Ring Polinomial

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Definisi

Pada bangku sekolah telah dipelajari tentang polinomial, yaitu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

dengan $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ sebagai polinomial berderajat n. Ring polinomial hanya memiliki sedikit perbedaan, yaitu koefisien berupa elemen ring. Konsep yang digunakan secara analog dengan konsep polinomial yang telah dikenal.

Definisi 1 (Ring Polinomial)**.** Misalkan R merupakan ring. Ring polinomial dengan variabel x memiliki bentuk umum

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dengan $a_0, a_1, \cdots, a_n \in R$. Jika $a_n \neq 0_R$, $P(x)$ disebut polinomial **berderajat** n (dinotasikan $\deg P = n$) dan a_n disebut koefisien utama. Himpunan semua polinomial dengan koefisien elemen R dinyatakan sebagai $R[x]$.

Definisi 2 (Polinomial Monik)**.** Jika R ring dengan satuan 1_R, polinom $P(x) \in R[x]$ disebut **polinomial monik** jika koefisien utamanya sama dengan 1_R.

Definisi 3 (Kesamaan Dua Polinomial)**.** Diberikan ring R dan $f(x), g(x) \in R[x]$, dengan

$$\begin{aligned} f(x) &:= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \\ g(x) &:= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m. \end{aligned}$$

Polinomial $f(x)$ dan $g(x)$ dikatakan **sama** apabila $m = n$ dan $a_i = b_i$ untuk setiap i.

Definisi 4 (Penjumlahan dan Perkalian Polinomial)**.** Misalkan R merupakan ring dan $f(x), g(x) \in R[x]$ dengan

$$\begin{aligned} f(x) &:= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \\ g(x) &:= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m. \end{aligned}$$

Didefinisikan:

1. Penjumlahan dua polinomial sebagai

$$f(x) + g(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_k + b_k)x^k$$

   di mana $k := \max\{m, n\}$.

2. Perkalian dua polinomial sebagai

$$f(x)g(x) := c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{m+n}x^{m+n}$$

dengan $c_k = a_kb_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_1b_{k-1} + a_0b_k$.

Definisi 5 (Pembagi, Kelipatan)**.** Misalkan $\mathbb{F}$ merupakan field dan $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. Polinom $f(x)$ **membagi** $g(x)$, dinotaiskan $f(x) \mid g(x)$, jika terdapat $0_F \neq h(x) \in \mathbb{F}[x]$ sehingga $g(x) = f(x)h(x)$. Selain itu, $g(x)$ merupakan **kelipatan** dari $f(x)$ dan $f(x)$ disebut **pembagi/faktor** dari $g(x)$. Notasi $f(x) \nmid g(x)$ menyatakan $f(x)$ tidak membagi $g(x)$.

Definisi 6. Misalkan $\mathbb{F}$ field dan $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Jika $k \in \mathbb{F}$ memenuhi $f(k) = 0_{\mathbb{F}}$, maka k disebut **akar** dari $f(x)$.

Definisi 7 (Tak Tereduksi)**.** Misalkan $\mathbb{F}$ merupakan field dan $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ berderajat positif. Polinomial $f(x)$ dikatakan **tak tereduksi** jika $f(x)$ tidak dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = g(x)h(x), \quad g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x], \quad \deg g, \deg h \geq 1.$$

Jika tidak demikian, $f(x)$ disebut **tereduksi**.

Definisi 8 (FPB)**.** Misalkan $\mathbb{F}$ merupakan field dan $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. Faktor persekutuan terbesar dari $f(x)$ dan $g(x)$, dinotasikan $\text{fpb}(f(x), g(x))$, yaitu polinomial monik $h(x)$ dengan derajat terbesar sedemikian sehingga $h(x) \mid f(x)$ dan $h(x) \mid g(x)$.

Sifat-Sifat

Teorema 9: $R[x]$ adalah ring

Misalkan R merupakan ring, maka $R[x]$ juga merupakan ring.

Teorema 10: Euclid

Diberikan $\mathbb{F}$ merupakan field dan $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. Maka terdapat tepat satu $h(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ sedemikian sehingga

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x), \quad \deg r < \deg g.$$

Dalam hal ini, $h(x)$ menyatakan **hasil bagi** dan $r(x)$ menyatakan **sisa bagi** polinom $f(x)$ terhadap $g(x)$.

Bukti. Bukti terlalu ugal-ugalan, skip dulu. □

Telah dibahas mengenai faktor polinom di **Definisi 5**. Layaknya pada bilangan, pada polinom juga dikenalkan faktor persekutuan terbesar. Dalam menentukan faktor persekutuan terbesar menggunakan **Algoritma Euclid** sebagai berikut.

