Ring, Field, dan Integral

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Definisi 1 (Ring)**.** Misalkan R merupakan himpunan tak kosong dan diberikan operasi biner $+$ dan $\cdot$. Struktur $(R, +, \cdot)$ disebut ring apabila memenuhi sifat-sifat berikut.

1. $(R, +)$ membentuk grup abelian, yaitu:
   (a) **(Tertutup $+$).** Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$.
   (b) **(Asosiatif $+$).** Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   (c) **(Id $+$).** Terdapat $x \in R$ sedemikian sehingga $a + x = a = x + a$ untuk setiap $a \in R$. Elemen tersebut dituliskan sebagai $x := 0_R$, disebut **elemen nol** di R.
   (d) **(Invers $+$).** Untuk setiap $a \in R$ terdapat $b \in R$ yang memenuhi $a + b = 0_R = b + a$. Elemen b dituliskan sebagai $b := (-a)$, disebut **elemen invers terhadap operasi penjumlahan** di R.
   (e) **(Komutatif $+$).** Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$.
2. $(R, \cdot)$ membentuk semi-grup, yaitu:
   (a) **(Tertutup $\cdot$).** Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$.
   (b) **(Asosiatif $\cdot$).** Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(ab)c = a(bc)$.
3. $(R, +, \cdot)$ berlaku sifat distributif, yaitu:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \quad (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a).$$

   Pertama disebut distributif kiri, sedangkan yang kedua disebut distributif kanan.

Definisi 2 (Ring Komutatif)**.** Ring R disebut ring komutatif apabila untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $xy = yx$.

Definisi 3 (Unsur Keatuan/Unity)**.** Diberikan ring $(R, +, \cdot)$. Jika terdapat elemen $x \in R$ sedemikian sehingga $ax = a = xa$ untuk setiap $a \in R$, maka elemen x disebut sebagai **unsur kesatuan**. Dalam hal ini, dinotasikan $x := 1_R$.

Definisi 4 (Ring dengan Satuan)**.** Ring $(R, +, \cdot)$ yang memiliki unsur satuan disebut sebagai **ring dengan kesatuan**.

Definisi 5 (Pembagi Nol)**.** Diberikan ring $(R, +, \cdot)$.

1. Elemen $a \in R$ dengan $a \neq 0_R$ disebut **pembagi nol kiri** apabila terdapat $b \in R$ dengan $b \neq 0_R$ yang memenuhi $ab = 0_R$.

2. Elemen $a \in R$ dengan $a \neq 0_R$ disebut **pembagi nol kanan** apabila terdapat $b \in R$ dengan $b \neq 0_R$ yang memenuhi ba.

3. Elemen $a \in R$ dengan $a \neq 0_R$ disebut **pembagi nol sejati** apabila terdapat $b \in R$ dengan $b \neq 0_R$ yang memenuhi $ab = 0_R = ba$.

Definisi 6 (Daerah Integral)**.** Diberikan ring komutatif $(D, +, \cdot)$ dengan elemen kesatuan. Ring D disebut **daerah integral** jika tidak memiliki pembagi nol. Ekuivalen, jika $a, b \in D$ memenuhi $ab = 0_D$ atau $ba = 0_D$ maka haruslah $a = 0_D$ atau $b = 0_D$.

Definisi 7 (Unit)**.** Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1_R. Elemen $a \in R$ yang memiliki invers terhadap operasi perkalian disebut **unsur unit** di R. Dengan kata lain, untuk setiap $a \in R$ dengan $a \neq 0_R$ terdapat $b \in R$ yang memenuhi $ab = 1_R = ba$. Dalam hal ini, $b := a^{-1}$.

Definisi 8 (Ring Pembagian/Division)**.** Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1_R. Ring R disebut **ring pembagian** jika setiap unsur taknolnya merupakan unit. Dengan kata lain, untuk setiap $a \in R$ dengan $a \neq 0_R$ berlaku $a^{-1} \in R$.

Definisi 9 (Field)**.** Misalkan F merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Ring F disebut *field* apabila setiap elemen tak nolnya merupakan unit. Dengan kata lain, untuk setiap $a \in F$ dengan $a \neq 0_F$ berlaku $a^{-1} \in F$.

Teorema 10: Hukum Kanselisasi

1. Misalkan R merupakan ring. Jika $a, b, c \in R$ memenuhi $a + b = a + c$, maka $b = c$.

2. Misalkan D merupakan daerah integral. Jika $a, b, c \in D$ di mana $a \neq 0_D$ memenuhi $ab = ac$, maka $b = c$.

Bukti. Akan dibuktikan (1). Diberikan $a + b = a + c$. Maka

$$\begin{aligned}
b &= 0_R + b && (\text{id } +) \\
&= ((-a) + a) + b && (\text{invers } +) \\
&= (-a) + (a + b) && (\text{asosiatif } +) \\
&= (-a) + (a + c) && (a + b = a + c) \\
&= ((-a) + a) + c && (\text{asosiatif } +) \\
&= 0_R + c && (\text{invers } +) \\
&= c && (\text{id } +)
\end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Akan dibuktikan (2). Perhatikan bahwa $0_D = ab - ac = a(b - c)$ menggunakan distributif. Karena D daerah integral, maka $a = 0_D$ atau $b - c = 0_D$. Mengingat $a \neq 0_D$, maka $b - c = 0_D \implies b = c$. □

Teorema 11: Hubungan Field dan Daerah Integral

1. Jika F merupakan field, maka F merupakan daerah integral.
2. Jika D merupakan daerah integral **berhingga**, maka D merupakan field.

