Pembahasan Tugas 6: Tekhnik Pengintegralan

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Responsi Kalkulus I 2023/2024

1. (a). Tentukan $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+4x+20}\,dx$.

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

(b). Tentukan $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Wildan Bagus Wicaksono

Solusi.

(a). Perhatikan bahwa

$$\int \frac{2x+3}{x^2+4x+20}\,dx = \int \frac{(2x+4)-1}{x^2+4x+20}\,dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+20}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+4x+20}.$$

Untuk menyelesaikan $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+20}$, misalkan $u = x^2+4x+20 \implies du = (2x+4)\,dx$. Ini berarti

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+20}\,dx = \int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C_1 = \ln\left|x^2+4x+20\right| + C_1$$

di mana C_1 suatu konstan. Karena $x^2+4x+20 = (x+2)^2+16 > 0$, ini berarti $\ln\left|x^2+4x+20\right| + C_1 = \ln\left(x^2+4x+20\right) + C_1$. Untuk menyelesaikan $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$, perhatikan bahwa

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4^2}.$$

Oleh karena itu, misalkan $x+2 = 4\tan(v) \iff x = 4\tan(v)-2 \implies dx = 4\sec^2(v)\,dv$. Ini berarti

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+16} = \int \frac{4\sec^2(v)\,dv}{16\tan^2(v)+16} = \int \frac{4\sec^2(v)\,dv}{16\sec^2(v)} = \int \frac{dv}{4} = \frac{v}{4} + C_2.$$

Karena $x-2 = 4\tan(v)$, maka

$$\tan(v) = \frac{x+2}{4} \implies v = \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{4}\right).$$

Ini berarti $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+20} = \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{4}\right) + C_2$. Jadi,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+3}{x^2+4x+20}\,dx &= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+20}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+4x+20} \\
&= \ln\left(x^2+4x+20\right) + C_1 - \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{4}\right) - \frac{C_2}{4} \\
&= \boxed{\ln\left(x^2+4x+20\right) - \frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{4}\right) + C}
\end{aligned}$$

di mana $C = C_1 - \dfrac{C_2}{4}$ suatu konstan.

(b). Akan ditentukan $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Substitusikan $x = \sin(u)$, maka $dx = \cos(u)\,du$. Ini berarti

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1+\sin(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}}\cdot\cos(u)\,du = \int \frac{1+\sin(u)}{\cos(u)}\cdot\cos(u)\,du = \int \Big(1+\sin(u)\Big)\,du$$

sehingga diperoleh $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,du = u - \cos(u)$ (konstan $+C$ tidak perlu ditulis karena pada akhirnya akan menentukan integral tentu). Karena $x = \sin(u)$, maka $u = \sin^{-1}(x)$ dan $\cos(u) = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{1-x^2}$. Ini berarti

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}.$$

Jadi, hasil yang diminta adalah

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \Big[\sin^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}\Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) - \left(\sin^{-1}(0) - \sqrt{1-0^2}\right) \\
&= \left(\frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) - (0-1) \\
&= \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1}.
\end{aligned}$$

Skema Penilaian:

(a).
- Menuliskan $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+20}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+4x+20}$. **(+5)**
- Menentukan $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+4x+20}\,dx$ dengan benar. **(+5)**
- Menentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$ dengan benar. **(+5)**

(b).
- Substitusi $x = \sin(u) \implies dx = \cos(u)\,du$. **(+3)**
- Menentukan $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ dengan benar. **(+7)**
- Menentukan $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ dengan benar. **(+5)**

2. (a). Tentukan $\int x\tan^2(x)\ dx$.

Wildan Bagus Wicaksono

(b). Jika a dan b adalah bilangan real tak nol, maka buktikan bahwa

$$\int e^{ax}\sin(bx)\ dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\sin(bx)-b\cos(bx)\right]+C$$

di mana C suatu konstan.

Catatan. Dalam soal ini harus dibuktikan menggunakan metode pada tekhnik pengintegralan, bukan dengan menurunkan kedua ruas.

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Solusi.

