Karakteristik Ring, Subring dan Ideal

Nayaka Reswara Nararya Hidayat

Nazra Arta Mevia Agustian

Wildan Bagus Wicaksono

Contoh 1

Diberikan $A := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$. Definisikan $\mathcal{M})_2(\mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks ordo 2×2 dengan entri-entri bilangan real. Dibentuk ring $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ di mana $+$ dan $\cdot$ merupakan operasi perkalian matriks.

(a) Buktikan bahwa A subring $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Periksa apakah A ideal $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solusi. Perhatikan bahwa $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ sehingga A tak kosong.

(a) Akan dibuktikan A subring $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ambil sebarang $P = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ di mana $x, y \in \mathbb{R}$.

- Akan dibuktikan $P - Q \in A$. Perhatikan bahwa

$$P - Q = P + (-Q) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$$

  karena $x - y \in \mathbb{R}$.

- Akan dibuktikan $PQ \in A$. Perhatikan bahwa

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$$

  karena $xy \in \mathbb{R}$.

Terbukti bahwa A subring $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Pilih $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$ dan $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Maka

$$PX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A.$$

Oleh karena itu, A $\boxed{\text{bukan ideal}}$ di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

▼

Contoh 2

Diberikan ring $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right],+,\cdot\right)$ di mana $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]=\left\{a+b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Z}\right\}$. Buktikan bahwa

$$3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]=\left\{3a+3b\sqrt{3}:a,b\in\mathbb{Z}\right\}$$

merupakan ideal dari $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

Solusi. Perhatikan bahwa $0=3(0)+3(0)\sqrt{3}\in 3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ sehingga $3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ tak kosong. Akan dibuktikan bahwa $3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\subseteq\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Ambil sebarang $3x+3y\sqrt{3}\in 3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ di mana $x,y\in\mathbb{Z}$. Karena $3x,3y\in\mathbb{Z}$, maka $3x+3y\sqrt{3}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Ini menunjukkan $3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]\subseteq\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.
Akan dibuktikan bahwa $3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ ideal $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Ambil sebarang $P=3a+3b\sqrt{3},Q=3x+3y\sqrt{3}\in 3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ di mana $a,b,x,y\in\mathbb{Z}$. Ambil sebarang pula $X=r+s\sqrt{3}\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ di mana $r,s\in\mathbb{Z}$.

- Akan dibuktikan $P-Q\in 3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Tinjau

  $$P-Q=\left(3a+3b\sqrt{3}\right)+\left(-3x-3y\sqrt{3}\right)=3(a-x)+3(b-y)\sqrt{3}\in 3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$$

  karena $a-x,b-y\in\mathbb{Z}$. Terbukti bahwa $P-Q\in 3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

- Akan dibuktikan $PX,XP\in 3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. Tinjau

  $$XP=PX=\left(3a+3b\sqrt{3}\right)\left(r+s\sqrt{3}\right)=3(ar+3bs)+3(as+br)\sqrt{3}\in 3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$$

  karena $ar+3bs,as+br\in\mathbb{Z}$. Terbukti bahwa $PX,XP\in 3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

Jadi, terbukti bahwa $3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ merupakan ideal dari $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$. ▼

Contoh 3

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$ dan ring $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$. Dibentuk ring $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}, \bigoplus, \bigotimes)$ dengan

$$(a, b) \bigoplus (c, d) = (a +_4 c, b +_{12} d), \quad (a, b) \bigotimes (c, d) = (a \cdot_4 c, b \cdot_{12} d)$$

untuk setiap $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$.

(a) Tentukan order dari $(\overline{3}, \overline{4}) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$.

(b) Tentukan $char(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12})$.

Solusi.

