Ring, Field, dan Integral

Nayaka Reswara Nararya Hidayat
Nazra Arta Mevia Agustian
Wildan Bagus Wicaksono

Definisi 1 (Ring)**.** Misalkan R merupakan himpunan tak kosong dan diberikan operasi biner $+$ dan $\cdot$. Struktur $(R, +, \cdot)$ disebut ring apabila memenuhi sifat-sifat berikut.

1. $(R, +)$ membentuk grup abelian, yaitu:
   (a) **(Tertutup $+$).** Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$.
   (b) **(Asosiatif $+$).** Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   (c) **(Id $+$).** Terdapat $x \in R$ sedemikian sehingga $a + x = a = x + a$ untuk setiap $a \in R$. Elemen tersebut dituliskan sebagai $x := 0_R$, disebut **elemen nol** di R.
   (d) **(Invers $+$).** Untuk setiap $a \in R$ terdapat $b \in R$ yang memenuhi $a + b = 0_R = b + a$. Elemen b dituliskan sebagai $b := (-a)$, disebut **elemen invers terhadap operasi penjumlahan** di R.
   (e) **(Komutatif $+$).** Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$.
2. $(R, \cdot)$ membentuk semi-grup, yaitu:
   (a) **(Tertutup $\cdot$).** Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$.
   (b) **(Asosiatif $\cdot$).** Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(ab)c = a(bc)$.
3. $(R, +, \cdot)$ berlaku sifat distributif, yaitu:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \quad (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a).$$

   Pertama disebut distributif kiri, sedangkan yang kedua disebut distributif kanan.

Definisi 2 (Ring Komutatif)**.** Ring R disebut ring komutatif apabila untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $xy = yx$.

Definisi 3 (Unsur Keatuan/Unity)**.** Diberikan ring $(R, +, \cdot)$. Jika terdapat elemen $x \in R$ sedemikian sehingga $ax = a = xa$ untuk setiap $a \in R$, maka elemen x disebut sebagai **unsur kesatuan**. Dalam hal ini, dinotasikan $x := 1_R$.

Definisi 4 (Ring dengan Satuan)**.** Ring $(R, +, \cdot)$ yang memiliki unsur satuan disebut sebagai **ring dengan kesatuan**.

Definisi 5 (Pembagi Nol)**.** Diberikan ring $(R, +, \cdot)$.

1. Elemen $a \in R$ dengan $a \neq 0_R$ disebut **pembagi nol kiri** apabila terdapat $b \in R$ dengan $b \neq 0_R$ yang memenuhi $ab = 0_R$.

2. Elemen $a \in R$ dengan $a \neq 0_R$ disebut **pembagi nol kanan** apabila terdapat $b \in R$ dengan $b \neq 0_R$ yang memenuhi ba.

3. Elemen $a \in R$ dengan $a \neq 0_R$ disebut **pembagi nol sejati** apabila terdapat $b \in R$ dengan $b \neq 0_R$ yang memenuhi $ab = 0_R = ba$.

Definisi 6 (Daerah Integral)**.** Diberikan ring komutatif $(D, +, \cdot)$ dengan elemen kesatuan. Ring D disebut **daerah integral** jika tidak memiliki pembagi nol. Ekuivalen, jika $a, b \in D$ memenuhi $ab = 0_D$ atau $ba = 0_D$ maka haruslah $a = 0_D$ atau $b = 0_D$.

Definisi 7 (Unit)**.** Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1_R. Elemen $a \in R$ yang memiliki invers terhadap operasi perkalian disebut **unsur unit** di R. Dengan kata lain, untuk setiap $a \in R$ dengan $a \neq 0_R$ terdapat $b \in R$ yang memenuhi $ab = 1_R = ba$. Dalam hal ini, $b := a^{-1}$.

Definisi 8 (Ring Pembagian/Division)**.** Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1_R. Ring R disebut **ring pembagian** jika setiap unsur taknolnya merupakan unit. Dengan kata lain, untuk setiap $a \in R$ dengan $a \neq 0_R$ berlaku $a^{-1} \in R$.

Definisi 9 (Field)**.** Misalkan F merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Ring F disebut *field* apabila setiap elemen tak nolnya merupakan unit. Dengan kata lain, untuk setiap $a \in F$ dengan $a \neq 0_F$ berlaku $a^{-1} \in F$.

