Ring Faktor dan Field Berhingga

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Definisi

Definisi 1 (Ring Faktor)**.** Misalkan R merupakan ring dan I merupakan ideal dari R. **Ring faktor** R/I didefiniiskan sebagai

$$R/I = \{r + I : r \in R\}$$

yang dilengkapi operasi

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I, \quad (a + I)(b + I) = ab + I$$

untuk setiap $a + I, b + I \in I$.

Definisi 2 (Field Berhingga)**.** Field dengan banyak elemen berhingga disebut sebagai field berhingga/field Galois. Field berhingga dengan p elemen dinotasikan sebagai $\mathbb{F}_p$ atau $GF(p)$.

Sifat-Sifat

Teorema 3: Eksistensi Ring Faktor

Misalkan R merupakan ring dan I merupakan subring dari R. R/I merupakan ring faktor jika dan hanya jika I ideal dari R.

Bukti.
($\Rightarrow$) Jika R/I merupakan ring faktor. Akan dibuktikan I ideal dari R. Dalam hal ini cukup dibuktikan $ra, ar \in I$ untuk setiap $r \in R, a \in I$. Ambil sebarang $r \in R$ dan $a \in I$. Perhatikan bahwa $a + I = I = 0_R + I$. Ini berarti

$$ar + I = (a + I)(r + I) = (0_R + I)(r + I) = 0_R r + I = 0_R + I = I \implies ar \in I.$$

Secara analog, $ra \in I$. Terbukti bahwa I ideal dari R.
($\Leftarrow$) Jika I merupakan ideal dari R. Akan dibuktikan R/I membentuk ring. Ambil sebarang $x + I, y + I \in R/I$ di mana $x, y \in R$.

- Akan dibuktikan berlaku sifat tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian. Perhatikan bahwa
$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I, \quad (x + I)(y + I) = xy + I.$$
Karena $x + y, xy \in R$, maka $(x + y) + I \in R/I$ dan $xy + I \in R/I$.

- Akan dibuktikan berlaku sifat komutatif terhadap operasi penjumlahan. Perhatikan bahwa

$$(x+I)+(y+I)=(x+y)+I=(y+x)+I=(y+I)+(x+I)$$

sehingga terbukti.

- Akan dibuktikan berlaku sifat asosiatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\Big((x+I)+(y+I)\Big)+(z+I) &= \Big((x+y)+I\Big)+(z+I)\\ &= \Big((x+y)+z\Big)+I\\ &= \Big(x+(y+z)\Big)+I\\ &= (x+I)+\Big((y+z)+I\Big)\\ &= (x+I)+\Big((y+I)+(z+I)\Big).\end{aligned}$$

  Secara analog terhadap operasi perkalian.

- Perhatikan bahwa 0_R+I merupakan elemen nol di R/I karena

$$(0_R+I)+(x+I)=(x+I)+(0_R+I)=(x+0_R)+I=x+I.$$

- Perhatikan bahwa $-(x+I)=(-x)+I$ karena

$$\Big((-x)+I\Big)+(x+I)=(x+I)+\Big((-x)+I\Big)=\Big(x+(-x)\Big)+I=0_R+I$$

  sehingga terbukti setiap elemennya memiliki invers.

- Akan dibuktikan berlaku sifat distributif.

$$\begin{aligned}(x+I)\Big((y+I)+(z+I)\Big) &= (x+I)\Big((y+z)+I\Big)\\ &= \Big(x(y+z)\Big)+I\\ &= (xy+xz)+I\\ &= (xy+I)+(xz+I)\\ &= (x+I)(y+I)+(x+I)(z+I).\end{aligned}$$

  Secara analog untuk distributif kanan.

Terbukti bahwa R/I merupakan ring. □

Teorema 4

Misalkan R merupakan ring dan I merupakan ideal dari R.

1. Jika R ring komutatif, maka R/I komutatif.
2. Jika R memiliki elemen satuan, maka R/I memiliki elemen satuan.

3. Jika R memiliki elemen unit, maka R/I memiliki elemen unit.

Bukti. Bukti cukup mudah dilakukan mengikuti bukti **Teorema 3**. □

Teorema 5: Uji Tak Tereduksi dan Uji Field pada Ring Faktor

Misalkan $\mathbb{F}$ merupakan field dan $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ polionm dengan $\deg p \geq 1$. Ring faktor $\mathbb{F}[x]/\langle p(x)\rangle$ field jika dan hanya jika $p(x)$ tak tereduksi.

