Ring Polinomial

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Contoh 1

Diberikan polinomial $f(x) = x^3 + x + \overline{1}$ dan $g(x) = x + \overline{1}$ merupakan polinomial di $\mathbb{Z}_2[x]$.

(a) Tentukan hasil bagi dan sisa bagi $f(x)$ jika dibagi $g(x)$.

(b) Tentukan faktor persekutuan terbesar dari $f(x)$ dengan $g(x)$.

(c) Apakah f tereduksi?

Solusi.

(a) Gunakan pembagian bersusun.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - x \\ \hline x + \overline{1} & x^3 + x + \overline{1} \\ & x^3 + x^2 \\ \cline{2-2} & -x^2 + x + \overline{1} \\ & -x^2 - x \\ \cline{2-2} & \overline{2}x + \overline{1} = \overline{1} \end{array}$$

karena $\overline{2} = \overline{0}$. Jadi,

$$x^3 + x + \overline{1} = \left(x^2 - x\right)(x + \overline{1}) + \overline{1} = \left(x^2 + x\right)(x + \overline{1}) + \overline{1}$$

karena $-\overline{1} = \overline{1}$. Jadi, hasil baginya adalah $\boxed{x^2 + x}$ dan sisa baginya $\boxed{\overline{1}}$.

(b) Akan digunakan algoritma euclid. Perhatikan bahwa

$$x^3 + x + \overline{1} = (x + \overline{1})\left(x^2 + x\right) + \overline{1}$$
$$x + \overline{1} = \overline{1} \cdot (x + \overline{1}) + \overline{0}.$$

Jadi, $\text{fpb}(f(x), g(x)) = \boxed{\overline{1}}$.

(c) Karena f polinomial berderajat 3, maka akan digunakan **Teorema 13**. Perhatikan bahwa $f\left(\overline{0}\right) = \overline{1}$ dan $f\left(\overline{1}\right) = \overline{3} = \overline{1}$. Karena untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_2[x]$ berlaku $f(x) \neq \overline{0}$, maka f $\boxed{\text{tidak tereduksi}}$.

Contoh 2: Modifikasi UTS 2023

Diketahui $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ dan $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ merupakan field.

(a) Tentukan semua nilai $c \in \mathbb{Z}_3$ agar $f(x) = x^3 + cx + \overline{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$ tak tereduksi.

(b) Tentukan hasil bagi dan sisa dari $g(x) := \overline{4}x^6 - \overline{2}x^4 + \overline{3}x^2 - x - \overline{4} \in \mathbb{Z}_5[x]$ dibagi oleh $h(x) := \overline{3}x^2 - \overline{4}x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

(c) Dari (b), tentukan $\text{fpb}(g(x), h(x))$.

Solusi.

(a) Karena $\deg f = 3$, maka akan digunakan **Teorema 13**. Untuk menunjukkan bahwa f tak tereduksi, maka haruslah $f(x) \neq \overline{0}$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_3$. Perhatikan bahwa

$$f\left(\overline{0}\right) = \overline{2} \neq \overline{0}, \quad f\left(\overline{1}\right) = \overline{1} + c + \overline{2} = c, \quad f\left(\overline{2}\right) = \overline{8} + \overline{2}c + \overline{2} = \overline{1} + \overline{2}c.$$

Dalam hal ini haruslah $c \neq \overline{0}$ agar $f\left(\overline{1}\right) \neq \overline{0}$. Selain itu, $f\left(\overline{2}\right) \neq \overline{0}$ terpenuhi saat $c \in \left\{\overline{0}, \overline{2}\right\}$. Jadi, semua nilai c agar f tak tereduksi adalah $c = \boxed{\overline{2}}$ sebagai satu-satunya kemungkinan.

