Karakteristik Ring, Subring dan Ideal

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Definisi

Definisi 1. Diberikan ring R dan n bilangan bulat. Jika $a \in R$, didefinisikan:

- $na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{\text{sebanyak } n}$ jika $n > 0$.
- $0a = 0_R$.
- $na = \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{\text{sebanyak } |n|}$ jika $n < 0$.

Definisi 2 (Order)**.** Misalkan $(R, +, \cdot)$ merupakan ring dan $a \in R$. **Order** dari a, dinotasikan $o(a)$, yaitu bilangan asli terkecil sedemikian sehingga $na = 0_R$. Jika tidak ada bilangan asli n yang demikian, maka $o(a) = \infty$.

Definisi 3 (Karakteristik Ring)**.** Diberikan ring R. **Karakterisk ring** R, dinotasikan dengan $char(R)$, yaitu bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga $na = 0_R$ untuk setiap $a \in R$. Jika tidak ada bilangan asli n yang demikian, maka $char(R) = 0$.

Definisi 4 (Subring)**.** Diberikan himpunan tak kosong R dan S himpunan bagian tak kosong dari R. Kemudian, dibentuk $(R, +, \cdot)$ dan $(S, +, \cdot)$.

1. Diketahui R merupakan ring. Jika S juga membentuk ring, maka S disebut **subring** dari R.
2. Diketahui R merupakan daerah integral. Jika S juga membentuk daerah integral, maka S disebut **subdaerah** dari R.
3. Diketahui R merupakan field. Jika S juga membentuk field, maka S disebut **subfield** dari R.

Subring $S = \{0_R\}$ merupakan subring trivial, sedangkan $S = R$ disebut subring tak sejati.

Definisi 5 (Ideal)**.** Misalkan I merupakan subring dari ring R.

1. I disebut **ideal kiri** dari R jika untuk setiap $r \in A, a \in I$ berlaku $ra \in I$.
2. I disebut **ideal kanan** dari R jika untuk setiap $r \in A, a \in I$ berlaku $ar \in I$.
3. I disebut **ideal** dari R jika merupakan ideal kiri sekaligus ideal kanan.

Ideal $I = \{0_R\}$ disebut ideal trivial dan $I = R$ disebut ideal tak sejati.

Definisi 6 (Pembangun)**.** Misalkan R merupakan ring dan $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subseteq R$. Himpunan T yang dibangun oleh S jika $T = \langle S \rangle$, di mana:

- Secara umum,

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left(k_i a_i + r_i a_i + a_i s_i + \sum_{j=1}^{n_i} h_{ij} a_i k_{ij} \right) : k_i \in \mathbb{Z}, r_i, s_i, h_{ij}, k_{ij} \in R \right\}.$$

- Secara khusus, jika R merupakan **ring komutatif dengan elemen satuan**,

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} r_i a_i : m \in \mathbb{N}, r_i \in R \right\}.$$

Definisi 7 (Ideal Pokok)**.** Misalkan I ideal dari R dan $a \in R$. Ideal I disebut **ideal pokok** jika

$$I = \langle a \rangle = \{ra : r \in R\}$$

untuk suatu $a \in R$.

Sifat-Sifat

Teorema 8

Misalkan m bilangan bulat. Diberikan ring R dan $a, b \in R$, maka berlaku sifat-sifat berikut.

1. $m0_R = 0_R$.
2. $m(a + b) = ma + mb$.
3. $m(-a) = -(ma) = (-m)a$.
4. $m(ab) = (ma)b = a(mb)$.

Bukti. Diketahui R merupakan ring R.

1. Akan dibuktikan terlebih dahulu $m0_R = 0_R$. Jika $m = 0$ maka jelas. Jika $m > 0$, maka

   $$m0_R = \underbrace{0_R + 0_R + \cdots + 0_R}_{m} = 0_R.$$

   Jika $m < 0$, misalkan $m = -m_0$ di mana $m_0 > 0$. Maka

   $$m0_R = (-m_0)0_R = \underbrace{(-0_R) + (-0_R) + \cdots + (-0_R)}_{m} = 0_R.$$

   Jadi, terbukti bahwa $m0_R = 0_R$.