Bukti. Akan dibuktikan (1). Misalkan $a, b \in F$ memenuhi $ab = 0_F$. Cukup dibuktikan bahwa haruslah berlaku $a = 0_F$ atau $b = 0_F$. Jika $a = 0_F$, maka selesai. Andaikan $a \neq 0_F$, karena F field maka $a^{-1} \in F$. Ini berarti

$$\begin{aligned} b &= 1_R b && (\text{id } \cdot) \\ &= \left(a^{-1}a\right) b && (\text{invers } \cdot) \\ &= a^{-1}(ab) && (\text{asosiatif } \cdot) \\ &= a^{-1}0_R && (ab = 0_F) \\ &= 0_R. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa F merupakan daerah integral.
Akan dibuktikan (2). Karena D daerah integral, maka D merupakan ring komutatif dengan satuan. Misalkan $R = \{0_D, 1_R, a_3, \cdots, a_n\}$ di mana $n \geq 2$ $(1_d = a_2)$. Akan dibuktikan untuk setiap $a \in \{1_D, a_3, \cdots, a_n\}$ merupakan unit, yang mana jelas $a \neq 0_D$. Dengan kata lain, cukup dibuktikan bahwa terdapat $a_i \in \{1_D, a_3, \cdots, a_n\}$ yang memenuhi $aa_i = 1_R$. Kita klaim bahwa

$$\{a, aa_3, \cdots, aa_n\} = \{1_R, a_3, \cdots, a_n\}.$$

Andaikan tidak, maka terdapat $2 \leq i < j \leq n$ yang memenuhi $aa_i = aa_j$. Ini berarti $0 = aa_j - aa_i = a(a_j - a_i)$. Karena $a \neq 0_D$ dan D daerah integral, maka haruslah $a_j - a_i = 0_D$ sehingga $a_j = a_i$, kontradiksi. Jadi, klaim terbukti. Oleh karena itu, ini menunjukkan terdapat $2 \leq k \leq n$ yang memenuhi $aa_k = 1_D$ sehingga a merupakan unit. Terbukti D merupakan field. $\square$

Lemma 12: $\mathbb{Z}_n$ Sebagai Field dan Daerah Integral

Misalkan $n > 1$ bilangan asli dan $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$.

1. $\mathbb{Z}_n$ daerah integral jika dan hanya jika n prima.
2. $\mathbb{Z}_n$ field jika dan hanya jika n prima.

Bukti. Akan dibuktikan (1).
($\Rightarrow$) Diketahui $\mathbb{Z}_n$ daerah integral. Andaikan n komposit, maka $n = ab$ untuk suatu bilangan asli $1 < a \leq b < n$. Ini berarti $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$ yang mengakibatkan $\overline{a}$ pembagi nol di $\mathbb{Z}_n$, kontradiksi bahwa $\mathbb{Z}_n$ daerah integral. Jadi, haruslah n prima.
($\Leftarrow$) Jika n prima. Andaikan $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ bukan daerah integral, maka terdapat $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{x}, \overline{y} \neq \overline{0}$ yang memenuhi $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{0}$. Ini berarti $\overline{xy} = \overline{0}$ sehingga $n \mid xy$. Karena n prima, maka

haruslah $n \mid x$ atau $n \mid y$. Ini menunjukkan $\overline{x} = \overline{0}$ atau $\overline{y} = \overline{0}$, kontradiksi. Jadi, $\mathbb{Z}_n$ daerah integral.

Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_n$ daerah integral jika dan hanya jika n prima.

Akan dibuktikan (2). Karena $\mathbb{Z}_n$ merupakan daerah integral **berhingga**, menurut Teorema 11 berlaku $\mathbb{Z}_n$ field jika dan hanya jika n prima. Terbukti. $\square$

Lemma 13: Pembagi Nol di $\mathbb{Z}_n$

Misalkan n bilangan asli di mana $n \geq 2$. Maka $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{a} \neq \overline{0}$ merupakan pembagi nol di $\mathbb{Z}_n$ jika dan hanya jika $\text{fpb}(a, n) > 1$.

Bukti. ($\Leftarrow$) Diketahui $\text{fpb}(a, n) > 1$, misalkan $\text{fpb}(a, n) = d$. Maka terdapat bilangan asli x, y dengan $a = dx$ dan $n = dy$ yang mememnuhi $\text{fpb}(x, y) = 1$. Karena $d > 1$, maka $1 \leq y < n$ sehingga $\overline{y} \neq \overline{0}$. Karena $\overline{a} \cdot \overline{y} = \overline{dx} \cdot \overline{y} = \overline{dxy} = \overline{0}$ karena $n = dy \mid dxy$. Ini menunjukkan bahwa a pembagi nol sejati di $\mathbb{Z}_n$.

($\Rightarrow$) Diketahui $\overline{a} \neq \overline{0}$ pembagi nol sejati di $\mathbb{Z}_n$. Maka terdapat $\overline{b} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{b} \neq \overline{0}$ yang memenuhi $\overline{0} = \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$. Ini berarti $n \mid ab$. Andaikan $\text{fpb}(a, n) = 1$, berdasarkan sifat keterbagian haruslah $n \mid b$. Ini berarti $\overline{b} = \overline{0}$, kontradiksi. Jadi, $\text{fpb}(a, n) > 1$.

Terbukti bahwa $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{a} \neq \overline{0}$ merupakan pembagi nol sejati di $\mathbb{Z}_n$ jika dan hanya jika $\text{fpb}(a, n) > 1$. $\square$

Lemma 14: Unit di $\mathbb{Z}_n$

Misalkan n bilangan asli di mana $n \geq 2$. Maka $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{a} \neq \overline{0}$ merupakan unit di $\mathbb{Z}_n$ jika dan hanya jika $\text{fpb}(a, n) = 1$.

Bukti. ($\Rightarrow$) Dari **Lemma 13**, jika $\text{fpb}(a, n) > 1$ berakibat $\overline{a}$ merupakan pembagi nol sehingga $\overline{a}$ bukan unit (why?). Jadi, haruslah $\text{fpb}(a, n) = 1$.

