline{3}x + \overline{1} + I}$ invers dari $\overline{2}x + \overline{3} + I$ di $\mathbb{Z}_5[x]/I$. ▼

**Contoh 4**

Misalkan ring $\mathbb{Z}[x]$ dan $I = \langle 2, x\rangle$ ideal dari $\mathbb{Z}[x]$.

(a) Tuliskan unsur-unsur dari $\mathbb{Z}[x]/\langle 2, x\rangle$.

(b) Periksa apakah $\mathbb{Z}[x]/\langle 2, x\rangle$ merupakan field atau bukan.

*Solusi.*

(a) Sebagaimana alur pada Contoh 2,

$$\mathbb{Z}[x]/\langle 2, x\rangle = \{a + \langle 2, x\rangle : a \in \mathbb{Z}_2\} = \boxed{\{\langle 2, x\rangle, 1 + \langle 2, x\rangle\}}.$$

(b) Perhatikan tabel Cayley berikut.

| $\cdot$ | $I$ | $1+I$ |
|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $I$ |
| $1+I$ | $I$ | $1+1$ |

Karena $I$ ideal, telah dijamin $\mathbb{Z}[x]/I$ ring faktor. Dari tabel ditunjukkan bahwa berlaku sifat komutatif terhadap perkalian dan adanya elemen satuan, yaitu $1 + I$. Selain itu, elemen tak nol dari $\mathbb{Z}[x]/I$ memiliki invers, yaitu $(1+I)^{-1} = 1+I$. Jadi, $\mathbb{Z}[x]/I$ merupakan $\boxed{\text{field}}$.

▼

**Contoh 5**

Misalkan $R$ adalah ring komutatif dan $I$ ideal dari $R$. Buktikan ring faktor $R/I$ komutatif jika dan hanya jika $ab - ba \in I$ untuk setiap $a, b \in R$.

*Solusi.*
($\Rightarrow$) Jika $R/I$ ring komutatif. Ambil sebarang $a, b \in I$, maka

$$(a + I)(b + I) = (b + I)(a + I) \implies ab + I = ba + I.$$

Ini berarti

$$I = 0 + I = (ab + I) - (ba + I) = (ab - ba) + I \implies I = (ab - ba) + I.$$

Ini berarti haruslah $ab - ba \in I$.
($\Leftarrow$) Jika $ab - ba \in I$ untuk setiap $a, b \in R$, maka $(ab - ba) + I = 0 + I = I$. Diperoleh

$$I = (ab - ba) + I = (ab + I) + (-ba + I) \implies ab + I = ba + I$$

yang berarti $(a + I)(b + I) = (b + I)(a + I)$. Terbukti $R/I$ komutatif. ▼

**Contoh 6**

Misalkan $I$ dan $J$ adalah ideal dari ring $R$ dengan $I \subseteq J$. Buktikan bahwa $J/I$ adalah ideal dari $R/I$.

*Solusi.* Dalam hal ini jelas $J/I$ tak kosong karena $0_R \in J \implies 0_R + I \in J/I$. Akan dibuktikan bahwa $J/I \subseteq R/I$. Ambil sebarang $j + I \in J/I$ di mana $j \in J$, Karena $J$ ideal dari $R$, maka $J \subseteq R \implies j \in R$. Oleh karena itu, $j + I \in R/I$ sehingga terbukti $J/I \subseteq R/I$.
Akan dibuktikan $J/I$ ideal dari $R/I$. Ambil sebarang $x+I, y+I \in J/I$ dan sebarang $r+I \in R/I$.

- Perhatikan bahwa

$$(x + I) - (y + I) = (x + I) + (-y + I) = (x - y) + I.$$

  Karena $x, y \in J$, maka $x - y \in J$ sehingga $(x-y)+I \in J/I$. Jadi, $(x+I)-(y+I) \in J/I$.

- Perhatikan bahwa

$$(x + I)(r + I) = xr + I, \quad (r + I)(x + I) = rx + I.$$

  Karena $J$ ideal dari $R$, maka $xr, rx \in J$ sehingga $xr + I, rx + I \in J/I$. Jadi, $(x + I)(r + I), (r + I)(x + I) \in J/I$.

Terbukti $J/I$ ideal dari $R/I$. ▼

**Contoh 7**

(a) Buktikan bahwa $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+3x+5\rangle$ merupakan field.

(b) Buktikan bahwa $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3+x^2+\overline{2}\rangle$ merupakan field.

*Solusi.*

(a) Perhatikan bahwa $\mathbb{R}$ merupakan field. Berdasarkan **Teorema 5**, hal ini cukup membuktikan $x^2+3x+5$ tak tereduksi di $\mathbb{R}[x]$. Untuk membuktikan polinomial tak tereduksi di $\mathbb{R}[x]$ cukup dengan membuktikan bahwa polinomial tersebut tidak memiliki akar-akar real. Di sisi lain, $x^2+3x+5$ memiliki diskriminan $3^2-4(1)(5)=-11<0$. Ini menunjukkan $x^2+3x+5=0$ tidak memiliki akar-akar real sehingga $x^2+3x+5$ tak tereduksi di $\mathbb{R}[x]$. Jadi, $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+3x+5\rangle$ merupakan field.

(b) Perhatikan bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan field. Cukup diperiksa bahwa $\langle x^3+x^2+\overline{2}\rangle$ merupakan polinomial tak tereduksi di $\mathbb{Z}_3[x]$. Karena $x^3+x^2+\overline{2}$ polinomial berderajat 3, **Modul 4 - Teorema 13** mengatakan bahwa cukup dibuktikan $f(x)\neq 0$ untuk setiap $x\in\mathbb{Z}_3$ di mana $f(x)=x^3+x^2+\overline{2}$. Perhatikan bahwa

$$f\left(\overline{0}\right)=\overline{2},\quad f\left(\overline{1}\right)=\overline{1},\quad f\left(\overline{2}\right)=\overline{2}.$$

Oleh karena itu, $f(x)=x^2+x^2+\overline{2}$ tak tereduksi sehingga $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3+x^2+\overline{2}\rangle$ merupakan $\boxed{\text{field}}$.

(c)