2. Jika $m = 0$, maka cukup jelas karena $m(a+b) = 0_R$ dan $ma + mb = 0_R + 0_R = 0_R$. Jika $m > 0$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} m(a+b) &= \underbrace{(a+b)+(a+b)+\cdots+(a+b)}_{m} \\ &= \underbrace{(a+a+\cdots+a)}_{m} + \underbrace{(b+b+\cdots+b)}_{m} \\ &= ma + mb. \end{aligned}$$

   Jika $m < 0$, misalkan $m = -m_0$ di mana $m_0 > 0$. Maka

$$\begin{aligned} m(a+b) &= (-m_0)(a+b) \\ &= m_0(-(a+b)) && \text{(def)} \\ &= m_0(-a-b) \\ &= m_0(-a) + m_0(-b) && (m_0 > 0; -a, -b \in R) \\ &= (-m_0)a + (-m_0)b && \text{(def)} \\ &= ma + mb. \end{aligned}$$

   Jadi, terbukti bahwa $m(a+b) = ma + mb$.

3. Cukup dibuktikan

$$ma + m(-a) = 0_R = m(-a) + ma.$$

   Dengan mengganti $a := a$ dan $b := -a$ pada sifat (2) di atas,

$$ma + m(-a) = m(a + (-a)) = m0_R = 0_R$$

   dengan sifat (1). Karena bersifat komutatif, berlaku juga $m(-a) + ma = 0_R$. Ini berarti $-(ma) = m(-a)$ seperti yang ingin dibuktikan. Secara analog untuk $(-m)a = -(ma)$.

4. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (ma)b &= \left(\underbrace{a+a+\cdots+a}_{m}\right) b && \text{(def)} \\ &= \underbrace{ab+ab+\cdots+ab}_{m} && \text{(Distributif)} \\ &= m(ab). \end{aligned}$$

   Secara analog, $a(mb) = m(ab)$. Jadi, terbukti bahwa $m(ab) = (ma)b = a(mb)$.

Terbukti. □

Teorema 9

Misalkan m dan n bilangan bulat. Diberikan ring R dan $a, b \in R$, maka berlaku sifat-sifat berikut.

1. $(m+n)a = ma + na$.
2. $(mn)a = m(na) = n(ma)$.
3. $(mn)(ab) = (ma)(nb)$.

Bukti. Pada bagian ini akan dibuktikan 1 dan 2, sedangkan 3 sebagai latihan. Jika $n = 0$, maka $ma = ma + 0a = ma + 0_R = ma$ (hal yang sama untuk $m = 0$). Karena $(mn)a = (nm)a$, cukup dibuktikan $(mn)a = m(na)$. Akan ditinjau untuk $m, n \neq 0$. Akan dibagi kasus.

Kasus 1. $m > 0$ dan $n > 0$.

Perhatikan bahwa $m + n > 0$, maka

$$\begin{aligned}
(m+n)a &= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m+n} \\
&= \underbrace{(a + a + \cdots + a)}_{m} + \underbrace{(a + a + \cdots + a)}_{n} \\
&= ma + na. \\
(mn)a &= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{mn} \\
&= \underbrace{\underbrace{(a + a + \cdots + a)}_{n} + \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n} + \cdots + \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n}}_{m} \\
&= \underbrace{na + na + \cdots + na}_{m} \\
&= m(na)
\end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Kasus 2. $m > 0$ dan $n < 0$, atau $m < 0$ dan $n > 0$.

Akan dibuktikan untuk $m > 0$ dan $n < 0$, sedangkan pembuktian $m < 0$ dan $n > 0$ dapat dilakukan secara analog. Misalkan $n = -n_0$ di mana $n_0 > 0$. Maka $(m+n)a = (m - n_0)a$ dan $(mn)a = m(-n_0a)$. Jika $m - n_0 > 0$, maka

$$\begin{aligned}
(m - n_0)a &= (m - n_0)a + 0_R && \text{(id +)} \\
&= (m - n_0)a + n_0 0_R && \text{(Theorem \textbf{??})} \\
&= (m - n_0)a + n_0(a + (-a)) && \text{(Invers +)} \\
&= (m - n_0)a + n_0 a + n_0(-a) && \text{(Theorem \textbf{??})} \\
&= (m - n_0 + n_0)a + (-n_0)a && \text{(Theorem \textbf{??}, def)} \\
&= ma + na.
\end{aligned}$$

