Latihan Soal Persiapan UTS

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Contoh 1

Didefinisikan operasi $*$ dan $\cdot$ pada $\mathbb{Z}$ sebagai

$$a * b = a + b + 1, \quad a \cdot b = a + b + ab$$

untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.

(a) Periksa apakah $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ merupakan ring, field, atau daerah integral.

(b) Tentukan semua pembagi nol di $\mathbb{Z}$ jika ada.

(c) Tentukan semua unit di $\mathbb{Z}$ jika ada.

Solusi. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(a) Akan dibuktikan $\mathbb{Z}$ merupakan ring.

- Akan dibuktikan berlaku sifat tertutup. Perhatikan bahwa $a * b = a + b + 1 \in \mathbb{Z}$ dan $a \cdot b = a + b + ab \in \mathbb{Z}$ sehingga berlaku sifat tertutup.
- Akan dibuktikan berlaku sifat komutatif terhadap $*$. Perhatikan bahwa $a * b = a + b + 1 = b + a + 1 = b * a$ sehingga berlaku sifat komutatif terhadap $*$.
- Akan dibuktikan berlaku sifat asosiatif. Tinjau

$$(a * b) * c = (a + b + 1) * c = (a + b + 1) + c + 1 = a + b + c + 2,$$
$$a * (b * c) = a * (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = a + b + c + 2.$$

Diperoleh $(a * b) * c = a * (b * c)$. Selain itu,

$$(a \cdot b) \cdot c = (a + b + ab) \cdot c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c = a + b + c + ab + bc + ca + abc$$
$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b + c + bc) = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = a + b + c + ab + bc + ca + abc$$

sehingga $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Terbukti bahwa berlaku sifat asosiatif terhadap kedua operasi.

- Akan dibuktikan $\mathbb{Z}$ memiliki elemen nol. Tinjau $-1 \in \mathbb{Z}$ memenuhi

$$a * (-1) = a + (-1) + 1 = a, \quad (-1) * a = -1 + a + 1 = a \implies a * (-1) = a = (-1) * a$$

untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Jadi, $0_{\mathbb{Z}} = -1$.

- Akan dibuktikan $\mathbb{Z}$ memiliki invers terhadap $*$. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, tinjau $(-2-a) \in \mathbb{Z}$ memenuhi

$$a * (-2-a) = a + (-2-a) + 1 = -1, \quad (-2-a) * a = (-2-a) + a + 1 = -1.$$

Ini berarti $(-a) = -2 - a$.

- Akan dibuktikan berlaku sifat distributif. Tinjau

$$\begin{aligned} a \cdot (b * c) &= a \cdot (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + a(b + c + 1) \\ &= 2a + b + c + ab + ac + 1 \\ (a \cdot b) * (a \cdot c) &= (a + b + ab) * (a + c + ac) = (a + b + ab) + (a + c + ac) + 1 \\ &= 2a + b + c + ab + ac + 1 \end{aligned}$$

yang berarti $a \cdot (b * c) = (a \cdot b) * (a \cdot c)$. Selain itu,

$$\begin{aligned} (a * b) \cdot c &= (a + b + 1) \cdot c = (a + b + 1) + c + (a + b + 1)c \\ &= a + b + 2c + ac + bc + 1 \\ (a \cdot c) * (b \cdot c) &= (a + c + ac) * (b + c + bc) = (a + c + ac) + (b + c + bc) + 1 \\ &= a + b + 2c + ac + bc + 1. \end{aligned}$$

Ini berarti $(a * b) \cdot c = (a \cdot c) * (b \cdot c)$.

Terbukti bahwa $\mathbb{Z}$ merupakan $\boxed{\text{ring}}$.
Akan dibuktikan $\mathbb{Z}$ merupakan daerah integral.

- Akan dibuktikan R ring komutatif. Perhatikan bahwa

$$a \cdot b = a + b + ab = b + a + ba = b \cdot a \implies a \cdot b = b \cdot a$$

Terbukti.