(a) Perhatikan bahwa

$$\int x\tan^2(x)\ dx = \int x\left(\sec^2(x)-1\right)\ dx = \int x\sec^2(x)\ dx - \int x\ dx = \int x\sec^2(x)\ dx - \frac{x^2}{2}+C_1$$

di mana C_1 suatu konstan. Akan ditentukan $\int x\sec^2(x)\ dx$ menggunakan integral parsial. Misalkan $u=x \implies du=dx$ dan $dv=\sec^2(x)\ dx \implies v=\tan(x)\ dx$. Ini berarti

$$\begin{aligned}\int u\ dv &= uv-\int v\ du\\ \int x\sec^2(x)\ dx &= x\tan(x)-\int\tan(x)\ dx+C\\ &= x\tan(x)-\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx+C\end{aligned}$$

Akan ditentukan $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx$, substitusikan $p=\cos(x) \implies dp=-\sin(x)\ dx$. Ini berarti

$$\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx = \int\frac{-dp}{p} = -\ln|p|+C_2 = -\ln|\cos(x)|+C_2$$

di mana C_2 suatu konstan. Ini berarti

$$\int x\sec^2(x)\ dx = x\tan(x)-\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx = x\tan(x)+\ln|\cos(x)|-C_2.$$

Jadi,

$$\int x\tan^2(x)\ dx = x\tan(x)+\ln|\cos(x)|-C_2-\frac{x^2}{2}+C_1 = \boxed{x\tan(x)+\ln|\cos(x)|-\frac{x^2}{2}+C}$$

di mana $C=C_1-C_2$ suatu konstan.

(b) Misalkan $A = \int e^{ax}\sin(bx)\ dx$, akan diselesaikan dengan integral parsial. Pilih $u = e^{ax} \implies du = ae^{ax}\ dx$ dan $dv = \sin(bx) \implies v = -\dfrac{\cos(bx)}{b}$. Ini berarti

$$\begin{aligned}\int u\ dv &= uv - \int v\ du\\ \int e^{ax}\sin(bx)\ dx &= -\frac{e^{ax}\cos(bx)}{b} - \int -\frac{\cos(bx)}{b}\cdot ae^{ax}\ dx + C_1\\ A &= -\frac{e^{ax}\cos(bx)}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)\ dx + C_1 \qquad (1)\end{aligned}$$

dengan C_1 suatu konstan. Akan ditentukan $\int e^{ax}\cos(bx)\ dx$ menggunakan integral parsial, pilih $u_1 = e^{ax} \implies du_1 = ae^{ax}$ dan $dv_1 = \cos(bx)\ dx \implies v_1 = \dfrac{\sin(bx)}{b}$. Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}\int u_1\ dv_1 &= u_1v_1 - \int v_1\ du_1\\ \int e^{ax}\cos(bx)\ dx &= e^{ax}\cdot\frac{\sin(bx)}{b} - \int \frac{\sin(bx)}{b}\cdot ae^{ax}\ dx + C_2\\ &= \frac{e^{ax}\sin(bx)}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)\ dx + C_2\\ &= \frac{e^{ax}\sin(bx)}{b} - \frac{a}{b}A + C_2 \qquad (2)\end{aligned}$$

dengan C_2 suatu konstan. Substitusikan (2) ke (1), diperoleh

$$\begin{aligned}A &= -\frac{e^{ax}\cos(bx)}{b} + \frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}\sin(bx)}{b} - \frac{a}{b}A + C_2\right) + C_1\\ A &= -\frac{e^{ax}\cos(bx)}{b} + \frac{ae^{ax}\sin(bx)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}A + \frac{a}{b}C_2 + C_1\\ A + \frac{a^2}{b^2}A &= \frac{-be^{ax}\cos(bx) + ae^{ax}\sin(bx)}{b^2} + C_3 \qquad \left(C_3 = \frac{a}{b}C_2 + C_1\right)\\ \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)A &= \frac{e^{ax}}{b^2}\cdot(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C_3\\ \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2}\right)A &= \frac{e^{ax}}{b^2}\cdot(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C_3\\ A &= \frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{e^{ax}}{b^2}\cdot\Big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\Big) + \frac{b^2}{a^2+b^2}C_3\\ &= \boxed{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\Big) + C}\end{aligned}$$

dengan C suatu konstan.