Jika $m - n_0 < 0$, maka

$$\begin{aligned}
(m-n_0)a &= (n_0 - m)(-a) + 0_R && \text{(def, id +)} \\
&= (n_0 - m)(-a) + m0_R \\
&= (n_0 - m)(-a) + m((-a) + a) && \text{(Invers +)} \\
&= (n_0 - m)(-a) + m(-a) + ma && \text{(Teorema 8(2))} \\
&= (n_0 - m + m)(-a) + ma && \text{(Teorema 8(2), def)} \\
&= n_0(-a) + ma \\
&= (-n_0)a + ma && \text{(def)} \\
&= na + ma \\
&= ma + na. && \text{(Komutatif)}
\end{aligned}$$

Kemudian, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
(-mn_0)a &= (mn_0)(-a) && \text{(def)} \\
&= m(n_0(-a)) && (n_0 > 0) \\
&= m((-n_0)a) && \text{(def)} \\
&= m(na)
\end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Kasus 3. $m < 0$ dan $n < 0$

Misalkan $m = -m_0$ dan $n = -n_0$ di mana $m_0 > 0$ dan $n_0 > 0$. Ini berarti

$$\begin{aligned}
(m+n)a &= (-m_0 - n_0)a \\
&= (m_0 + n_0)(-a) && \text{(def)} \\
&= m_0(-a) + n_0(-a) && (m_0, n_0 > 0) \\
&= (-m_0)a + (-n_0)a && \text{(def)} \\
&= ma + na.
\end{aligned}$$

Selain itu,

$$\begin{aligned}
m(na) = -m_0((-n_0)a) &= -m_0(n_0(-a)) \\
&= (-m_0)(-(n_0a)) && \text{(Teorema 8(3))} \\
&= m_0(n_0a) && \text{(Teorema 8(4))} \\
&= (m_0n_0)a && (m_0, n_0 > 0) \\
&= (mn)a
\end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Semua kasus telah ditinjau dan kita selesai. $\square$

Teorema 10: Karakteristik Ring Dengan Elemen Satuan

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1_R.

1. Jika $o(1_R) = \infty$, maka $char(R) = 0$.
2. Jika $o(1_R) = n$ di mana n bilangan asli, maka $char(R) = n$.

Bukti.

1. Diketahui $o(1_R) = \infty$. Ini menunjukkan bahwa terdapat elemen di R yang memenuhi $n \cdot 1_R \neq 0_R$ untuk setiap bilangan asli n. Dengan kata lain, tidak ada bilangan asli k sedemikian sehingga $kr = 0_R$ untuk setiap $r \in R$. Jadi, $char(R) = 0$.
2. Jika $o(1_R) = n$, ini berarti $n1_R = 0_R$. Misalkan $r \in R$ dan akan dibuktikan bahwa $nr = 0_R$. Perhatikan bahwa

$$nr = n(1_R r) = (n1_R)r = 0_R r = 0_R$$

seperti yang ingin dibuktikan.

$\square$

Teorema 11: Order Elemen

isalkan R meruapakan ring dan $r \in R$ dengan order berhingga ($o(r) < \infty$). Misalkan $k \neq 0$ suatu bilangan bulat. Maka $kr = 0_R$ jika dan hanya jika $o(r) \mid k$.

Bukti. Misalkan $o(r) = x$ di mana x bilangan asli. Ini berarti $xr = 0_R$.
($\Leftarrow$) Jika $x \mid k$, tulis $k = xy$ untuk suatu bilangan bulat y. Maka

$$kr = (xy)r = y(xr) = y0_R = 0_R$$

seperti yang ingin dibuktikan.
($\Rightarrow$) Akan dibuktikan $x \mid k$. Tulis kembali bahwa $xr = 0_R$. Menurut Euclid*, terdapat bilangan bulat p dan q yang memenuhi $k = px + q$ di mana $0 \leq q < x$. Ini berarti

$$0_R = nr = (px + q)r = (px)r + qr = p(xr) + qr = p0_R + qr = 0_R + qr = qr.$$

Andaikan $1 \leq q < x - 1$, kontradiksi dengan minimalitas x, yaitu sebagai bilangan bilangan asli **terkecil** yang memenuhi $xr = 0_R$. Jadi, $q = 0$ sehingga $k = px$ yang menunjukkan $x \mid k$. $\square$

Teorema 12: Karakteristik Daerah Integral dan Field

Jika R merupakan daerah integral (atau field), maka $char(R)$ sama dengan 0 atau bilangan prima.