- Akan dibuktikan R ring dengan satuan. Perhatikan bahwa $0 \in \mathbb{Z}$ memenuhi

$$a \cdot 0 = a + 0 + a0 = a, \quad 0 \cdot a = 0 + a + a0 = a \implies a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a.$$

Jadi, $1_{\mathbb{Z}} = 0$ sehingga terbukti memiliki elemen satuan.

- Akan dibuktikan $\mathbb{Z}$ tidak memiliki pembagi nol. Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}$ memenuhi $x \cdot y = 0_{\mathbb{Z}}$ yang berarti $-1 = xy + x + y \iff 0 = (x+1)(y+1)$. Maka kemungkinannya hanyalah $x = -1$ atau $y = -1$ yang mana merupakan $0_{\mathbb{Z}}$. Terbukti.

Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{Z}$ merupakan $\boxed{\text{daerah integral}}$.
Akan dibuktikan $\mathbb{Z}$ bukan field. Tinjau $3 \in \mathbb{Z}$. Andaikan ada $b \in \mathbb{Z}$ yang memenuhi $3 \cdot b = 1_{\mathbb{Z}} = b \cdot 3$. Maka

$$0 = 3 + b + 3b = 3 + 4b \iff b = -\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}.$$

Jadi, 3 bukan elemen unit yang menunjukkan ada elemen di $\mathbb{Z}$ bukan unit. Akibatnya, $\mathbb{Z}$ $\boxed{\text{bukan field}}$.

▼

1. Diberikan ring $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ dengan operasi $*$ dan $\cdot$ sebagai berikut.

$$\left(a+b\sqrt{3}\right) * \left(c+d\sqrt{3}\right) = (a+c)+(b+d)\sqrt{3}$$
$$\left(a+b\sqrt{3}\right) \cdot \left(c+d\sqrt{3}\right) = (ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}.$$

   Periksa apakah $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ merupakan daerah integral atau field.

2. Diberikan $S = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 : a+b=c\right\}$. Selidiki apakah S subring dari R atau bukan.

3. Diberikan ring $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6, +, \cdot)$.
   (a) Tentukan semua subring dan ideal dari $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7$.
   (b) Tentukan $o\left(\overline{2}, \overline{5}\right)$.
   (c) Tentukan $char(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7)$.

4. Diberikan ring $S = \left\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\right\} \subseteq \mathbb{Z}_8$ dan ring $T = \left\{\overline{0}, \overline{3}\right\} \subseteq \mathbb{Z}_6$. Tentukan $char(S \times T)$.

5. Misalkan R adalah ring komutatif dan $A \subseteq R$. Buktikan bahwa annihilator A,

$$Ann(A) = \{r \in R : ra = 0_R \ \forall a \in A\}$$

   merupakan ideal dari R.

6. Untuk masing-masing $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_n[x]$ berikut, tentukan hasil dan sisa pembagian $f(x)$ oleh $g(x)$.
   (a) $f(x) = \overline{5}x^4 + \overline{3}x^3 + \overline{1}, g(x) = \overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_7[x]$.
   (b) $f(x) = \overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{1}, g(x) = \overline{3}x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$.
   (c) $f(x) = \overline{2}x^5 + \overline{2}x^4 + x^2 + \overline{2}, g(x) = x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$.

7. Untuk masing-masing $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_n[x]$ berikut, carilah FPB dari $f(x)$ dan $g(x)$.
   (a) $f(x) = x^3 + x^2 + \overline{2}x + \overline{2}, g(x) = x^4 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$.
   (b) $f(x) = \overline{4}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{6}x^2 + \overline{4}x + \overline{5}, g(x) = \overline{3}x^2 + \overline{2} \in \mathbb{Z}_7[x]$.
   (c) $f(x) = \overline{4}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{6}x^2 + \overline{4}x + \overline{5}, g(x) = \overline{3}x^3 + \overline{5}x^2 + \overline{6}x \in \mathbb{Z}_7[x]$.