($\Leftarrow$) Jika $\text{fpb}(a, n) = 1$. Misalkan $1 = a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(n)}$ merupakan semua bilangan asli tidak lebih dari n dan memenuhi $\text{fpb}(a_i, n) = 1$ untuk $i = 1, 2, \cdots, \varphi(n)$.* Kita klaim bahwa

$$\left\{\overline{a}, \overline{aa_2}, \cdots, \overline{aa_{\varphi(n)}}\right\} = \{\overline{1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_{\varphi(n)}}\}.$$

Andaikan tidak, maka terdapat $1 \leq i < j \leq \varphi(n)$ yang memenuhi $\overline{aa_i} = \overline{aa_j}$. Dengan kata lain, $aa_i \equiv aa_j \pmod{n}$ sehingga

$$0 \equiv aa_j - aa_i = a(a_j - a_i) \pmod{n} \implies n \mid a(a_j - a_i).$$

Karena $\text{fpb}(a, n) = 1$, berdasarkan sifat keterbagian haruslah $n \mid a_j - a_i$. Hal ini kontradiksi karena $0 < |a_j - a_i| < n$. Klaim terbukti. Oleh karena itu, ini menunjukkan terhadap $1 \leq k \leq n - 1$ yang memenuhi $\overline{aa_k} = \overline{1}$ di mana $a_k \in \mathbb{Z}_n$. Ini menunjukkan a merupakan unit.

*$\varphi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli k yang tidak lebih dari n dan memenuhi $\text{fpb}(k, n) = 1$. Fungsi tersebut disebut fungsi **Euler Totient**. Jika $n \geq 2$ dan $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$ merupakan faktorisasi prima dari n, maka $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Jadi, terbukti bahwa $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{a} \neq \overline{0}$ merupakan unit di $\mathbb{Z}_n$ jika dan hanya jika $\text{fpb}(a, n) = 1$. $\square$

Contoh 1

Tentukan semua unit dan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{15}$.

Solusi. Dari **Lemma 14**, semua unit di $\mathbb{Z}_{15}$ adalah $\boxed{\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}}$. Dari **Lemma 13**, selainnya merupakan pembagi nol di $\mathbb{Z}_{15}$, yaitu $\boxed{\{3, 5, 6, 9, 10, 12\}}$. ▼

Contoh 2

Periksa apakah $\mathbb{N}$ membentuk ring dengan operasi penjumlahan dan perkalian biasa.

Solusi. Agar membentuk ring, salah satu sifat yang harus dipenuhi adalah terdapat elemen nol di $\mathbb{N}$. Jika a elemen nol di $\mathbb{N}$, maka haruslah $a + b = b = b + a$ untuk setiap $b \in \mathbb{N}$. Namun, ini memberikan $b = 0 \notin \mathbb{N}$ yang berarti kontradiksi. Karena tidak terpenuhi sifat tersebut, ini menunjukkan $\mathbb{N}$ bukan ring. ▼

Catatan. *Untuk menunjukkan bahwa suatu struktur tidak membentuk ring, field, atau daerah integral, cukup cari **salah satu contoh penyangkal** ada salah satu sifat yang tidak dipenuhi. Tidak harus semuanya dicek (terlalu memakan waktu).*

Contoh 3

Misalkan $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Operasi $+$ dan $\cdot$ pada M didefinisikan sebagai operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Selidiki apakah $(M, +, \cdot)$ merupakan ring, daerah integral, atau field!

Solusi. Ambil sebarang $O, P, Q \in M$ dengan

$$O = \begin{pmatrix} o & -s \\ s & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix}.$$

- Akan dibuktikan M berlaku sifat tertutup terhadap $+$ dan $\cdot$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} O + P &= \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o+p & -(s+n) \\ s+n & o+p \end{pmatrix} \in M, \\ O \cdot P &= \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} op - sn & -(on+sp) \\ on+sp & op - sn \end{pmatrix} \in M \end{aligned}$$

  karena $o + p, s + n, on + sp, op - sn \in \mathbb{R}$.

- Akan ditunjukkan M berlaku sifat asosiatif terhadap $+$ dan $\cdot$. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
(O+P)+Q &= \left[\begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} o+p & -(s+n) \\ s+n & o+p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (o+p)+q & -(s+n)-r \\ (s+n)+r & (o+p)+q \end{pmatrix} \\
\\
&= \begin{pmatrix} o+(p+q) & -s-(n+r) \\ s+(n+r) & o+(p+q) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p+q & -(n+r) \\ n+r & p+q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix}\right] \\
&= O+(P+Q).
\end{aligned}
$$

Selain itu,

$$
\begin{aligned}
(O\cdot P)\cdot Q &= \left[\begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} op-sn & -on-sp \\ on+sp & op-sn \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (op-sn)q+(-on-sp)r & (op-sn)(-r)+(-on-sp)q \\ (on+sp)q+(op-sn)r & (on+sp)(-r)+(op-sn)q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} opq-snq-onr-spr & -opr+snr-onq-spq \\ onq+spq+opr-snr & -onr-spr+opq-snq \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} o(pq-nr)+(-s)(pr+nq) & o(-pr-nq)+(-s)(pq-nr) \\ o(pr+nq)+s(pq-nr) & o(pq-nr)+s(-pr-nq) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} pq-nr & -pr-nq \\ pr+nq & pq-nr \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix}\right] \\
&= O\cdot(P\cdot Q).
\end{aligned}
$$

Terbukti.

- Akan dibuktikan bahwa M memiliki elemen nol. Pilih $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$.

Karena

$$O+Y=\begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} o+0 & -s+0 \\ s+0 & o+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix}=O,$$
$$Y+O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+o & 0-s \\ 0+s & 0+o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix}=O$$

yang mana $A+Y=A=Y+A$, maka Y elemen nol di M. Notasikan $0_M=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Akan dibuktikan $(-O)\in M$, yaitu invers O terhadap operasi $+$. Tulis $B=(-O)$. Pilih $B=\begin{pmatrix} -o & s \\ -s & -o \end{pmatrix}$ yang mana memenuhi

$$O+B=\begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -o & s \\ -s & -o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} o+(-o) & -s+s \\ s+(-s) & o+(-o) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0_M$$
$$B+O=\begin{pmatrix} -o & s \\ -s & -o \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0_M.$$

Karena $O+B=0_M=B+O$, ini berarti $(-O)=B=\begin{pmatrix} -o & s \\ -s & -o \end{pmatrix}$ sebagai invers dari O terhadap operasi $+$.