*[Euclid] Misalkan a dan $b \neq 0$ bilangan bulat. Maka terdapat bilangan bulat h dan r yang memenuhi $a = bh + r$ di mana $0 \leq r \leq |b| - 1$. Nilai dari h biasa disebut **hasil bagi** dan r disebut **sisa bagi**.

Bukti. Karena R merupakan daerah integral (atau field), maka R memiliki elemen satuan. Berdasarkan **Teorema 10**, jika $o(1_R) = \infty$ berlaku $char(R) = 0$. Asumsikan $o(1_R) = n$, maka $char(R) = n$. Akan dibuktikan bahwa n bilangan prima. Jika $n = 1$, maka $0_R = 11_R = 1_R$, tidak mungkin. Andaikan $n > 1$ dan n komposit, tulis $n = ab$ untuk suatu bilangan asli a dan b di mana $1 \leq a \leq b < n$.
Misalkan R daerah integral. Perhatikan bahwa

$$0_R = n1_R = (ab)1_R = (ab)(1_R \cdot 1_R) = (a \cdot 1_R)(b \cdot 1_R).$$

Tinjau $a \cdot 1_R \in R$ dan $b \cdot 1_R \in R$. Karena R daerah integral, maka $a \cdot 1_R = 0_R$ atau $b \cdot 1_R = 0_R$. Berdasarkan **Teorema 11**, maka $n \mid a$ atau $n \mid b$. Namun, $1 < a, b < n$ yang mana ini kontradiksi. Jadi, n harus prima.
Jika n field dan n merupakan bilangan asli **terkecil** sehingga $n \cdot 1_R = 0_R$, maka $a \cdot 1_R \neq 0_R$ dan $b \cdot 1_R \neq 0$. Maka $(b \cdot 1_R)^{-1} \in R$ sehingga

$$0_R = 0_R(b \cdot 1_R)^{-1} = 0_R(a \cdot 1_R)(b \cdot 1_R)(b \cdot 1_R)^{-1} = (a \cdot 1_R)1_R = a \cdot 1_R.$$

Sekali lagi, kontradiksi karena $o(r) = n > a$. $\square$

Teorema 13: Uji Subring

Misalkan $(R, +, \cdot)$ merupakan ring dan S himpunan bagian tak kosong dari R. Maka $(S, +, \cdot)$ merupakan subring dari R jika dan hanya jika:

1. untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a - b = a + (-b) \in S$.
2. untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $ab \in S$.

Bukti.
($\Rightarrow$) Jika S subring dari R. Dari **Definisi 4(1)**, S membentuk ring sehingga 1 dan 2 telah dijamin.
($\Leftarrow$) Jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a - b, ab \in S$. Akan dibuktikan $(S, +, \cdot)$ membentuk ring. Karena untuk setiap elemen S merupakan elemen R (dengan operasi biner yang sama pula), maka telah dijamin sifat-sifat berikut:

- sifat asosiatif terhadap $+$ dan $\cdot$,
- sifat komutatif terhadap $+$,
- sifat distributif.

Dalam hal ini perlu dibuktikan hal-hal berikut:

- S memiliki elemen nol. Perhatikan bahwa $a \in S$, menurut asumsi haruslah berlaku $0_R = a - a \in S$. Jadi, $0_R \in S$. Karena untuk setiap $x \in S$ berlaku $x \in R$ yang berakibat $x + 0_R = x = 0_R + x$, ini menunjukkan 0_R elemen nol di S.

- setiap elemen di S memiliki invers di S terhadap $+$. Untuk setiap $a \in S$, menurut asumsi haruslah berlaku $-a = 0_R - a \in S$. Terbukti bahwa invers dari $a \in S$ terhadap $+$ juga anggota S.
- Berlaku sifat tertutup terhadap $+$ dan $\cdot$. Dari 2 telah dijamin untuk sifat ketertutupan terhadap $\cdot$. Ambil sebarang $a, (-b) \in S$, maka $b = -(-b) \in S$. Dari asumsi 1, maka $a + b = a - (-b) \in S$ yang menunjukkan sifat tertutup terhadap $+$.

Jadi, S membentuk ring sehingga S subring dari R. □

Teorema 14: Uji Ideal

Misalkan $(R, +, \cdot)$ merupakan ring dan I himpunan bagian tak kosong dari R. $(I, +, \cdot)$ merupakan ideal dari R jika dan hanya jika:

1. untuk setiap $a, b \in I$ berlaku $a - b = a + (-b) \in I$.
2. untuk setiap $r \in R$ dan $a \in I$ berlaku $ra, ar \in I$.