Teorema 10: Hukum Kanselisasi

1. Misalkan R merupakan ring. Jika $a, b, c \in R$ memenuhi $a + b = a + c$, maka $b = c$.

2. Misalkan D merupakan daerah integral. Jika $a, b, c \in D$ di mana $a \neq 0_D$ memenuhi $ab = ac$, maka $b = c$.

Bukti. Akan dibuktikan (1). Diberikan $a + b = a + c$. Maka

$$\begin{aligned}
b &= 0_R + b && \text{(id } +) \\
&= ((-a) + a) + b && \text{(invers } +) \\
&= (-a) + (a + b) && \text{(asosiatif } +) \\
&= (-a) + (a + c) && (a + b = a + c) \\
&= ((-a) + a) + c && \text{(asosiatif } +) \\
&= 0_R + c && \text{(invers } +) \\
&= c && \text{(id } +)
\end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Akan dibuktikan (2). Perhatikan bahwa $0_D = ab - ac = a(b - c)$ menggunakan distributif. Karena D daerah integral, maka $a = 0_D$ atau $b - c = 0_D$. Mengingat $a \neq 0_D$, maka $b - c = 0_D \implies b = c$. $\square$

Teorema 11: Hubungan Field dan Daerah Integral

1. Jika F merupakan field, maka F merupakan daerah integral.
2. Jika D merupakan daerah integral **berhingga**, maka D merupakan field.

Bukti. Akan dibuktikan (1). Misalkan $a, b \in F$ memenuhi $ab = 0_F$. Cukup dibuktikan bahwa haruslah berlaku $a = 0_F$ atau $b = 0_F$. Jika $a = 0_F$, maka selesai. Andaikan $a \neq 0_F$, karena F field maka $a^{-1} \in F$. Ini berarti

$$\begin{aligned} b &= 1_R b && (\text{id } \cdot) \\ &= \left(a^{-1}a\right) b && (\text{invers } \cdot) \\ &= a^{-1}(ab) && (\text{asosiatif } \cdot) \\ &= a^{-1}0_R && (ab = 0_F) \\ &= 0_R. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa F merupakan daerah integral.
Akan dibuktikan (2). Karena D daerah integral, maka D merupakan ring komutatif dengan satuan. Misalkan $R = \{0_D, 1_R, a_3, \cdots, a_n\}$ di mana $n \geq 2$ $(1_d = a_2)$. Akan dibuktikan untuk setiap $a \in \{1_D, a_3, \cdots, a_n\}$ merupakan unit, yang mana jelas $a \neq 0_D$. Dengan kata lain, cukup dibuktikan bahwa terdapat $a_i \in \{1_D, a_3, \cdots, a_n\}$ yang memenuhi $aa_i = 1_R$. Kita klaim bahwa

$$\{a, aa_3, \cdots, aa_n\} = \{1_R, a_3, \cdots, a_n\}.$$

Andaikan tidak, maka terdapat $2 \leq i < j \leq n$ yang memenuhi $aa_i = aa_j$. Ini berarti $0 = aa_j - aa_i = a(a_j - a_i)$. Karena $a \neq 0_D$ dan D daerah integral, maka haruslah $a_j - a_i = 0_D$ sehingga $a_j = a_i$, kontradiksi. Jadi, klaim terbukti. Oleh karena itu, ini menunjukkan terdapat $2 \leq k \leq n$ yang memenuhi $aa_k = 1_D$ sehingga a merupakan unit. Terbukti D merupakan field. $\square$

Lemma 12: $\mathbb{Z}_n$ Sebagai Field dan Daerah Integral

Misalkan $n > 1$ bilangan asli dan $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$.

1. $\mathbb{Z}_n$ daerah integral jika dan hanya jika n prima.
2. $\mathbb{Z}_n$ field jika dan hanya jika n prima.