(a) Akan digunakan **Lemma 15**. Dalam $\mathbb{Z}_4$, $o\left(\overline{3}\right) = 4$ karena

$$1 \cdot \overline{3} = \overline{3}, \quad 2 \cdot \overline{3} = \overline{2}, \quad 3 \cdot \overline{3} = \overline{1}, \quad 4 \cdot \overline{3} = \overline{0}.$$

Dalam $\mathbb{Z}_{12}$, $o\left(\overline{4}\right) = 3$ karena

$$1 \cdot \overline{4} = \overline{4}, \quad 2 \cdot \overline{4} = \overline{8}, \quad 3 \cdot \overline{4} = \overline{0}.$$

Jadi, $o\left(\overline{3}, \overline{4}\right) = \text{kpk}(4, 3) = \boxed{12}$.

(b) Perhatikan bahwa $\left(\overline{1}, \overline{1}\right)$ elemen satuan di $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$. Dalam $\mathbb{Z}_4$, perhatikan bahwa $o\left(\overline{1}\right) = 4$. Dalam $\mathbb{Z}_{12}$, perhatikan bahwa $o\left(\overline{12}\right) = 12$. Dari sini diperoleh $o\left(\overline{1}, \overline{1}\right) = \text{kpk}(4, 12) = 12$. Dari **Teorema 10**, $char(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}) = \boxed{12}$.

▼

Contoh 4

Diberikan $S = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\} \subseteq \mathbb{Z}_8$ dan $T = \{\overline{0}, \overline{3}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$. Dibentuk ring $(S \times T, +, \cdot)$ dengan

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b)(c, d) = (ac, bd).$$

Tentukan semua ideal di $S \times T$.

Solusi. Semua ideal di S adalah $\langle\overline{0}\rangle = \{\overline{0}\}$, $\langle\overline{2}\rangle = \langle\overline{6}\rangle = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$, dan $\langle\overline{4}\rangle = \{\overline{0}, \overline{4}\}$. Semua ideal di T adalah $\langle\overline{0}\rangle = \{\overline{0}\}$ dan $\langle\overline{3}\rangle = \{\overline{0}, \overline{3}\}$. Maka **sebagian** ideal di $S \times T$ adalah

$$\begin{aligned}
\{\overline{0}\} \times \{\overline{0}\} &= \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right)\right\}, \\
\{\overline{0}\} \times \{\overline{0}, \overline{3}\} &= \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{0}, \overline{3}\right)\right\} \\
\{\overline{0}, \overline{4}\} \times \{\overline{0}\} &= \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{4}, \overline{0}\right)\right\} \\
\{\overline{0}, \overline{4}\} \times \{\overline{0}, \overline{3}\} &= \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{0}, \overline{3}\right), \left(\overline{4}, \overline{0}\right), \left(\overline{4}, \overline{3}\right)\right\} \\
\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\} \times \{\overline{0}\} &= \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{2}, \overline{0}\right), \left(\overline{4}, \overline{0}\right), \left(\overline{6}, \overline{0}\right)\right\} \\
\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\} \times \{\overline{0}, \overline{3}\} &= \left\{\left(\overline{0}, \overline{0}\right), \left(\overline{2}, \overline{0}\right), \left(\overline{4}, \overline{0}\right), \left(\overline{6}, \overline{0}\right), \left(\overline{0}, \overline{3}\right), \left(\overline{2}, \overline{3}\right), \left(\overline{4}, \overline{3}\right), \left(\overline{6}, \overline{3}\right)\right\}
\end{aligned}$$

▼

Catatan. *Ada hal yang masih menjadi perdebatan dengan beberapa dosen: Semua ideal (atau subring) di $S \times T$ diperoleh dengan $I \times J$ dengan I ideal (atau subring) S dan J ideal (atau subring) T. Namun, ini **tidak sepenuhnya benar**. Kondisi tersebut berlaku jika S dan T masing-masing memiliki elemen satuan. Namun, dalam soal di atas T memiliki elemen satuan $\overline{3}$ dan S tidak memiliki elemen satuan (lihat **Lemma 16** dan **Lemma 17**). Sampai saat ini masih banyak dosen yang menganggap fakta yang disebutkan di awal benar. Dapat diperiksa bahwa semua subring di S dan T seperti yang disebutkan di pembahasan di atas, namun*

$$\{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{3}), (\overline{4}, \overline{0}), (\overline{6}, \overline{3})\}$$

*juga termasuk subring di $S \times T$ yang belum terdaftar. Tentu saja, sangat sulit untuk menentukan semua subring tanpa ketentuan sebagaimana **Lemma 16** dan **Lemma 17**. Sejauh ini belum mendapatkan kejelasan lebih lanjut dari hasil diskusi tersebut.*

Contoh 5

Misalkan R ring. Jika P dan Q masing-masing ideal di R, buktikan bahwa $P + Q = \{p + q : p \in P, q \in Q\}$ ideal di R.