Diberikan $\mathbb{F}$ merupakan field dan $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. Akan ditentukan fpb$(f, g)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x)h_1(x) + r_1(x), \\
g(x) &= r_1(x)h_2(x) + r_2(x), \\
r_1(x) &= r_2(x)h_3(x) + r_3(x), \\
&\vdots \\
r_{n-1}(x) &= r_{n-1}h_n(x) + r_n(x) \\
h_n(x) &= r_n h_{n+1}(x) + 0_{\mathbb{F}}.
\end{aligned}$$

Di atas, $h_i(x)$ menyatakan hasil bagi dan $r_i(x)$ menyatakan sisa bagi. Jika koefisien utama dari $r_n(x)$ adalah a, maka

$$\text{fpb}\Big(f(x), g(x)\Big) = a^{-1}r_n(x).$$

Teorema 11: Teorema Faktor

Diberikan field $\mathbb{F}$ dan $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ serta $p \in \mathbb{F}$. Maka $f(p) = 0_{\mathbb{F}}$ jika dan hanya jika terdapat $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ yang memenuhi $f(x) = (x - p)h(x)$.

Bukti.
($\Leftarrow$) Jika $f(x) = (x - p)h(x)$, perhatikan bahwa

$$f(p) = (p - p)h(p) = 0_{\mathbb{F}}h(p) = 0_{\mathbb{F}}$$

seperti yang ingin dibuktikan.
($\Rightarrow$) Jika $f(p) = 0_{\mathbb{F}}$. Dari **Teorema 9**, terdapat $h(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ yang memenuhi

$$f(x) = (x - p)h(x) + r(x), \quad \deg r < \deg(x - p) = 1.$$

Karena $\deg r < 1$, maka $\deg r = 0$ hanya satu-satunya kemungkinan. Dengan kata lain, $r(x) = a$ untuk suatu $a \in \mathbb{F}$. Tulis kembali

$$f(x) = (x - p)h(x) + a.$$

Karena $f(p) = 0_{\mathbb{F}}$, maka

$$0_{\mathbb{F}} = f(p) = (p - p)h(p) + a = 0_{\mathbb{F}}h(p) + a = 0_{\mathbb{F}} + a = a \implies a = 0_{\mathbb{F}}.$$

Jadi, $f(x) = (x - p)h(x)$ seperti yang ingin dibuktikan. $\square$

Akibat 12

Diberikan field $\mathbb{F}$ dan $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ serta $p_1, p_2, \cdots, p_n \in \mathbb{F}$ yang berbeda. Maka $f(p_1) = f(p_2) = \cdots = f(p_n) = 0_{\mathbb{F}}$ jika dan hanya jika terdapat $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ yang memenuhi

$$f(x) = (x - p_1)(x - p_2)\cdots(x - p_n)h(x).$$

Teorema 13

Diberikan field $\mathbb{F}$ dan $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ dengan $\deg f \in \{2,3\}$. Maka f tereduksi jika dan hanya jika terdapat $p \in \mathbb{F}$ yang memenuhi $f(p) = 0_{\mathbb{F}}$.

Bukti.
($\Rightarrow$) Jika f tereduksi, maka terdapat $g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$ yang memenuhi $f(x) = g(x)h(x)$ dengan $\deg g, \deg h \geq 1$. Akan dibuktikan bahwa terdapat $p \in \mathbb{F}$ yang memenuhi $f(p) = 0_{\mathbb{F}}$.
Jika $\deg f = 2$, maka hanya terpenuhi $\deg g = \deg h = 1$. Misalkan $g(x) = ax + b$ dan $h(x) = cx + d$ di mana $a, b, c, d \in \mathbb{F}$, tulis $f(x) = (ax+b)(cx+d)$. Pilih $p = -a^{-1}b$, maka $ax + b = (-b) + b = 0_{\mathbb{F}}$ sehingga $f(p) = 0_{\mathbb{F}}(cx+d) = 0_{\mathbb{F}}$.
Jika $\deg f = 3$, maka hanya terpenuhi $(\deg g, \deg h) = (2,1), (1,2)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\deg g = 2$ dan $\deg h = 1$, misalkan $g(x) = ax^2 + bx + c$ dan $h(x) = dx + e$ di mana $a, b, c, d, e \in \mathbb{F}$. Tulis juga $f(x) = (ax^2 + bx + c)(dx + e)$. Pilih $p = -d^{-1}e$, perhatikan bahwa $h(p) = dp + e = -e + e = 0_{\mathbb{F}}$ sehingga $f(p) = (ap^2 + bp + c)\, 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$.
($\Leftarrow$) Jika terdapat $p \in \mathbb{F}$ yang memenuhi $f(p) = 0_{\mathbb{F}}$. Dari **Teorema 10**, terdapat $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ yang memenuhi $f(x) = (x-p)h(x)$. Karena $\deg f \in \{2,3\}$ dan $\deg(x-p) = 1$, maka $\deg h(x) \in \{1,2\}$. Oleh karena itu, f tereduksi. □