Bukti. Akan dibuktikan (1).
$(\Rightarrow)$ Diketahui $\mathbb{Z}_n$ daerah integral. Andaikan n komposit, maka $n = ab$ untuk suatu bilangan asli $1 < a \leq b < n$. Ini berarti $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$ yang mengakibatkan $\overline{a}$ pembagi nol di $\mathbb{Z}_n$, kontradiksi bahwa $\mathbb{Z}_n$ daerah integral. Jadi, haruslah n prima.
$(\Leftarrow)$ Jika n prima. Andaikan $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ bukan daerah integral, maka terdapat $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{x}, \overline{y} \neq \overline{0}$ yang memenuhi $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{0}$. Ini berarti $\overline{xy} = \overline{0}$ sehingga $n \mid xy$. Karena n prima, maka

haruslah $n \mid x$ atau $n \mid y$. Ini menunjukkan $\overline{x} = \overline{0}$ atau $\overline{y} = \overline{0}$, kontradiksi. Jadi, $\mathbb{Z}_n$ daerah integral.

Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_n$ daerah integral jika dan hanya jika n prima.

Akan dibuktikan (2). Karena $\mathbb{Z}_n$ merupakan daerah integral **berhingga**, menurut Teorema 11 berlaku $\mathbb{Z}_n$ field jika dan hanya jika n prima. Terbukti. $\square$

Lemma 13: Pembagi Nol di $\mathbb{Z}_n$

Misalkan n bilangan asli di mana $n \geq 2$. Maka $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{a} \neq \overline{0}$ merupakan pembagi nol di $\mathbb{Z}_n$ jika dan hanya jika $\text{fpb}(a, n) > 1$.

Bukti. ($\Leftarrow$) Diketahui $\text{fpb}(a, n) > 1$, misalkan $\text{fpb}(a, n) = d$. Maka terdapat bilangan asli x, y dengan $a = dx$ dan $n = dy$ yang mememnuhi $\text{fpb}(x, y) = 1$. Karena $d > 1$, maka $1 \leq y < n$ sehingga $\overline{y} \neq \overline{0}$. Karena $\overline{a} \cdot \overline{y} = \overline{dx} \cdot \overline{y} = \overline{dxy} = \overline{0}$ karena $n = dy \mid dxy$. Ini menunjukkan bahwa a pembagi nol sejati di $\mathbb{Z}_n$.

($\Rightarrow$) Diketahui $\overline{a} \neq \overline{0}$ pembagi nol sejati di $\mathbb{Z}_n$. Maka terdapat $\overline{b} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{b} \neq \overline{0}$ yang memenuhi $\overline{0} = \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{ab}$. Ini berarti $n \mid ab$. Andaikan $\text{fpb}(a, n) = 1$, berdasarkan sifat keterbagian haruslah $n \mid b$. Ini berarti $\overline{b} = \overline{0}$, kontradiksi. Jadi, $\text{fpb}(a, n) > 1$.

Terbukti bahwa $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{a} \neq \overline{0}$ merupakan pembagi nol sejati di $\mathbb{Z}_n$ jika dan hanya jika $\text{fpb}(a, n) > 1$. $\square$

Lemma 14: Unit di $\mathbb{Z}_n$

isalkan n bilangan asli di mana $n \geq 2$. Maka $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{a} \neq \overline{0}$ merupakan unit di $\mathbb{Z}_n$ jika dan hanya jika $\text{fpb}(a, n) = 1$.

Bukti. ($\Rightarrow$) Dari **Lemma 13**, jika $\text{fpb}(a, n) > 1$ berakibat $\overline{a}$ merupakan pembagi nol sehingga $\overline{a}$ bukan unit (why?). Jadi, haruslah $\text{fpb}(a, n) = 1$.

($\Leftarrow$) Jika $\text{fpb}(a, n) = 1$. Misalkan $1 = a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(n)}$ merupakan semua bilangan asli tidak lebih dari n dan memenuhi $\text{fpb}(a_i, n) = 1$ untuk $i = 1, 2, \cdots, \varphi(n)$.[*] Kita klaim bahwa

$$\left\{\overline{a}, \overline{aa_2}, \cdots, \overline{aa_{\varphi(n)}}\right\} = \{\overline{1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_{\varphi(n)}}\}.$$

Andaikan tidak, maka terdapat $1 \leq i < j \leq \varphi(n)$ yang memenuhi $\overline{aa_i} = \overline{aa_j}$. Dengan kata lain, $aa_i \equiv aa_j \pmod{n}$ sehingga

$$0 \equiv aa_j - aa_i = a(a_j - a_i) \pmod{n} \implies n \mid a(a_j - a_i).$$

Karena $\text{fpb}(a, n) = 1$, berdasarkan sifat keterbagian haruslah $n \mid a_j - a_i$. Hal ini kontradiksi karena $0 < |a_j - a_i| < n$. Klaim terbukti. Oleh karena itu, ini menunjukkan terhadap $1 \leq k \leq n - 1$ yang memenuhi $\overline{aa_k} = \overline{1}$ di mana $a_k \in \mathbb{Z}_n$. Ini menunjukkan a merupakan unit.