- Akan dibuktikan berlaku sifat distributif. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
(O+P)\cdot Q &= \left[\begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} o+p & -s-n \\ s+n & o+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (o+p)q+(-s-n)r & (o+p)(-r)+(-s-n)q \\ (s+n)q+(o+p)r & (s+n)(-r)+(o+p)q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} oq+pq-sr-nr & -or-pr-sq-nq \\ sq+nq+or+pr & -sr-nr+oq+pq \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} oq-sr & -or-sq \\ or+sq & oq-sr \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} pq-nr & -pr-nq \\ pr+nq & pq-nr \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} \\
&= O\cdot Q+P\cdot Q
\end{aligned}$$

yang membuktikan berlaku sifat distributif kanan.

Selain itu,

$$\begin{aligned}
O \cdot (P+Q) &= \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p+q & -n-r \\ n+r & p+q \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} o(p+q) - s(n+r) & o(-n-r) - s(p+q) \\ s(p+q) + o(n+r) & s(-n-r) + o(p+q) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} op + oq - sn - sr & -on - or - sp - sq \\ sp + sq + on + or & -sn - sr + op + oq \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} op - sn & -on - sp \\ on + sp & op - sn \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} oq - sr & -or - sq \\ or + sq & oq - sr \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & -r \\ r & q \end{pmatrix} \\
&= O \cdot P + O \cdot Q
\end{aligned}$$

yang menunjukkan berlaku sifat distributif kiri.

- Terakhir, akan dibuktikan berlaku sifat komutatif terhadap operasi $+$. Tinjau

$$\begin{aligned}
O + P &= \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} o+p & -(s+n) \\ s+n & o+p \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p+o & -(n+s) \\ n+s & p+o \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \\
&= P + O.
\end{aligned}$$

Terbukti.

Jadi, M merupakan ring.

Akan dibuktikan bahwa M merupakan daerah integral. Dalam hal ini perlu dibuktikan tiga hal: M ring komutatif, memiliki elemen satuan, dan tidak memiliki pembagi nol.

- Akan dibuktikan M ring komutatif, yaitu dengan membuktikan $O \cdot P = P \cdot O$. Perhatikan bahwa

$$O \cdot P = \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} op - sn & -on - sp \\ on + sp & op - sn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} = P \cdot O.$$

Terbukti.

- Akan dibuktikan M memiliki elemen satuan. Pilih $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$. Karena
$$O \cdot Z = \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} = Z \cdot O.$$
Ini menunjukkan $1_M = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sebagai elemen satuan di M.

- Akan dibuktikan M tidak memiliki pembagi nol. Misalkan $OP = \mathbf{0}_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, akan dibuktikan bahwa $O = 0_M$ atau $P = 0_M$. Jika $O = 0_M$, maka selesai. Jika $P \neq 0_M$, ini berarti $o, s \neq 0$ dan akan dibuktikan $P = 0_M$. Tinjau
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -n \\ n & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} op - sn & -on - sp \\ on + sp & op - sn \end{pmatrix}.$$
Diperoleh sistem persamaan
$$op - sn = 0, \quad -on - sp = 0, \quad on + sp = 0, \quad op - sn = 0$$
yang berarti $op - sn = 0$ dan $on + sp = 0$. Ini ekuivalen dengan $op = sn \implies p = \frac{sn}{o}$ mengingat $o \neq 0$. Substitusikan,
$$0 = on + sp = on + s \cdot \frac{sn}{o} = \frac{o^2 n + s^2 n}{o} = \frac{(o^2 + s^2)\, n}{o} \implies o^2 + s^2 = 0 \ \vee \ n = 0.$$
Karena $o, s \neq 0$, maka $o^2 + s^2 \neq 0$ sehingga haruslah $n = 0$. Karena $n = 0$, persamaan $op - sn = 0 \implies op = 0$ sehingga $p = 0$ (karena $o \neq 0$). Oleh karena itu, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_M$.

Jadi, terbukti M merupakan daerah integral.

Akan dibuktikan M merupakan field. Dalam hal ini cukup dibuktikan bahwa setiap elemen tak nol di M merupakan unit, yakni $O^{-1} \in M$ asalkan $O \neq 0_M$. Dalam hal ini, $o, s \neq 0$ yang berarti $o^2 + s^2 > 0$ sehingga $\frac{1}{o^2+s^2} \in \mathbb{R}$. Pilih $C = \begin{pmatrix} \frac{o}{o^2+s^2} & -\frac{s}{o^2+s^2} \\ \frac{s}{o^2+s^2} & \frac{o}{o^2+s^2} \end{pmatrix} \in M$. Karena
$$O \cdot C = \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{o}{o^2+s^2} & \frac{s}{o^2+s^2} \\ -\frac{s}{o^2+s^2} & \frac{o}{o^2+s^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{o^2+s^2}{o^2+s^2} & \frac{os-os}{o^2+s^2} \\ \frac{os-os}{o^2+s^2} & \frac{o^2+s^2}{o^2+s^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_M$$
$$C \cdot O = \begin{pmatrix} \frac{o}{\sqrt{o^2+s^2}} & -\frac{s}{\sqrt{o^2+s^2}} \\ \frac{s}{\sqrt{o^2+s^2}} & \frac{o}{\sqrt{o^2+s^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} o & -s \\ s & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{o^2+s^2}{o^2+s^2} & \frac{os-os}{o^2+s^2} \\ \frac{os-os}{o^2+s^2} & \frac{o^2+s^2}{o^2+s^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_M$$
yang berarti $O \cdot C = 1_M = C \cdot O$, ini berarti $O^{-1} = C = \begin{pmatrix} \frac{o}{o^2+s^2} & -\frac{s}{o^2+s^2} \\ \frac{s}{o^2+s^2} & \frac{o}{o^2+s^2} \end{pmatrix}$. Terbukti setiap elemen tak nolnya merupakan unit. Jadi, M merupakan field. ▼

Catatan. *Bukti di atas dapat dipersingkat. Setelah membuktikan M merupakan ring, kemudian dapat dibuktikan M merupakan field. Berdasarkan* ***Teorema 11 (1)****, maka M juga merupakan daerah integral. Penjelasan lebih lanjut perhatikan* ***Contoh 4****.*

Contoh 4: UTS 2021

Diberikan himpunan $M := \left\{ \begin{pmatrix} d & j \\ -j & d \end{pmatrix} : d, j \in \mathbb{R} \right\}$. Periksa apakah terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks himpunan tersebut membentuk ring.