Solusi. Akan dibuktikan $(P+Q) \subseteq R$. Ambil sebarang $p+q \in P+Q$ di mana $p \in P$ dan $q \in Q$. Karena P, Q ideal dari R, jelas $P, Q \subseteq R$ sehingga $p, q \in R$. Karena R ring, maka $p + q \in R$. Ini menunjukkan $P + Q \subseteq R$.

Akan dibuktikan $P + Q$ ideal di R. Ambil sebarang $(p + q), (x + y) \in (P + Q)$ dan $r \in R$ di mana $p, x \in P$ dan $q, y \in Q$.

- Akan dibuktikan $(p+q)-(x+y) \in (P+Q)$. Tinjau bahwa $(p+q)-(x+y) = (p-x)+(q-y)$. Karena P dan Q ideal, maka $p-x \in P$ dan $q-y \in Q$. Ini menunjukkan $(p+q)-(x+y) = (p-x)+(q-y) \in P+Q$.

- Akan dibuktikan bahwa $(p+q)r, r(p+q) \in (P+Q)$. Perhatikan bahwa $(p+q)r = pr+qr$ dan $r(p+q) = rp+rq$. Karena P, Q ideal, maka $pr, rp \in P$ dan $qr, rq \in Q$ sehingga $(p+q)r = pr+qr \in P+Q$ dan $r(p+q) = rp+rq \in P+Q$.

Terbukti bahwa $P + Q$ ideal di R. ▼

Contoh 6: UTS 2019

Diketahui $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ merupakan ring.

(a) Tentukan semua ideal berode 4 dan jelaskan.

(b) Tentukan pembangun dari soal (a) dan jelaskan.

Solusi. Semua ideal dari $\mathbb{Z}_4$ adalah $\langle \overline{0} \rangle = \{\overline{0}\}$, $\langle \overline{1} \rangle = \langle \overline{3} \rangle = \mathbb{Z}_4$, dan $\langle \overline{2} \rangle = \{\overline{0}, \overline{2}\}$. Sedangkan, semua ideal di $\mathbb{Z}_2$ adalah $\langle \overline{0} \rangle = \{\overline{0}\}$ dan $\langle \overline{1} \rangle = \mathbb{Z}_2$.

(a) Semua ideal di $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ adalah

$$\begin{aligned}
\{\overline{0}\} \times \{\overline{0}\} &= \{(\overline{0}, \overline{0})\} \\
\{\overline{0}\} \times \mathbb{Z}_2 &= \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1})\} \\
\{\overline{0}, \overline{2}\} \times \{\overline{0}\} &= \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{0})\} \\
\{\overline{0}, \overline{2}\} \times \mathbb{Z}_2 &= \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{1})\} \\
\mathbb{Z}_4 \times \{\overline{0}\} &= \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{0}), (\overline{3}, \overline{0})\} \\
\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 &= \{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{0}), (\overline{3}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{1}), (\overline{3}, \overline{1})\}.
\end{aligned}$$

Jadi, semua ideal berode 4 di $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ adalah $\boxed{\{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{4}, \overline{0}), (\overline{4}, \overline{1})\}}$ dan $\boxed{\{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{0}), (\overline{3}, \overline{0})\}}$.