[*] $\varphi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli k yang tidak lebih dari n dan memenuhi $\text{fpb}(k, n) = 1$. Fungsi tersebut disebut fungsi **Euler Totient**. Jika $n \geq 2$ dan $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_m^{a_m}$ merupakan faktorisasi prima dari n, maka $\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Jadi, terbukti bahwa $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ dengan $\overline{a} \neq \overline{0}$ merupakan unit di $\mathbb{Z}_n$ jika dan hanya jika $\text{fpb}(a, n) = 1$. $\square$

Soal

1. Tentukan semua pembagi nol dan unit di $\mathbb{Z}_{15}$.
2. Periksa apakah $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ merupakan ring atau bukan di mana $+$ dan $\cdot$ merupakan operasi penjumlahan dan perkalian biasa secara berturut-turut.
3. Misalkan $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Operasi $+$ dan $\cdot$ pada M didefinisikan sebagai operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Selidiki apakah $(M, +, \cdot)$ merupakan ring, daerah integral, atau field!
4. (UTS 2021). Diberikan himpunan $M := \left\{ \begin{pmatrix} d & j \\ -j & d \end{pmatrix} : d, j \in \mathbb{R} \right\}$. Periksa apakah terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks himpunan tersebut membentuk ring.
5. (UTS 2023). Diberikan suatu himpunan
$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$
dengan operasi penjumlahan $\bigoplus$ dan pergandaan $\bigotimes$ sebagai berikut:
$$\left(a + b\sqrt{2}\right) \bigoplus \left(c + d\sqrt{2}\right) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$
$$\left(a + b\sqrt{2}\right) \bigotimes \left(c + d\sqrt{2}\right) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$
Selidiki apakah $\left(\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right], \bigoplus, \bigotimes\right)$ merupakan ring, field, atau daerah integral? Berikan penjelasannya.
6. Diberikan ring $N = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}\} \subseteq \mathbb{Z}_{21}$. Periksalah apakah $(N, +_{21}, \cdot_{21})$ merupakan field atau daerah integral.
7. (UTS 2018). Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ didefinisikan
$$a \bigoplus b = a + b + 5,$$
$$a \bigotimes b = a + b + ab.$$
Selidiki apakah $(\mathbb{Z}, \bigoplus, \bigotimes)$ merupakan ring, field, atau daerah integral.
8. (Kuic C/2023). Diketahui ring $(\mathbb{R}, \bigoplus, \bigotimes)$ dengan definisi dua buah operasi pada $\mathbb{R}$ sebagai berikut.
$$p \bigoplus q = p + q + 1 \quad \text{dan} \quad p \bigotimes q = p - q + pq$$
untuk setiap $p, q \in \mathbb{R}$.

(a) Tentukan elemen identitas terhadap operasi $\bigoplus$ dan elemen satuan terhadap operasi $\bigotimes$.

(b) Tentukan bentuk general elemen invers terhadap operasi $\bigoplus$.

(c) Tentukan semua elemen pembagi nol di $\mathbb{R}$ (jika ada). Berikan alasannya.

(d) Tentukan semua elemen unit di $\mathbb{R}$ (bila ada). Berikan alasannya.

9. Misalkan R merupakan ring dan untuk setiap $k \in R$ berlaku $k^2 = k$. Tunjukkan bahwa R merupakan ring komutatif.

10. (ONMIPA Wilayah 2023). Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1_R. Jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, apakah R merupakan ring komutatif?

11. Misalkan R merupakan ring sehingga untuk setiap $a, b, c \in R$ dengan $a \neq 0_R$ yang memenuhi $ab = ca$ berakibat $b = c$. Buktikan bahwa R ring komutatif.