Solusi. Akan dibuktikan M membentuk ring. Ambil sebarang $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in M$ di mana $a, b, p, q, x, y \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa $(M, +)$ membentuk grup abelian.

- Akan dibuktikan bahwa berlaku sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan. Perhatikan bahwa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ -b-q & a+p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ -(b+q) & a+p \end{pmatrix} \in M.$$

  Jadi, berlaku sifat tertutup terhadap operasi $+$.

- Akan dibuktikan berlaku sifat asosiatif terhadap operasi $+$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ -b-q & a+p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+p+x & b+q+y \\ -b-q-y & a+p+x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Dengan cara yang sama,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p+x & q+y \\ -q-y & p+x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+p+x & b+q+y \\ -b-q-y & a+p+x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Ini menunjukkan

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \right].$$

  Jadi, terbukti berlaku sifat asosiatif terhadap operasi $+$.

- Akan dibuktikan 0_M ada. Perhatikan bahwa $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ memenuhi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Ini menunjukkan $0_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Akan dibuktikan bahwa setiap elemennya memiliki invers terhadap operasi $+$. Untuk setiap $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M$, perhatikan bahwa $\begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-b) & -a \end{pmatrix} \in M$ memenuhi
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$
Ini menunjukkan bahwa $-\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ yang artinya setiap elemen di M memiliki invers terhadap operasi $+$.

- Akan dibuktikan berlaku sifat komutatif. Perhatikan bahwa
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ -b-q & a+p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+a & q+b \\ -q-b & p+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$
Terbukti bahwa berlaku sifat komutatif terhadap operasi $+$.

Akan dibuktikan bahwa $(M, \times)$ membentuk semi-grup.

- Akan dibuktikan bahwa berlaku sifat tertutup terhadap operasi $\times$. Perhatikan bahwa
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap-bq & aq+bp \\ -aq-bp & ap-bq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap-bq & aq+bp \\ -(aq+bp) & ap-bq \end{pmatrix} \in M.$$
Jadi, terbukti bahwa berlaku sifat tertutup terhadap operasi $\times$.

- Akan dibuktikan bahwa berlaku sifat asosiatif terhadap operasi perkalian. Perhatikan bahwa
$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ap-bq & aq+bp \\ -aq-bp & ap-bq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} apx-bqx-aqy-bpy & apy-bqy+aqx+bpx \\ -aqx-bpx-apy+bqy & -aqy-bpy+apx-bqx \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Dengan cara yang sama,
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} px-qy & py+qx \\ -py-qx & px-qy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} apx-bqx-aqy-bpy & apy-bqy+aqx+bpx \\ -aqx-bpx-apy+bqy & -aqy-bpy+apx-bqx \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Ini menunjukkan
$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\right].$$
Jadi, berlaku sifat asosiatif terhadap operasi $\times$.

Terakhir, akan dibuktikan berlaku sifat distributif. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p+x & q+y \\ -q-y & p+x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap+ax-bq-by & aq+ay+bp+bx \\ -bp-bx-aq-ay & ap+ax-bq-by \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Mudah diperoleh juga

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ap-bq & aq+bp \\ -aq-bp & ap-bq \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ax-by & ay+bx \\ -ay-bx & ax-by \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap+ax-bq-by & aq+ay+bp+bx \\ -bp-bx-aq-ay & ap+ax-bq-by \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ini membuktikan bahwa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

sehingga berlaku sifat distributif kiri. Kemudian,

$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ -b-q & a+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax+px-by-qy & ay+py+bx+qx \\ -ay-py-bx-qx & ax+px-by-qy \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Mudah diperoleh juga

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ax-by & ay+bx \\ -ay-bx & ax-by \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} px-qy & py+qx \\ -py-qx & px-qy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax+px-by-qy & ay+py+bx+qx \\ -ay-py-bx-qx & ax+px-by-qy \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

sehingga berlaku sifat distributif kanan.

Jadi, terbukti bahwa $(M, +, \times)$ membentuk ring. ▼

Contoh 5: UTS 2023

Diberikan suatu himpunan

$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

dengan operasi penjumlahan $\bigoplus$ dan pergandaan $\bigotimes$ sebagai berikut:

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\bigoplus\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2},$$
$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

Selidiki apakah $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right],\bigoplus,\bigotimes\right)$ merupakan ring, field, atau daerah integral? Berikan penjelasannya.

Solusi. Untuk penyerderhanaan penulisan, misalkan $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]=R$.

R merupakan ring.

Tinjau R tak kosong karena $0=0+0\sqrt{2}\in R$. Akan dibuktikan $(R,\bigoplus)$ merupakan grup abelian.

- Ambil sebarang $a_1+b_1\sqrt{2}\in R$ dan $a_2+b_2\sqrt{2}\in R$ di mana $a_i,b_i\in\mathbb{Q}$ untuk setiap $i=1,2$, maka
$$\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\bigoplus\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}\in R$$
karena $a_1+a_2,b_1+b_2\in\mathbb{Q}$. Jadi, berlaku sifat tertutup.

- Ambil sebarang $a_1+b_1\sqrt{2},a_2+b_2\sqrt{2},a_3+b_3\sqrt{2}\in R$ di mana $a_i,b_i\in\mathbb{Q}$ untuk setiap $i=1,2,3$. Maka
$$\begin{aligned}\left[\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\bigoplus\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\right]\bigoplus\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)&=\left[(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}\right]\bigoplus\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)\\&=((a_1+a_2)+a_3)+((b_1+b_2)+b_3)\sqrt{2}\\&=(a_1+(a_2+a_3))+(b_1+(b_2+b_3))\sqrt{2}\\&=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\bigoplus\left[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\sqrt{2}\right]\\&=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\bigoplus\left[\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\bigoplus\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)\right].\end{aligned}$$
Jadi, berlaku sifat asosiatif.