Bukti. Cukup jelas dari definisi ideal. □

Lemma 15: Order Elemen dari Hasil Kali Kartersian Ring

Misalkan $(R, +_R, \cdot_R), (S, +_S, \cdot_S)$ merupakan ring dan dibentuk ring $(R \times S, \bigoplus, \bigotimes)$ dengan

$$(r_1, s_1) \bigoplus (r_2, s_2) = (r_1 +_R r_2, s_1 +_S s_2), \quad (r_1, s_1) \bigotimes (r_2, s_2) = (r_1 \cdot_R r_2, s_1 \cdot_S s_2)$$

untuk setiap $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$. Jika $(r, s) \in R \times S$ dengan $o(r), o(s) < \infty$, maka $o(r, s) = \text{KPK}(o(r), o(s))$.

Bukti. Misalkan $o(r) = n$ dan $o(s) = m$ di mana m, n bilangan asli, maka $nr = 0_R$ dan $mr = 0_S$. Akan dibuktikan $o(r, s) = \text{kpk}(m, n)$. Tulis $t = \text{kpk}(m, n)$. Karena

$$\begin{aligned} t \cdot (r, s) &= \underbrace{(r, s) \bigoplus (r, s) \bigoplus \cdots \bigoplus (r, s)}_{t} \\ &= \left(\underbrace{r +_R r +_R r +_R +_R \cdots +_R r}_{t}, \underbrace{s +_S s +_S +_S \cdots +_S s}_{t} \right) \\ &= (tr, ts). \end{aligned}$$

Karena $m \mid t$, dari **Teorema 11** berlaku $tr = 0_R$. Secara analog, $n \mid t$ berakibat $ts = 0_S$. Jadi, $t \cdot (r, s) = (0_R, 0_S)$. Dari **Teorema 11**, maka $o(r, s) \mid t$.
Misalkan $o(r, s) = n$, maka $(0_R, 0_S) = n \cdot (r, s) = (nr, ns)$ sehingga $nr = 0_R$ dan $ns = 0_S$. Dari **Teorema 11**, maka $o(r) \mid n$ dan $o(s) \mid n$. Dari sifat keterbagian, $t = \text{kpk}(o(r), o(s)) \mid n$.
Karena $n \mid t$ dan $t \mid n$, maka $n = t$ yang menunjukkan $o(r, s) = \text{kpk}(o(r), o(s))$. □

Lemma 16

Misalkan R dan S merupakan ring dengan elemen satuan $1_R \neq 0_R$ dan $1_S \neq 0_S$. Dibentuk ring $(R \times S, \bigoplus, \bigotimes)$ dengan

$$(r_1, s_1) \bigoplus (r_2, s_2) = (r_1 +_R r_2, s_1 +_S s_2), \quad (r_1, s_1) \bigotimes (r_2, s_2) = (r_1 \cdot_R r_2, s_1 \cdot_S s_2)$$

untuk setiap $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$. Jika K merupakan subring di $R \times S$, maka $K = I \times J$ di mana I subring dari R dan J subring dari S.

Bukti. Serupa dengan **Lemma 17**. □

Lemma 17

Misalkan R dan S merupakan ring dengan satuan, serta $1_R \neq 0_R$ dan $1_S \neq 0_S$. Dibentuk ring $(R \times S, \bigoplus, \bigotimes)$ dengan

$$(r_1, s_1) \bigoplus (r_2, s_2) = (r_1 +_R r_2, s_1 +_S s_2), \quad (r_1, s_1) \bigotimes (r_2, s_2) = (r_1 \cdot_R r_2, s_1 \cdot_S s_2)$$

untuk setiap $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$. Jika K merupakan ideal di $R \times S$, maka $K = I \times J$ di mana I ideal dari R dan J ideal dari S.