Skema Penilaian:

(a).
- Meninjau $\int x\tan^2(x)\ dx = \int x\sec^2(x) - x\ dx$. **(+3)**
- Menuliskan hasil $\int x\sec^2(x)\ dx = x\tan(x) - \int \tan(x) + C$ menggunakan integral parsial. **(+5)**

- Menuliskan hasil akhir dengan benar. **(+2)**

(b).
- Memisalkan $A = \int e^{ax} \sin(bx)\, dx$, menggunakan integral parsial dan diperoleh sebagaimana pada (1). **(+5)**
- Menentukan $\int e^{ax} \cos(bx)\, dx$ menggunakan integral parsial kembali. **(+5)**
- Menyelesaikan A. **(+5)**

3. Tentukan $\int \sin^2(x)\cos^3(x)\ dx$.

Wildan Bagus Wicaksono

Solusi. Misalkan $u = \sin(x)$, maka $du = \cos(x)\ dx$. Selain itu, $\cos^3(x) = \cos^2(x) \cdot \cos(x) = \left(1 - \sin^2(x)\right)\cos(x)$. Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\cos^3(x)\ dx &= \int \sin^2(x) \cdot \left(1 - \sin^2(x)\right) \cdot \cos(x)\ dx \\ &= \int u^2\left(1 - u^2\right)\ du \\ &= \int \left(u^2 - u^4\right)\ du \\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \\ &= \boxed{\frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + C}\end{aligned}$$

di mana C suatu konstan.

Skema Penilaian:

- Meninjau $\sin^2(x)\cos^3(x) = \sin^2(x)\left(1 - \sin^2(x)\right)\cos(x)$. **(+5)**
- Substitusi $u = \sin(x) du = \cos(x)\ dx$. **(+3)**
- Menuliskan hasil akhir dengan benar. **(+7)**

4. Tentukan $\displaystyle\int \frac{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 5}{(x-1)^2 (x^2+1)}\, dx.$

Wildan Bagus Wicaksono

Solusi. Tulis $(x-1)^2\left(x^2+1\right) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ yang mana berderajat 4, sedangkan $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 5$ juga berderajat 4. Karena derajat pembilang lebih besar dari atau sama dengan penyebut, maka perlu dilakukan pembagian bersusun untuk mengubah bentuk pembilang menjadi polinomial yang derajatnya lebih kecil.

$$\begin{array}{r|r}
 & 2 \\ \hline
x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 & 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 5 \\
 & -\, 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 2 \\ \hline
 & x^3 \;\; + x^2 \;\; + x + 3
\end{array}$$

Jadi, $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 5$ ketika dibagi $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ memiliki hasil bagi $H(x) = 2$ dan sisa bagi $S(x) = x^3 + x^2 + x + 3$. Tulis

$$\begin{aligned}
2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 5 &= \left(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1\right) H(x) + S(x) \\
&= \left(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1\right) \cdot 2 + \left(x^3 + x^2 + x + 3\right).
\end{aligned}$$

Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^4 - 3x^2 + 5x^2 - 3x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} &= \int \frac{(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) \cdot 2 + (x^3 + x^2 + x + 3)}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}\, dx \\
&= \int \left[2 + \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}\right] dx \\
&= \int 2\, dx + \int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}\, dx \\
&= 2x + C_1 + \int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}\, dx
\end{aligned}$$

di mana C_1 suatu konstan. Akan ditentukan

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}\, dx = \int \frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x-1)^2 (x^2+1)}\, dx.$$

Tulis $g(x) = (x-1)^2\left(x^2+1\right)$ memiliki faktor linear $x - 1$ dengan pangkat tertingginya 2 dan faktor kuadratik *irreducible* $x^2 + 1$ yang pangkat tertingginya 1.

- Karena $(x-1)$ faktor linear dari $g(x)$ dengan pangkat tertingginya 2, maka pecahan parsial yang berkaitan dengan faktor ini adalah $\dfrac{P}{x-1} + \dfrac{Q}{(x-1)^2}$.
- Karena $x^2 + 1$ faktor kuadratik *irreducible* dari $g(x)$ dengan pangkat tertinggi 1, maka pecahan parsial yang berkaitan dengan faktor ini adalah $\dfrac{Rx + S}{x^2 + 1}$.