Bukti.
($\Rightarrow$) Jika $\mathbb{F}[x]/\langle p(x)\rangle$ field. Akan dibuktikan $p(x)$ tak tereduksi. Andaikan $p(x)$ tereduksi, terdapat $g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$ dengan $\deg g, \deg h \geq 1$ yang memenuhi $p(x) = g(x)h(x)$. Karena $\mathbb{F}[x]/\langle p(x)\rangle$, maka $\mathbb{F}[x]/\langle p(x)\rangle$ merupakan daerah integral. Namun,

$$\Big(g(x) + \langle p(x)\rangle\Big)\Big(h(x) + \langle p(x)\rangle\Big) = g(x)h(x) + \langle p(x)\rangle = p(x) + \langle p(x)\rangle = \langle p(x)\rangle = 0_{\mathbb{F}} + \langle p(x)\rangle$$

yang menunjukkan $\mathbb{F}[x]/\langle p(x)\rangle$ memiliki pembagi nol, kontradiksi. Jadi, $p(x)$ tak tereduksi.
($\Leftarrow$) Jika $p(x)$ tak tereduksi. Tinjau sebarang elemen tak nol di $\mathbb{F}[x]/\langle p(x)\rangle$, yaitu $a(x) + \langle p(x)\rangle$ dengan $a(x) \notin \langle p(x)\rangle$. Dengan kata lain, $p(x) \nmid a(x)$ yang berarti $\mathrm{fpb}(p(x), a(x)) = 1_{\mathbb{F}}$. Menurut Bezout, terdapat $t(x), r(x)$ yang memenuhi

$$1_{\mathbb{F}} = p(x)t(x) + a(x)r(x).$$

Maka

$$\begin{aligned}\Big(a(x) + \langle p(x)\rangle\Big)\Big(r(x) + \langle p(x)\rangle\Big) &= a(x)r(x) + \langle p(x)\rangle \\ &= \Big(1_{\mathbb{F}} - p(x)t(x)\big) + \langle p(x)\rangle \\ &= 1_{\mathbb{F}} + \langle p(x)\rangle\end{aligned}$$

yang menunjukkan $a(x) + \langle p(x)\rangle$ merupakan unit. Terbukti $\mathbb{F}[x]/\langle p(x)\rangle$ merupakan field. □

Soal

1. Misalkan ring $\mathbb{Z}$ dan $I = \langle 5\rangle$ ideal dari $\mathbb{Z}$. Konstruksikan tabel penjumlahan dan perkalian untuk $\mathbb{Z}/I$.

2. Misalkan $\mathbb{Z}[x]$ ring polinomial dengan koefisien anggota dari ring $\mathbb{Z}$. Misalkan $I = \langle 3, x^2 + 1\rangle$ ideal dari ring $\mathbb{Z}[x]$ yang dibangun oleh dua unsur 3 dan $x^2 + 1$. Tuliskan unsur-unsur di $\mathbb{Z}[x]/\langle 3, x^2 + 1\rangle$.

3. Misalkan $\mathbb{Z}_5[x]$ dan $I = \langle x^2 + x + \overline{2}\rangle$ adalah ideal dari $\mathbb{Z}_5[x]$ yang dibangun oleh $x^2+x+\overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$. Carilah invers perkalian dari $\overline{2}x + \overline{3} + I$ di $\mathbb{Z}_5[x]/I$.

4. Misalkan ring $\mathbb{Z}[x]$ dan $I = \langle 2, x\rangle$ ideal dari $\mathbb{Z}[x]$.

   (a) Tuliskan unsur-unsur dari $\mathbb{Z}[x]/\langle 2, x\rangle$.

(b) Periksa apakah $\mathbb{Z}[x]/\langle 2, x\rangle$ merupakan field atau bukan.

5. Misalkan R adalah ring komutatif dan I ideal dari R. Buktikan ring faktor R/I komutatif jika dan hanya jika $ab - ba \in I$ untuk setiap $a, b \in R$.

6. Misalkan I dan J adalah ideal dari ring R dengan $I \subseteq J$. Buktikan bahwa J/I adalah ideal dari R/I.

7. (a) Buktikan bahwa $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 + 3x + 5\rangle$ merupakan field.

   (b) Buktikan bahwa $\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^3 + x^2 + \overline{2}\rangle$ merupakan field.