Catatan. *Apabila* $\deg f \geq 4$, *teorema di atas belum tentu berlaku. Sebagai contoh,* $f(x) := x^4 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_5[x]$. *Perhatikan bahwa*

$$f\left(\overline{0}\right) = \overline{1}, \quad f\left(\overline{1}\right) = \overline{2}, \quad f\left(\overline{2}\right) = \overline{2}, \quad f\left(\overline{3}\right) = \overline{2}, \quad f\left(\overline{4}\right) = \overline{2}.$$

Ini menunjukkan bahwa f *tidak memiliki akar di* $\mathbb{Z}_5$*, yaitu tidak ada* $p \in \mathbb{Z}_5$ *yang memenuhi* $f(p) = \overline{0}$*. Namun,* f *tereduksi karena*

$$f(x) = x^4 + \overline{1} = x^4 - \overline{4} = \left(x^2 - \overline{2}\right)\left(x^2 + \overline{2}\right).$$

Karena $\deg\left(x^2 - \overline{2}\right) = 2 > 0$ *dan* $\deg\left(x^2 + \overline{2}\right) = 2 > 0$*, ini menunjukkan* f *tereduksi. Namun,* $\deg f \geq 4$ *hanya dapat berlaku satu arah saja.*

Teorema 14

Diberikan field $\mathbb{F}$ dan $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Jika terdapat $p \in \mathbb{F}$ yang memenuhi $f(p) = 0_{\mathbb{F}}$, maka f tereduksi.

Catatan Penting!

Perhatikan bahwa pada **Teorema 9** hingga **Teorema 13** selalu melibatkan field $\mathbb{F}$, bukan ring R secara umum. Sifat field menjamin berlakunya semua teorema dan akibat yang telah dijelaskan. Polinom linier dalam $\mathbb{F}[x]$ selalu dikategorikan sebagai polinomial tak tereduksi (*irreducible*). Namun, hal ini tidak berlaku pada ring secara umum. Sebagai contoh, $\mathbb{Z}_4$ merupakan ring namun bukan field (perhatikan bahwa $\overline{2} \in \mathbb{Z}_4$ bukan elemen unit). Polinom linier $x \in \mathbb{Z}_4[x]$ tereduksi karena

$$(4x+3)(3x+4) = \overline{12}x^2 + \overline{25}x + \overline{12} = \overline{0} + \overline{1}x + \overline{0} = x.$$

Jelas hal ini bertentangan dengan fakta bahwa polinom linier tak tereduksi. Oleh karena itu, semua pembahasan tentang keterbagian, hasil bagi, sisa bagi, dan faktorisasi polinomial seringkali dibatasi dalam field $\mathbb{F}$. Namun, sayangnya pada UTS tahun lalu terdapat beberapa soal cacat, seperti UTS 2023 nomor 3(i).

Pengayaan (tambahan)

Bagian ini tidak wajib dipelajari, hanya untuk mempelajari sifat-sifat polinomial lebih lanjut.

Teorema 15: Bezout

Misalkan $\mathbb{F}$ merupakan field dan $p(x), q(x) \in \mathbb{F}[x]$ yang memenuhi $\text{fpb}(p(x), q(x)) = d(x)$. Terdapat $a(x), b(x) \in \mathbb{F}[x]$ yang memenuhi

$$d(x) = a(x)p(x) + b(x)q(x).$$

Teorema 16

Misalkan $\mathbb{F}$ field dan $a(x), p(x) \in \mathbb{F}[x]$ dengan $p(x)$ tak tereduksi. Jika $p(x) \nmid a(x)$, maka $\text{fpb}(a(x), p(x)) = 1_{\mathbb{F}}$.

Bukti. Misalkan $\text{fpb}(a(x), p(x)) = d(x)$ di mana $d(x) \in \mathbb{F}[x]$ polinomial monik. Ini berarti $d(x) \mid p(x)$ sehingga $p(x) = d(x)b(x)$ untuk suatu $b(x) \in \mathbb{F}[x]$. Mengingat $p(x)$ irreducible, ini berarti $\deg d(x) = 0$ atau $\deg b(x) = 0$. Jika $\deg b(x) = 0$, maka haruslah $a(x) = p(x)$ yang mana kontradiksi karena $p(x) \nmid a(x)$. Jadi, haruslah $\deg d(x) = 0 \implies d(x) = 1_{\mathbb{F}}$ seperti yang ingin dibuktikan. □

Teorema 17

Misalkan $\mathbb{F}$ field dan $a(x), b(x), p(x) \in \mathbb{F}[x]$ dengan $p(x)$ tak tereduksi. Jika $p(x) \mid a(x)b(x)$, maka $p(x) \mid a(x)$ dan $p(x) \mid b(x)$.