(b) Dalam $\mathbb{Z}_5$, perhatikan bahwa $-\overline{2} = \overline{3}$, $-\overline{1} = \overline{4}$, dan $-\overline{4} = \overline{1}$. Tulis ulang

$$g(x) = \overline{4}x^6 + \overline{3}x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{1}, \quad h(x) = \overline{3}x^2 + x + \overline{2}.$$

Gunakan pembagian bersusun.

$$\begin{array}{r|l r}
 & \overline{3}x^4 - x^3 + x^2 + \overline{2}x + \overline{3} & \\ \hline
\overline{3}x^2 + x + \overline{2}\ ) & \overline{4}x^6 + \overline{3}x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{1} & \\
 & \overline{4}x^6 + \overline{3}x^5 + x^4 & \overline{9}x^6 = \overline{4}x^6, \overline{6}x^4 = \overline{x}^4 \\ \hline
 & -\overline{3}x^5 + \overline{2}x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x + 1 & \\
 & -\overline{3}x^5 - x^4 - \overline{2}x^3 & \\ \hline
 & \overline{3}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x + 1 & \\
 & \overline{3}x^4 + x^3 + \overline{2}x^2 & \\ \hline
 & x^3 + x^2 + \overline{4}x + \overline{1} & \\
 & x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{4}x & \overline{6}x^2 = x^2 \\ \hline
 & -x^2 + \overline{1} & \\
 & -x^2 + \overline{3}x + \overline{6} & \overline{9}x^2 = -x^2 \\ \hline
 & \overline{3}x - \overline{5} = \overline{2}x & \overline{5} = \overline{0}
\end{array}$$

Jadi,

$$g(x) = h(x)\left(\overline{3}x^4 - x^3 + x^2 + \overline{2}x + \overline{3}\right) + \overline{2}x = h(x)\left(\overline{3}x^4 + \overline{4}x^3 + x^2 + \overline{2}x + \overline{3}\right) + \overline{2}x.$$

Diperoleh hasil baginya $\boxed{\overline{3}x^4 + \overline{4}x^3 + x^2 + \overline{2}x + 2}$ dan sisanya $\boxed{\overline{2}x}$.

(c) Akan digunakan Algoritma Euclid.

$$\begin{aligned}
\overline{4}x^6 + \overline{3}x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{4}x + \overline{1} &= \left(\overline{3}x^2 + x + \overline{2}\right)\left(\overline{3}x^4 + \overline{4}x^3 + x^2 + \overline{2}x + 3\right) + \overline{2}x \\
\overline{3}x^2 + x + \overline{2} &= \overline{2}x(\overline{4}x + \overline{3}) + \overline{2} \\
\overline{2}x &= \overline{2}\,(x) + \overline{0}.
\end{aligned}$$

Jadi, $\text{fpb}(g(x), h(x)) = \overline{2}^{-1} \cdot \overline{2} = \boxed{\overline{1}}$.

▼

Contoh 3: UTS 2021

Misalkan $f(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ dengan $f(x) := x^5 + x^4 + \overline{5}x^3 + x^2 + x + \overline{5}$.

(a) Tentukan hasil dan sisa dari $f(x)$ saat dibagi oleh $g(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ dengan $g(x) := \overline{3}x^2 + \overline{2}$.

(b) Faktorkan polinom $f(x)$.

Solusi.

(a) Gunakan pembagian bersusun.

$$\begin{array}{r|l l}
 & \overline{5}x^3 + \overline{5}x^2 + \overline{3}x + \overline{4} & \\
\hline
\overline{3}x^2 + \overline{2} \;) & x^5 + x^4 + \overline{5}x^3 + x^2 + x + \overline{5} & \\
 & x^5 + \overline{3}x^3 & \overline{15}x^5 = x^5, \overline{10}x^3 = \overline{3}x^3 \\
\hline
 & x^4 + \overline{2}x^3 + x^2 + x + \overline{5} & \\
 & x^4 + \overline{3}x^2 & \overline{15}x^4 = x^4, \overline{10}x^2 = \overline{3}x^2 \\
\hline
 & \overline{2}x^3 - \overline{2}x^2 + x + \overline{5} & \\
 & \overline{2}x^3 + \overline{6}x & \overline{9}x^3 = \overline{2}x^3 \\
\hline
 & -\overline{2}x^2 - \overline{5}x + \overline{5} & \\
 & -\overline{2}x^2 + \overline{1} & \overline{12}x^2 = -\overline{2}x^2, \overline{8} = \overline{1} \\
\hline
 & -\overline{5}x + 4 = \overline{2}x + \overline{4} &
\end{array}$$

Jadi, hasil baginya adalah $\boxed{\overline{5}x^3 + \overline{5}x^2 + \overline{3}x + \overline{4}}$ dan sisa baginya $\boxed{\overline{2}x + \overline{4}}$.