(b) Perhatikan bahwa $\langle \overline{2} \rangle = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ dan $\mathbb{Z}_2 = \langle \overline{1} \rangle$. Jadi, $\boxed{(\overline{2}, \overline{1})}$ pembangun $\{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{1})\}$. Perhatikan bahwa $\langle \overline{1} \rangle = \langle \overline{3} \rangle = \mathbb{Z}_4$ dan $\langle \overline{0} \rangle = \{\overline{0}\}$. Jadi, $\boxed{(\overline{1}, \overline{0}), (\overline{3}, \overline{0})}$ pembangun $\{(\overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0}), (\overline{2}, \overline{0}), (\overline{3}, \overline{0})\}$. Bisa disimpulkan bahwa kedua himpunan tersebut ideal pokok.

▼

Contoh 7: UTS 2022

Diketahui ring $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ dengan operasi penjumlahan $+$ dan perkalian $\times$ sebagai berikut:

$$(a, b, c) + (x, y, z) = (a + x, b + y, c + z), \quad (a, b, c) \times (x, y, z) = (ax, by, cz).$$

Diberikan $S = \{(a, b, c) : c = a + b; a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Selidiki apakah S merupakan subring dan ideal dari M.

Solusi. Akan dibuktikan bahwa S bukan subring dari M, otomatis juga sekaligus bukan ideal dari M. Pilih $(1, 2, 3), (2, 3, 4) \in S$. Perhatikan bahwa

$$(1, 2, 3)(2, 3, 4) = (1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4) = (2, 6, 12).$$

Karena $12 \neq 2+6$, maka $(1, 2, 3)(2, 3, 4) = (2, 6, 12) \notin S$. Jadi, S $\boxed{\text{bukan subring dan bukan ideal}}$ dari M. ▼

Contoh 8: UTS 2021

Diberikan ring $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$.

(a) Misalkan $H \subseteq \mathbb{Z}_{21}$ di mana $H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\}$. Buktikan bahwa H subring dari $\mathbb{Z}_{21}$.

(b) Periksa apakah H memiliki elemen satuan.

(c) Tentukan $char(H)$.

Solusi. Perhatikan bahwa $H \subseteq \mathbb{Z}_{21}$.

(a) Perhatikan tabel Cayley berikut.

$+$	0	3	6	9	12	15	18
0	0	3	6	9	12	15	18
3	3	6	9	12	15	18	0
6	6	9	12	15	18	0	3
9	9	12	15	18	0	3	6
12	12	15	18	0	3	6	9
15	15	18	0	3	6	9	12
18	18	0	3	6	9	12	15

$\cdot$	0	3	6	9	12	15	18
0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	9	18	12	15	9	0
6	0	18	15	0	9	18	15
9	0	12	0	9	18	6	12
12	0	15	9	18	12	0	9
15	0	9	18	6	0	15	18
18	0	0	15	12	9	18	0

Dari tabel telah dibuktikan untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $ab \in H$. Dengan meninjau $-\overline{0} = \overline{}, -\overline{3} = \overline{15}, -\overline{6} = \overline{9}, -\overline{9} = \overline{12}, -\overline{12} = \overline{9}, -\overline{15} = \overline{6}$, dan $-\overline{18} = \overline{3}$. Dengan meninjau bahwa untuk setiap $x \in H$ berlaku $-x \in H$, kemudian dari tabel ini membuktikan bahwa $a - b \in H$ pula.

(b) Perhatikan setiap baris/kolom pada tabel Cayley terhadap $\cdot$. Karena $\overline{3} \cdot \overline{3} \neq \overline{3}$, maka $\overline{3}$ bukan elemen satuan. Karena $\overline{3} \cdot \overline{6} \neq 3$, maka $\overline{6}$ juga bukan elemen satuan, demikian seterusnya. Jadi, $\boxed{\text{tidak ada}}$ elemen satuan.

(c) Perhatikan bahwa $o\left(\overline{0}\right) = 1$, $o\left(\overline{3}\right) = 7$, $o\left(\overline{6}\right) = 7$, $o\left(\overline{9}\right) = 7$, $o\left(\overline{12}\right) = 7$, $o\left(\overline{15}\right) = 7$, $o\left(\overline{18}\right) = 7$. Jadi,

$$char(H) = \text{kpk}\left(1, 7, 7, 7, 7, 7, 7\right) = \boxed{7}.$$