Bukti. Jika $p(x) \mid a(x)$ maka selesai. Jika $p(x) \nmid a(x)$, berdasarkan **Teorema 16** berlaku $\text{fpb}(p(x), a(x)) = 1_{\mathbb{F}}$. Menurut **Teorema 15** terdapat $m(x), n(x) \in \mathbb{F}[x]$ yang memenuhi

$$1_{\mathbb{F}} = p(x)m(x) + a(x)n(x).$$

Kalikan kedua ruas dengan $b(x)$,

$$b(x) = p(x)m(x)b(x) + a(x)b(x)n(x).$$

Karena $p(x) \mid a(x)b(x)$ dan $p(x) \mid p(x)m(x)b(x)$, maka

$$p(x) \mid p(x)m(x)b(x) + a(x)b(x)n(x) \implies p(x) \mid b(x)$$

seperti yang ingin dibuktikan. □

Berdasarkan **Teorema 16** dan **Teorema 17**, polinomial tak tereduksi disebut pula sebagai **elemen prima** di $\mathbb{F}[x]$. Definisi elemen prima pada ring akan dibahas di materi yang akan datang.

Soal

1. Diberikan polinomial $f(x) = x^3 + x + \overline{1}$ dan $g(x) = x + \overline{1}$ merupakan polinomial di $\mathbb{Z}_2[x]$.

   (a) Tentukan hasil bagi dan sisa bagi $f(x)$ jika dibagi $g(x)$.

   (b) Tentukan faktor persekutuan terbesar dari $f(x)$ dengan $g(x)$.

   (c) Apakah f tereduksi?

2. (Modifikasi UTS 2023). Diketahui $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ dan $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ merupakan field.

   (a) Tentukan semua nilai $c \in \mathbb{Z}_3$ agar $f(x) = x^3 + cx + \overline{2} \in \mathbb{Z}_3[x]$ tak tereduksi.

   (b) Tentukan hasil bagi dan sisa dari $g(x) := \overline{4}x^6 - \overline{2}x^4 + \overline{3}x^2 - x - \overline{4} \in \mathbb{Z}_5[x]$ dibagi oleh $h(x) := \overline{3}x^2 - \overline{4}x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

   (c) Dari (b), tentukan $\text{fpb}(g(x), h(x))$.

3. (UTS 2021). Misalkan $f(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ dengan $f(x) := x^5 + x^4 + \overline{5}x^3 + x^2 + x + \overline{5}$.

   (a) Tentukan hasil dan sisa dari $f(x)$ saat dibagi oleh $g(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ dengan $g(x) := \overline{3}x^2 + \overline{2}$.

   (b) Faktorkan polinom $f(x)$.

4. Tentukan faktor persekutuan dari $f(x)$ dan $g(x)$.

   (a) $f(x) = x^3 + x^2 + \overline{2}x + \overline{2}$, $g(x) = x^4 + \overline{2}x^2 + x + \overline{1} \in \mathbb{Z}_3[x]$.

   (b) $f(x) = \overline{4}x^4 + \overline{2}x^3 + \overline{6}x^2 + \overline{4}x + \overline{5}, g(x) = \overline{3}x^3 + \overline{5}x^2 + \overline{6}x \in \mathbb{Z}_7[x]$.

5. Buktikan $p(x) = x^3 + x^2 + \overline{2}$ tak tereduksi atas $\mathbb{Z}_3[x]$ dan tereduksi atas $\mathbb{Z}_7[x]$.

Soal Pengayaan

6. (Eisenstein's). Misalkan p prima dan $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Diketahui $p \mid a_i$ untuk setiap $0 \leq i \leq n-1$, $p^2 \nmid a_0$, dan $p \nmid a_n$. Akan dibuktikan $f(x)$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.

   (a) Asumsikan $f(x)$ tereduksi, misalkan
   $$f(x) = (b_0 + b_1x + \cdots + b_ux^u)\left(c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k\right).$$
   Buktikan bahwa p tidak mungkin membagi b_0 dan c_0 sekaligus.

   (b) Buktikan p membagi salah satu dari b_0 dan c_0. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $p \nmid b_0$ dan $p \mid c_0$.

   (c) Buktikan bahwa $p \nmid c_k$, kemudian misalkan t bilangan bulat tak negatif terkecil sedemikian sehingga $p \nmid c_t$ dan $p \mid c_j$ untuk setiap $0 \leq j < k$.

   (d) Karena $a_t = b_tc_0 + b_{t-1}c_1 + \cdots + b_0c_t$, buktikan bahwa $p \mid b_0c_t$. Kontradiksi.

7. Gunakan Eisenstein untuk membuktikan polinomial berikut tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.

(a) $x^3 + 6x^2 + 3x + 3$.

(b) $x^5 - 5x^3 + 15$.

8. Jika p prima, buktikan bahwa

$$f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.