(b) Karena $\deg 5 \notin \{2, 3\}$, akan coba dipastikan menggunakan **Teorema 14**. (Ingat bahwa ini tidak menjamin apakah f akan tidak tereduksi, namun hanya menjamin tereduksi.) Perhatikan bahwa

$$f\left(\overline{1}\right) = \overline{1} + \overline{1} + \overline{5} + \overline{1} + \overline{1} + \overline{5} = \overline{14} = \overline{0}.$$

Karena $f\left(\overline{1}\right) = \overline{0}$, maka f tereduksi. Selain itu,

$$f\left(\overline{0}\right) = \overline{5}, \quad f\left(\overline{2}\right) = \overline{2}, \quad f\left(\overline{3}\right) = \overline{0}, \quad f\left(\overline{4}\right) = \overline{1}, \quad f\left(\overline{5}\right) = \overline{0}, \quad f\left(\overline{6}\right) = \overline{0}.$$

Dari **Akibat 12**, maka

$$f(x) = \left(x - \overline{1}\right)\left(x - \overline{3}\right)\left(x - \overline{5}\right)\left(x - \overline{6}\right) p(x)$$

untuk suatu $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. Tulis ulang

$$x^5 + x^4 + \overline{5}x^3 + x^2 + x + \overline{5} = \left(x^4 + 6x^3 + \overline{x} + \overline{6}\right) p(x).$$

Menggunakan pembagian bersusun, diperoleh

$$f(x) = \left(x^4 + 6x^3 + \overline{x} + \overline{6}\right)\left(x - \overline{5}\right) = \boxed{\left(x + \overline{6}\right)\left(x + \overline{4}\right)\left(x + \overline{2}\right)^2\left(x + \overline{1}\right)}.$$

Solusi Alternatif. Perhatikan bahwa

$$x^5+x^4+\overline{5}x^3+x^2+x+\overline{5}=x^3\left(x^2+x+\overline{5}\right)\left(x^2+x+\overline{5}\right)=\left(x^3+\overline{1}\right)\left(x^2+x+\overline{5}\right).$$

Menggunakan fakta $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$, maka

$$\begin{aligned}x^5+x^4+\overline{5}x^3+x^2+x+5&=\left(x+\overline{1}\right)\left(x^2-x+\overline{1}\right)\left(x^2+x+\overline{5}\right)\\&=\left(x+\overline{1}\right)\left(x^2+\overline{6}x+\overline{1}\right)\left(x^2+x+\overline{5}\right).\end{aligned}$$

Misalkan $Q(x):=x^2+x+\overline{5}$ dan $P(x):=x^2+\overline{6}x+\overline{1}$. Akan difaktorkan $P(x)$ dan $Q(x)$ (jika mungkin).

- Perhatikan bahwa $P\left(\overline{3}\right)=\overline{0}=P\left(\overline{5}\right)$. Dari **Akibat 12** berlaku $P(x)=\left(x-\overline{3}\right)\left(x-\overline{5}\right)h(x)$ di mana $h(x)\in\mathbb{F}[x]$. Karena $\deg P=2$ dan $\deg\left(x-\overline{3}\right)\left(x-\overline{5}\right)=2$, maka haruslah $\deg h=0$ yang berarti $h(x)=c\in\mathbb{Z}_7$. Dengan memerhatikan koefisien utamanya, maka $c=\overline{1}$. Jadi, $P(x)=\left(x-\overline{3}\right)\left(x-\overline{5}\right)=\left(x+\overline{4}\right)\left(x+\overline{2}\right)$.
- Perhatikan bahwa $Q\left(\overline{1}\right)=\overline{0}=Q\left(\overline{5}\right)$, dengan cara yang sama akan diperoleh $Q(x)=\left(x-\overline{1}\right)\left(x-\overline{5}\right)=\left(x+\overline{6}\right)\left(x+\overline{2}\right)$.

Jadi, $f(x)=\left(x+\overline{1}\right)P(x)Q(x)=\boxed{\left(x+\overline{6}\right)\left(x+\overline{4}\right)\left(x+\overline{2}\right)^2\left(x+\overline{1}\right)}$.