Bukti. Misalkan K ideal dari $R \times S$. Misalkan I adalah himpunan semua $a \in R$ sehingga terdapat $b \in S$ yang memenuhi $(a, b) \in K$, dengan kata lain

$$I = \{a \in R : (a, b) \in K \text{ untuk suatu } b \in S\}.$$

Definisikan pula $J = \{b \in S : (a, b) \in K \text{ untuk suatu } a \in R\}$.
Akan dibuktikan $K = I \times J$. Misalkan $(a, b) \in K$. Karena terdapat $b \in S$ yang memenuhi $(a, b) \in K$, maka $a \in I$. Secara analog, $b \in J$ sehingga $(a, b) \in I \times J$. Jadi, $K \subseteq I \times J$. Misalkan $(x, y) \in I \times J$, maka $x \in I$ dan $y \in J$. Karena $x \in I$, terdapat $x' \in S$ sedemikian sehingga $(x, x') \in K$. Dengan cara yang sama, terdapat $y' \in R$ yang memenuhi $(y', y) \in K$. Karena K ideal $R \times S$,

$$(1_R, 0_S) \bigotimes (x, x') = (1_R \cdot_R x, 0_S \cdot_S x') = (x, 0) \in K, \quad (0_R, 1_S) \bigotimes (y', y) = (0_R, y) \in K.$$

Selain itu, $(x, y) = (x, 0_S) \bigoplus (0_R, y) \in K$. Ini menunjukkan $I \times J \subseteq K$. Jadi, $K = I \times J$.
Akan dibuktikan I ideal dari R dan J ideal dari S. Pertama, akan dibuktikan I ideal dari R. Akan dibuktikan:

- Untuk setiap $x, y \in I$ berlaku $x - y = x +_R (-y) \in I$. Karena $x, y \in I$, terdapat $x', y' \in S$ yang memenuhi $(x, x') \in K$ dan $(y, y') \in S$. Tinjau $(x, x'), (y, y') \in K$, mengingat K ideal dari $R \times S$ berlaku

  $$(x, x') \bigoplus -(y, y') = (x +_R (-y), x' +_S (-y')) \in K.$$

  Oleh karena itu, $x +_R (-y) \in I$.

- Untuk setiap $r \in R$ dan $x \in I$ berlaku $xr, rx \in I$. Karena $x \in I$, terdapat $x' \in S$ yang memenuhi $(x, x') \in K$. Mengingat K ideal $R \times S$, untuk setiap $r \in R$ berlaku

  $$(r, 0_S) \bigotimes (x, x') = (rx, 0_S) \in K, \quad (x, x') \bigotimes (r, 0_S) = (xr, 0_S) \in K.$$

  Ini berarti $rx, xr \in I$.

Jadi, I merupakan ideal R. Secara analog, J ideal dari S. $\square$

Catatan. ***Lemma 16*** *dan* ***Lemma 17*** *menjadi strategi bagaimana mengetahui semua subring dan semua ideal dari ring dengan elemen satuan $1_R \neq 0_R, 1_S \neq 0_S$ berbentuk $R \times S$.*

Lemma 18

Diberikan bilangan asli n dan dibentuk ring $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. Semua subring dari $\mathbb{Z}_n$ adalah $k\mathbb{Z}_n$ di mana k faktor positif dari n.

Bukti. Jika H subring dari $\mathbb{Z}_n$. Jika $H = \{\overline{0}\}$ jelas bahwa Jelas bahwa $\overline{0} \in H$. Untuk $H \neq \{\overline{0}\}$ maka $|H| > 1$. Jika $\overline{1} \in H$, maka

$$\overline{2} = \overline{1} + \overline{1} \in H, \quad \overline{3} = \overline{2} + \overline{1} \in H, \quad \cdots, \overline{n} - 1 = \overline{(n-2)} + \overline{1} \in H$$

sehingga $H = \mathbb{Z}_n$ (dalam hal ini $k = 1$).

Andaikan $\overline{1} \notin H$. Misalkan $H = \{\overline{0}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_m}\}$ di mana $1 < a_2, \cdots, a_m \leq n - 1$ serta $m \geq 2$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $1 < a_2 < \cdots < a_m$ (dengan kata lain a_2 sebagai anggota terkecil di $\{a_2, a_3, \cdots, a_m\}$). Akan dibuktikan bahwa $a_2 \mid n$. Andaikan $a_2 \nmid n$, dari Euclid[†], terdapat bilangan bulat tak negatif h, r yang memenuhi $n = a_2 h + r$ di mana $0 < r \leq a_2 - 1$ (mengingat $n, a_2 > 0$ dapat dipilih h sebagai bilangan bulat tak negatif). Tinjau bahwa $(k+1)\overline{a_2} \in H$ dan