- Tinjau $0=0+0\sqrt{2}$ elemen nol di $(R,\bigoplus)$ karena untuk sebarang $a+b\sqrt{2}\in R$ di mana $a,b\in\mathbb{Q}$ berlaku
$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\bigoplus\left(0+0\sqrt{2}\right)=(a+0)+(b+0)\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}=(0+a)+(0+b)\sqrt{2}=\left(0+0\sqrt{2}\right)\bigoplus\left(a+b\sqrt{2}\right).$$

- Untuk setiap $a+b\sqrt{2}\in R$ dengan $a,b\in\mathbb{Q}$, tinjau $-a+(-b)\sqrt{2}\in R$ elemen invers dari $a+b\sqrt{2}$ karena
$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\bigoplus\left(-a+(-b)\sqrt{2}\right)=(a-a)+(b-b)\sqrt{2}=0=(-a+a)+(-b+b)\sqrt{2}=\left(-a+(-b)\sqrt{2}\right)\bigoplus\left(a+b\sqrt{2}\right)$$

- Akan dibuktikan bahwa $\bigoplus$ komutatif. Ambil sebarang $a_1+b_1\sqrt{2},a_2+b_2\sqrt{2}\in R$ berlaku
$$\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\bigoplus\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\sqrt{2}=\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\bigoplus\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right).$$

Dari sini terbukti bahwa $(R,\bigoplus)$ grup abelian. Akan dibuktikan bahwa $(R,\bigotimes)$ semigrup.

- Ambil sebarang $a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2} \in R$ di mana $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ untuk setiap $i = 1, 2$. Diperoleh

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} \in R$$

  karena $a_1a_2 + 2b_1b_2 \in \mathbb{Q}$ dan $a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Q}$.

- Ambil sebarang $a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2}, a_3 + b_3\sqrt{2} \in R$ di mana $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3$. Maka

$$\begin{aligned}
&\left[\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right)\right] \bigotimes \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right) \\
&= \left[(a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}\right] \bigotimes \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right) \\
&= (a_1a_2a_3 + 2a_3b_1b_2 + 2a_1b_2b_3 + 2a_3b_1b_3) + (a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 + a_1a_2b_3 + 2b_1b_2b_3)\sqrt{2}, \\
&\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left[\left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right)\right] \\
&= \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left((a_2a_3 + 2b_2b_3) + (a_2b_3 + a_3b_2)\sqrt{2}\right) \\
&= (a_1a_2a_3 + 2a_3b_1b_2 + 2a_1b_2b_3 + 2a_3b_1b_3) + (a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 + a_1a_2b_3 + 2b_1b_2b_3)\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

  Karena berlaku

$$\left[\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right)\right] \bigotimes \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right) = \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left[\left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right)\right],$$

  ini berarti $\bigotimes$ berlaku asosiatif.

Akan dibuktikan bahwa $(R, \bigoplus, \bigotimes)$ berlaku sifat distributif kiri maupun kanan. Ambil sebarang $a_1 + b_1\sqrt{2}, a_2 + b_2\sqrt{2}, a_3 + b_3\sqrt{2} \in R$ di mana $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ untuk setiap $i = 1, 2, 3$. Maka

$$\begin{aligned}
\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left[\left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) \bigoplus \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right)\right] &= \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigoplus \left[(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\sqrt{2}\right] \\
&= (a_1a_2 + a_1a_3 + 2b_1b_2 + 2b_1b_3) \\
&\quad + (a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1)\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Di sisi lain, diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left[\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right)\right] \bigoplus \left[\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right)\right] \\
&= \left[(a_1a_2 + 2b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}\right] \bigoplus \left[(a_1a_3 + 2b_1b_3) + (a_1b_3 + a_3b_1)\right] \\
&= (a_1a_2 + a_1a_3 + 2b_1b_2 + 2b_1b_3) + (a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1)\sqrt{2} \\
&= \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigotimes \left[\left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) \bigoplus \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa pada $(R, \bigoplus, \bigotimes)$ berlaku distributif kiri. Kemudian,

$$\begin{aligned}
\left[\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \bigoplus \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right)\right] \bigotimes \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right) &= \left[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}\right] \bigotimes \left(a_3 + b_3\sqrt{2}\right) \\
&= (a_1a_3 + a_2a_3 + 2b_1b_3 + 2b_1b_2) \\
&\quad + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2)\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Di sisi lain, diperoleh

$$\begin{aligned}
&\left[\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)\right]\bigoplus\left[\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)\right]\\
&=\left[(a_1a_3+2b_1b_3)+(a_1b_3+a_3b_1)\sqrt{2}\right]\bigoplus\left[(a_2a_3+2b_2b_3)+(a_2b_3+a_3b_2)\sqrt{2}\right]\\
&=(a_1a_3+2b_1b_3+a_2a_3+2b_2b_3)+(a_1b_3+a_3b_1+a_2b_3+a_3b_2)\sqrt{2}\\
&=\left[\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\bigoplus\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\right]\bigotimes\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

sehingga berlaku distributif kanan.

Dari sini, terbukti bahwa $(R,\bigoplus,\bigotimes)$ merupakan ring.

R merupakan field dan daerah integral.

Perhatikan bahwa untuk sebarang $a_1+b_1\sqrt{2}, a_2+b_2\sqrt{2}\in R$ berlaku

$$\begin{aligned}
\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)&=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\\
&=(a_2a_1+2b_2b_1)+(b_2a_1+b_1a_2)\sqrt{2}\\
&=\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

sehingga $(R,\bigoplus,\bigotimes)$ merupakan ring komutatif. Kemudian, $1=1+0\sqrt{2}\in R$ merupakan elemen satuan di $(R,\bigotimes)$ karena untuk sebarang $a_1+b_1\sqrt{2}\in R$ dengan $a_1,b_1\in\mathbb{Q}$ berlaku

$$\left(1+0\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(1+0\sqrt{2}\right)=a_1+b_1\sqrt{2}.$$