▼

Catatan. *Seandainya berlaku $f(x)\neq\overline{0}$ untuk setiap $x\in\mathbb{Z}_7$, hal ini* ***belum tentu*** *menyimpulkan $f(x)$ tak tereduksi. Ingat bahwa* ***Teorema 13*** *diperlukan syarat $\deg f\in\{2,3\}$. Jika $\deg f>3$ hal ini belum tentu berlaku. Perhatikan bahwa*

$$f(x)=x^4+1=\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)$$

polinomial yang tereduksi. Dapat diperiksa bahwa $f(x)\neq\overline{0}$ untuk setiap $x\in\mathbb{Z}_3[x]$ dan tentu salah bahwa dari hal ini kemudian menyatakan f tidak tereduksi.

Contoh 4

Tentukan faktor persekutuan dari $f(x)$ dan $g(x)$.

(a) $f(x) = x^3 + x^2 + \overline{2}x + \overline{2}$, $g(x) = x^4 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$.

(b) $f(x) = \overline{4}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{6}x^2 + \overline{4}x + \overline{5}, g(x) = \overline{3}x^3 + \overline{5}x^2 + \overline{6}x \in \mathbb{Z}_7[x]$.

Solusi.

(a) Dengan menerapkan algoritma euclid,

$$\begin{aligned} x^4 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1} &= \left(x^3 + x + \overline{2}x + \overline{2}\right)(x + \overline{2}) + \left(x^2 + x + \overline{2}\right) \\ x^3 + x^2 + \overline{2}x + 2 &= \left(x^2 + x + \overline{2}\right)x + \overline{2} \\ x^2 + x + \overline{2} &= \overline{2}\left(2x^2 + 2x + 1\right) + \overline{0}. \end{aligned}$$

Jadi, $\text{fpb}(f(x), g(x)) = \overline{2}^{-1} \cdot \overline{2} = \boxed{\overline{1}}$.

(b) Menerapkan algoritma euclid,

$$\begin{aligned} \overline{4}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{6}x^2 + \overline{4}x + \overline{5} &= \left(\overline{3}x^3 + \overline{5}x^2 + \overline{6}x\right)(\overline{6}x) + \left(\overline{5}x^2 + \overline{4}x + \overline{5}\right), \\ \overline{3}x^3 + \overline{5}x^2 + \overline{6}x &= \left(\overline{5}x^2 + \overline{4}x + \overline{5}\right)(\overline{2}x + \overline{5}) + (\overline{4}x + \overline{3}), \\ \overline{5}x^2 + \overline{4}x + \overline{5} &= (\overline{4}x + \overline{3})(\overline{3}x + \overline{4}) + \overline{0}. \end{aligned}$$

Jadi, $\text{fpb}(f(x), g(x)) = \overline{4}^{-1} \cdot (\overline{4}x + \overline{3}) = \overline{2}\,(\overline{4}x + \overline{3}) = \boxed{x + \overline{6}}$.

Contoh 5

Buktikan $p(x) = x^3 + x^2 + \overline{2}$ tak tereduksi atas $\mathbb{Z}_3[x]$ dan tereduksi atas $\mathbb{Z}_7[x]$.

Solusi. Akan dibuktikan $p(x)$ tereduksi atas $\mathbb{Z}_3[x]$, perhatikan bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan field (lihat **Modul 1 - Lemma 12**). Karena $\deg f = 3$, dalam hal ini akan dibuktikan dengan **Teorema 13** dengan menunjukkan tidak ada $x \in \mathbb{Z}_3$ yang memenuhi $f(x) = \overline{0}$. Perhatikan bahwa

$$p\left(\overline{0}\right) = \overline{2}, \quad p\left(\overline{1}\right) = \overline{1}, \quad p\left(\overline{2}\right) = \overline{2}.$$

Ini menunjukkan $p(x) \neq \overline{0}$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_3$ sehingga terbukti p tak tereduksi.
Akan dibuktikan $p(x)$ tereduksi atas $\mathbb{Z}_7[x]$. Perhatikan bahwa $f\left(\overline{2}\right) = \overline{0}$ sehingga terbukti bahwa p tereduksi atas $\mathbb{Z}_7[x]$. ▼

Contoh 6

(Eisenstein's). Misalkan p prima dan $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Diketahui $p \mid a_i$ untuk setiap $0 \leq i \leq n-1$, $p^2 \nmid a_0$, dan $p \nmid a_n$. Akan dibuktikan $f(x)$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.