Dari dua hal di atas, tulis

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 3}{(x-1)^2 (x^2+1)} = \frac{P}{x-1} + \frac{Q}{(x-1)^2} + \frac{Rx + S}{x^2 + 1}.$$

Samakan penyebut di ruas kanan,

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x^2+x+3}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)} &= \frac{P}{x-1}+\frac{Q}{(x-1)^2}+\frac{Rx+S}{x^2+1} \\ &= \frac{P(x-1)\left(x^2+1\right)+Q\left(x^2+1\right)+(Rx+S)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)} \\ &= \frac{(P+R)x^3+(-P+Q-2R+S)x^2+(P+R-2S)x+(-P+Q+S)}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}.\end{aligned}$$

Dari sini diperoleh sistem persamaan

$$\begin{aligned} P+R &= 1 \quad \ldots(1) \\ -P+Q-2R+S &= 1 \quad \ldots(2) \\ P+R-2S &= 1 \quad \ldots(3) \\ -P+Q+S &= 3 \quad \ldots(4) \end{aligned}$$

Kurangkan persamaan (1) dan (3), dengan (1) − (3), diperoleh

$$0 = 1-1 = (P+R)-(P+R-2S) = P+R-P-R+2S = 2S \implies S = 0.$$

Substitusikan $S = 0$ pada persamaan (2) dan (4) diperoleh

$$\begin{aligned} -P+Q-2R &= 1 \quad \ldots(5) \\ -P+Q &= 3 \quad \ldots(6) \end{aligned}$$

Kurangkan persamaan (5) dan (6), degngan (6) − (5), diperoleh

$$2 = 3-1 = (-P+Q)-(-P+Q-2R) = -P+Q+P-Q+2R = 2R \implies R = 1.$$

Substitusikan nilai $R = 1$ ke (1) diperoleh $P = 1-R = 0$. Substitusikan nilai $P = 0$ ke (6) diperoleh $Q = 3+P = 3$. Jadi,

$$\frac{x^3+x^2+x+3}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)} = \frac{0}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1\cdot x+0}{x^2+1} = \frac{3}{(x-1)^2}+\frac{x}{x^2+1}.$$

Dari sini diperoleh

$$\frac{x^3+x^2+x+3}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)} = \int\left[\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{x}{x^2+1}\right]dx = 3\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\int\frac{x}{x^2+1}\,dx.$$

Akan diselesaikan $4\displaystyle\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$, misalkan $u = x-1 \implies du = dx$. Ini berarti

$$3\int\frac{dx}{(x-1)^2} = 3\int\frac{du}{u^2} = -\frac{3}{u}+C_2 = -\frac{3}{x-1}+C_2 = \frac{3}{1-x}+C_2$$

di mana C_2 suatu konstan. Akan ditentukan $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}\,dx$, misalkan $v = x^2+1 \implies dv = 2x\,dx$. Ini berarti

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+1} = \int\frac{\frac{dv}{2}}{v} = \frac{1}{2}\int\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\ln(v)+C_3 = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}+C_3$$

di mana C_3 suatu konstan. Ini berarti

$$\int \frac{2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 5}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}\,dx = \boxed{2x + \frac{3}{1-x} + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2} + C}$$

di mana $C = C_1 + C_2 + C_3$ suatu konstan.

Skema Penilaian:

- Menyatakan $2x^4-3x^3+5x^2-3x+5 = \left(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1\right)(2) + \left(x^3 + x^2 + x + 3\right)$. **(+5)**
- Menyatakan $\dfrac{x^3+x^2+x+3}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)} = \dfrac{P}{x-1} + \dfrac{Q}{(x-1)^2} + \dfrac{Rx+S}{x^2+1}$. **(+5)**
- Menyelesaikan P, Q, R, S dan menyatakan $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{x}{x^2+1}$. **(+12)**
- Menyelesaikan $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$. **(+4)**
- Menyelesaikan $\displaystyle\int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx$. **(+4)**