Akan dibuktikan bahwa untuk sebarang $a+b\sqrt{2}\in R$ yang berbeda dengan elemen nol di R memiliki unit dengan $a,b\in\mathbb{Q}$. Dengan kata lain, $(a,b)\neq(0,0)$. Akan dibuktikan bahwa $a^2-2b^2\neq 0$. Jika $a=0$, maka $a^2-2b^2=-2b^2\neq 0$ karena $b\neq 0$. Jika $b=0$, maka $a^2-2b^2=a^2\neq 0$ karena $a\neq 0$. Akan ditinjau kasus saat $a,b\neq 0$. Andaikan ada $a,b\in\mathbb{Q}-\{0\}$ yang memenuhui $a^2-2b^2=0$, maka

$$a^2-2b^2=0\iff a^2=2b^2\iff 2=\frac{a^2}{b^2}\iff \pm\sqrt{2}=\frac{a}{b}$$

yang mana kontradiksi karena $a,b\in\mathbb{Q}-\{0\}\implies\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}-\{0\}$. Dari sini terbukti bahwa untuk sebarang $a+b\sqrt{2}\in R-\{0_R\}$ berlaku $a^2-2b^2\neq 0$. Perhatikan bahwa $\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in R$ karena $\frac{a}{a^2-2b^2},\frac{-b}{a^2-2b^2}\in\mathbb{Q}$. Tinjau

$$\begin{aligned}
&\left(a+b\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\right)=\left(\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\right)\bigotimes\left(a+b\sqrt{2}\right)\\
&=\left(\frac{a^2}{a^2-2b^2}+\frac{-2b^2}{a^2-2b^2}\right)+\left(\frac{ab}{a^2-2b^2}-\frac{-ab}{a^2-2b^2}\right)\sqrt{2}\\
&=1,
\end{aligned}$$

sehingga $\frac{a}{a^2-2b^2}+\frac{-b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$ merupakan elemen invers dari $a+b\sqrt{2}\in R-\{0_R\}$. Jadi, terbukti bahwa setiap elemen tak nolnya merupakan unit. Karena R merupakan field, maka R juga sekaligus merupakan daerah integral.

Jadi, R merupakan ring, field, dan daerah integral. ▼

Contoh 6

Diberikan ring $N = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\} \subseteq \mathbb{Z}_{21}$. Periksalah apakah $(N, +_{21}, \cdot_{21})$ merupakan field atau daerah integral.

Solusi. Akan dibuktikan N merupakan daerah integral. Perhatikan tabel Cayley berikut terhadap operasi $\cdot_{21}$. Dari tabel telah dibuktikan bahwa:

$\cdot_{21}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{15}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{9}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$
$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$

- Berlaku sifat komutatif.
- Terdapat elemen satuan, yaitu $\overline{15} \in N$.
- Tidak memiliki elemen pembagi nol (dilihat dari perkalian elemen tak nolnya juga hasilnya tak nol).

Jadi, N merupakan daerah integral. Karena N berhingga, menurut **Teorema 11 (2)** berlaku N field. ▼

Contoh 7: UTS 2018

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ didefinisikan

$$a \bigoplus b = a + b + 5,$$
$$a \bigotimes b = a + b + ab.$$

Selidiki apakah $(\mathbb{Z}, \bigoplus, \bigotimes)$ merupakan ring, field, atau daerah integral.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$2 \bigotimes (1 \bigoplus 5) = 2 \bigotimes (1 + 5 + 5) = 2 \bigotimes 11 = 2 + 11 + 2(11) = 35.$$

Di sisi lain,

$$(2 \bigotimes 1) \bigoplus (2 \bigotimes 5) = (2 + 1 + 2(1)) \bigoplus (2 + 5 + 2(5)) = 5 \bigoplus 17 = 5 + 17 + 5 = 27.$$

Ini menunjukkan bahwa

$$2 \bigotimes (1 \bigoplus 5) \neq (2 \bigotimes 1) \bigoplus (2 \bigoplus 5)$$

sehingga tidak berlaku distributif kiri. Jadi, $\mathbb{Z}$ tidak membentuk ring sehingga juga tidak membentuk field maupun daerah integral. ▼

Contoh 8: Kuis 2023/C

Diketahui ring $(\mathbb{R}, \bigoplus, \bigotimes)$ dengan definisi dua buah operasi pada $\mathbb{R}$ sebagai berikut.

$$p \bigoplus q = p + q + 1 \quad \text{dan} \quad p \bigotimes q = p - q + pq$$

untuk setiap $p, q \in \mathbb{R}$.

(a) Tentukan elemen identitas terhadap operasi $\bigoplus$ dan elemen satuan terhadap operasi $\bigotimes$.

(b) Tentukan bentuk general elemen invers terhadap operasi $\bigoplus$.

(c) Tentukan semua elemen pembagi nol di $\mathbb{R}$ (jika ada). Berikan alasannya.

(d) Tentukan semua elemen unit di $\mathbb{R}$ (bila ada). Berikan alasannya.

Solusi.

(a) Akan ditentukan $0_\mathbb{R}$ dan $1_\mathbb{R}$. Untuk menentukan $0_\mathbb{R}$ harus memenuhi $a \bigoplus 0_\mathbb{R} = a = 0_\mathbb{R} \bigoplus a$. Ini berarti

$$a + 0_\mathbb{R} + 1 = a = 0_\mathbb{R} + a + 1 \implies 0_\mathbb{R} = -1.$$

Jadi, elemen identitas terhadap operasi $\bigoplus$ adalah $\boxed{-1}$.
Akan ditentukan $1_\mathbb{R}$. Untuk menentukan $1_\mathbb{R}$ harus memenuhi $a \bigotimes 1_\mathbb{R} = a = 1_\mathbb{R} \bigotimes a$. Ini berarti

$$a - 1_\mathbb{R} + a1_\mathbb{R} = a = 1_\mathbb{R} - a + a1_\mathbb{R}.$$

Pandang persamaan $a - 1_\mathbb{R} + a1_\mathbb{R} = a$, ini berarti $1_\mathbb{R}(1 - a) = 0$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$. Karena berlaku untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$, haruslah $1_\mathbb{R} = 0$. Cek kembali apakah memenuhi $1_\mathbb{R} \bigotimes a = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$. Perhatikan persamaan $a = 1_\mathbb{R} - a + a1_\mathbb{R}$, yaitu

$$1_\mathbb{R} - a + a1_\mathbb{R} = 0 - a + a \cdot 0 = -a.$$

Ini menunjukkan tidak berlaku $1_\mathbb{R} - a + a1_\mathbb{R} = a$ untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$ (sebagai contoh, untuk $a = 1$). Jadi, $\boxed{\text{tidak ada}}$ elemen satuan terhadap operasi $\bigotimes$.