(a) Asumsikan $f(x)$ tereduksi, misalkan

$$f(x) = \left(b_0 + b_1x + \cdots + b_ux^u\right)\left(c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k\right).$$

Buktikan bahwa p tidak mungkin membagi b_0 dan c_0 sekaligus.

(b) Buktikan p membagi salah satu dari b_0 dan c_0. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $p \nmid b_0$ dan $p \mid c_0$.

(c) Buktikan bahwa $p \nmid c_k$, kemudian misalkan t bilangan bulat tak negatif terkecil sedemikian sehingga $p \nmid c_t$ dan $p \mid c_j$ untuk setiap $0 \leq j < k$.

(d) Karena $a_t = b_tc_0 + b_{t-1}c_1 + \cdots + b_0c_t$, buktikan bahwa $p \mid b_0c_t$. Kontradiksi.

Solusi.

(a) Perhatikan bahwa $a_0 = b_0c_0$. Karena $p^2 \nmid a_0$, maka tidak mungkin p membagi b_0 dan c_0 sekaligus.

(b) Karena $p \mid a_0$, maka $p \mid a_0b_0$. Berdasarkan sifat bilangan prima, maka $p \mid a_0$ atau $p \mid b_0$, namun p tidak membagi keduanya.

(c) Perhatikan bahwa $a_n = b_uc_k$. Karena $p \nmid a_n$, ini berarti $p \nmid b_u$ dan $p \nmid c_k$.

(d) Tinjau $p \mid a_t$. Karena $p \mid c_0, c_1, \cdots, c_{t-1}$, maka

$$p \mid b_tc_0 + b_{t-1}c_1 + \cdots + b_1c_{t-1}.$$

Mengingat $p \mid a_t = b_tc_0 + \cdots + b_0c_t$, ini berarti haruslah $p \mid b_0c_t$. Namun, $p \nmid b_0$ sehingga haruslah $p \mid c_t$, kontradiksi.

▼

Contoh 7

Gunakan Eisenstein untuk membuktikan polinomial berikut tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.

1. $x^3 + 6x^2 + 3x + 3$.
2. $x^5 - 5x^3 + 15$.

Solusi.

1. Pilih $p = 3$ dan tulis $x^3 + 6x^2 + 3x + 3 = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dengna $a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 3, a_0 = 3$. Dapat diverivikasi bahwa $3 \mid a_0, a_1, a_2$, $3^2 \nmid a_0$, dan $3 \nmid a_n$. Menurut Contoh 6, $x^3 + 6x^2 + 3x + 3$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.

2. Pilih $p = 5$ dan tulis

$$x^5-5x^3+15 = a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0, \quad a_5 = 1, a_4 = 0, a_3 = -5, a_2 = 0, a_1 = 0, a_0 = 15.$$

Dapat diverivikasi bahwa $5 \mid a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$, $5^2 \nmid a_0$, dan $5 \nmid a_5$ sehingga menurut Contoh 6, $x^5 - 5x^3 + 15$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.

▼

Contoh 8

Jika p prima, buktikan bahwa

$$f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.

Solusi. Perhatikan bahwa $f(x)$ tak tereduksi jika dan hanya jika $f(x+1)$ tak tereduksi (buktikan!). Tinjau

$$f(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = \frac{1}{x}\left[\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k} 1^k - 1\right] = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} x^{p-k-1}.$$

Tulis ulang

$$f(x+1) = x^{p-1} + \binom{p}{1} x^{p-2} + \binom{p}{2} x^{p-3} + \cdots + \binom{p}{p-1}.$$

Perhatikan bahwa $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p}{k} \cdot \frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$. Karena untuk setiap $1 \le k \le p-1$ berlaku $\text{fpb}(p,k) = 1$, maka $p \mid \binom{p}{k}$. Tinjau $\binom{p}{p-1} = p$. Dari sini diperoleh bahwa p membagi koefisien $x^0, x^1, \cdots, x^{p-2}$, p tidak membagi koefisien x^{p-1}, dan p^2 tidak membagi koefisien x^0. Dari contoh 6, $f(x+1)$ tak tereduksi sehingga $f(x)$ juga tak tereduksi. ▼