$$(k+1)a_2 \equiv ka_2 + a_2 \equiv a_2 - r \pmod{n}$$

sehingga $(k+1)\overline{a_2} = \overline{(a_2 - r)}$. Perhatika Ini berarti haruslah $\overline{(a_2 - r)} \in H$. Karena $0 < a_2 - r < a_2$, maka ini kontradiksi dengan minimalitas a_2. Jadi, $a_2 \mid n$. Sekarang akan dibuktikan bahwa $H = a_2\mathbb{Z}_n$. Misalkan $n = a_2 t$ untuk suatu bilangan asli t. Berdasarkan sifat tertutup tentu

$$\overline{a_2}, 2\overline{a_2}, \cdots, (t-1)\overline{a_2} \in H, \quad \text{dan} \quad t\overline{a_2} = \overline{0}, (t+1)\overline{a_2} = \overline{a_2}, \cdots.$$

Maka dari itu haruslah $H = \left\{\overline{0}, \overline{a_2}, \overline{2a_2}, \cdots, \overline{(n-1)a_2}\right\} = a_2\mathbb{Z}_n$. $\square$

Akibat 19: Semua Ideal di $\mathbb{Z}_n$ adalah Ideal Pokok

Diberikan bilangan asli n dan dibentuk ring $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. Semua subring berbeda dari $\mathbb{Z}_n$ adalah $k\mathbb{Z}_n = \langle k \rangle$ di mana k faktor positif dari n. Jadi, $\langle k \rangle$ juga merupakan subring, ideal, sekaligus ideal pokok.

[†][Euclid] Misalkan a dan $b \neq 0$ bilangan bulat. Maka terdapat bilangan bulat h dan r yang memenuhi $a = bh + r$ di mana $0 \leq r \leq |b| - 1$. Nilai dari h biasa disebut **hasil bagi** dan r disebut **sisa bagi**.

Soal

1. Diberikan $A := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$. Definisikan $\mathcal{M})_2(\mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks ordo 2×2 dengan entri-entri bilangan real. Dibentuk ring $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ di mana $+$ dan $\cdot$ merupakan operasi perkalian matriks.
   (a) Buktikan bahwa A subring $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Periksa apakah A ideal dari $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Diberikan ring $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right], +, \cdot\right)$ di mana $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \left\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Buktikan bahwa
$$3\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \left\{3a + 3b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$
merupakan ideal dari $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$.

3. Diberikan ring $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$ dan ring $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$. Dibentuk ring $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}, \bigoplus, \bigotimes)$ dengan
$$(a, b) \bigoplus (c, d) = (a +_4 c, b +_{12} d), \quad (a, b) \bigotimes (c, d) = (a \cdot_4 c, b \cdot_{12} d)$$
untuk setiap $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$.
   (a) Tentukan order dari $(\overline{3}, \overline{4}) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$.
   (b) Tentukan $char(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{12})$.

4. Diberikan $S = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \} \subseteq \mathbb{Z}_8$ dan $T = \{\overline{0}, \overline{3}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$. Dibentuk ring $(S \times T, +, \cdot)$ dengan
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b)(c, d) = (ac, bd).$$
Tentukan semua ideal di $S \times T$.

5. Misalkan R ring. Jika P dan Q masing-masing ideal di R, buktikan bahwa $P + Q = \{p + q : p \in P, q \in Q\}$ ideal di R.

6. (UTS 2019). Diketahui $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ merupakan ring.
   (a) Tentukan semua ideal berode 4 dan jelaskan.
   (b) Tentukan pembangun dari soal (a) dan jelaskan.

7. (UTS 2022). Diketahui ring $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ dengan operasi penjumlahan $+$ dan perkalian $\times$ sebagai berikut:
$$(a, b, c) + (x, y, z) = (a + x, b + y, c + z), \quad (a, b, c) \times (x, y, z) = (ax, by, cz).$$
Diberikan $S = \{(a, b, c) : c = a + b; a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Selidiki apakah S merupakan subring dan ideal dari M.

8. (UTS 2021). Diberikan ring $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$.

(a) Misalkan $H \subseteq \mathbb{Z}_{21}$ di mana $H = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Buktikan bahwa H subring dari $\mathbb{Z}_{21}$.

(b) Periksa apakah H memiliki elemen satuan.

(c) Tentukan $char(H)$.