(b) Ambil sebarang $a \in \mathbb{R}$. Akan ditentukan $b = (-a)$, yaitu elemen invers dari a terhadap $\bigoplus$. Karena $b = (-a)$ merupakan elemen invers dari a terhadap $\bigoplus$, maka haruslah $a \bigoplus b = 0_\mathbb{R} = b \bigoplus a$. Ini berarti

$$a + b + 1 = -1 = b + a + 1.$$

Dengan memerhatikan persamaan $a + b + 1 = -1$, maka $b = -a - 2$. Cek pada persamaan $b \bigoplus a = 0_\mathbb{R}$ apakah terpenuhi, yaitu

$$b \bigoplus a = b + a + 1 = (-a - 2) + a + 1 = -1 = 0_\mathbb{R},$$

terpenuhi. Jadi, elemen invers $a \in \mathbb{R}$ terhadap operasi $\bigoplus$ adalah $\boxed{-a-2}$.

(c) Akan ditentukan semua elemen pembagi nol di $\mathbb{R}$ (jika ada). Misalkan $a \in \mathbb{R}$ merupakan elemen pembagi nol dengan $a \neq 0_{\mathbb{R}} = -1$. Maka terdapat $b \in 0_{\mathbb{R}}$ dengan $b \neq 0_{\mathbb{R}} = -1$ yang memenuhi $a \bigotimes b = 0_{\mathbb{R}} = b \bigotimes a$. Maka

$$0_{\mathbb{R}} = a \bigoplus b \implies -1 = a - b + ab \implies -2 = (a-1)(b+1).$$

Dari sini haruslah $a \neq 1$ dan $b \neq -1$ mengingat ruas kiri tak nol. Diperoleh

$$b + 1 = \frac{-2}{a-1} \implies b = \frac{-2}{a-1} - 1 = \frac{-2-(a-1)}{a-1} = \frac{-1-a}{a-1} = \frac{a+1}{1-a}.$$

Di sisi lain harus memenuhi $0_{\mathbb{R}} = b \bigoplus a$. Substitusikan,

$$\begin{aligned} -1 &= b \bigoplus a \\ -1 &= b - a + ba \\ -1 &= \frac{a+1}{1-a} - a + \frac{a^2+a}{1-a}. \end{aligned}$$

Kalikan kedua ruas dengan $(1-a)$,

$$\begin{aligned} a - 1 &= a + 1 - a(1-a) + a^2 + a \\ a - 1 &= a + 1 - a + a^2 + a^2 + a \\ &= 2a^2 + a + 1 \\ 0 &= 2a^2 + 2 \end{aligned}$$

yang mana tidak ada solusi $a \in \mathbb{R}$. Jadi, $\boxed{\text{tidak ada}}$ pembagi nol.

(d) Karena tidak adanya elemen satuan $1_{\mathbb{R}}$, maka elemen unit juga tidak dapat ditentukan.

▼

Contoh 9

Misalkan R merupakan ring dan untuk setiap $k \in R$ berlaku $k^2 = k$. Tunjukkan bahwa R merupakan ring komutatif.

Solusi. Ambil sebarang $a, b \in R$, akan dibuktikan $ab = ba$. Perhatikan bahwa $a + b \in R$. Dari asumsi soal, $(a+b)^2 = a + b$. Ini berarti

$$a + b = (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b = a^2 + ba + ab + b^2.$$

Karena $a^2 = a$ dan $b^2 = b$, maka

$$a + b = a^2 + ba + ab + b^2 = a + ba + ab + b \implies a + b = (a+b) + (ba+ab).$$

Berdasarkan **Teorema 10**, maka $0_R = ba + ab$ sehingga $ab = -ba$. Di sisi lain,

$$a + a = (a+a)^2 = (a+a)(a+a) = (a+a)a + (a+a)a = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = a + a + a + a.$$

Dari **Teorema 10** sekali lagi berlaku $0_R = a + a = 2a$. Ini menunjukkan

$$0_R = 2(ab) = ab + ab = (-ba) + ab \implies ba = ab.$$

Jadi, terbukti R merupakan ring komutatif. ▼

Contoh 10: ONMIPA 2021 Wilayah

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1_R. Jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, apakah R merupakan ring komutatif?

Solusi. Jawabannya adalah $\boxed{\text{ya}}$. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $xy = yx$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
(x + y)^2 &= (x + y)(x + y) && \text{(def)}\\
x^2 + y^2 &= (x + y)x + (x + y)y && \text{(Distributif)}\\
x^2 + y^2 &= x^2 + yx + xy + y^2. &&\\
\left(x^2 + y^2\right) + 0_R &= \left(x^2 + y^2\right) + (yx + xy) && \text{(id +)}\\
0_R &= xy + yx && \text{(Teorema 10)}\\
-xy &= yx &&
\end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in R$. Pilih $y := 1_R$, maka $-x1_R = 1_Rx \implies -x = x$ untuk sebarang $x \in R$. Oleh karena itu, $-xy = xy$ sehingga diperoleh

$$yx = -xy = xy \implies yx = xy$$

untuk setiap $x, y \in R$. Terbukti. ▼

Contoh 11

Misalkan R merupakan ring sehingga untuk setiap $a, b, c \in R$ dengan $a \neq 0_R$ yang memenuhi $ab = ca$ berakibat $b = c$. Buktikan bahwa R ring komutatif.

Solusi. Klaim R merupakan ring komutatif. Akan dibuktikan bahwa $xy = yx$ untuk setiap $x, y \in R$. Jika $x = 0_R$, maka $xy = 0_R = yx$ untuk setiap $x \in R$. Jika $x \neq 0_R$, tinjau

$$x(yx) = xyx = (xy)x \implies x(yx) = (xy)x.$$

Karena $x \neq 0_R$, menurut asumsi haruslah berlaku $yx = xy$. Terbukti bahwa R ring komutatif. ▼