Pembahasan Tugas 5: Fungsi Transenden

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Responsi Kalkulus I 2023/2024

1. (a). **[10]** Tentukan turunan pertama dari $y = \left(x^2+3\right)^{x^2+1}$ dengan memanfaatkan fungsi logaritma natural dan sifat-sifatnya.

   (b). **[5]** Tentukan $\displaystyle\int_1^8 \frac{4}{x-9}\,dx$.

   (c). **[10]** Periksa apakah nilai limit $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ ada, jika ada maka tentukan nilainya.

Zahra Nazila Annisa

Solusi.

(a). Perhatikan bahwa $\ln(y) = \ln\left[\left(x^2+3\right)^{x^2+1}\right]$ sehingga $\ln(y) = \left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+3\right)$. Turunkan kedua ruas terhadap x,

$$\begin{aligned}
\frac{d\ln(y)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+3\right)\\
\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} &= 2x\cdot\ln\left(x^2+3\right)+\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{x^2+3}\cdot 2x\\
\frac{1}{(x^2+3)^{x^2+1}}\cdot\frac{dy}{dx} &= 2x\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2x\,(x^2+3)}{x^2+3}\\
\frac{dy}{dx} &= \boxed{\left[2x\ln\left(x^2+3\right)+\frac{2x\,(x^2+1)}{x^2+3}\right]\left(x^2+3\right)^{x^2+1}}
\end{aligned}$$

(b). Tulis $\displaystyle\int\frac{4}{x-9}\,dx = 4\int\frac{dx}{x-9}$. Misalkan $u = x-9$, maka $du = dx$ sehingga dieproleh

$$4\int\frac{dx}{x-9} = 4\int\frac{du}{u} = 4\ln|u| = 4\ln|x-9|.$$

Ini berarti $\displaystyle\int_1^8\frac{4}{x-9}\,dx = \left[4\ln|x-9|\right]_1^8 = 4\ln|8-9| - 4\ln|1-9| = -4\ln(8) = -4\ln\left(2^3\right) = -4\cdot 3\ln(2) = \boxed{-12\ln(2)}$.

(c). Misalkan $y = \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$, maka $\ln(y) = \ln\left[\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n\right] = n\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$. Karena ln merupakan fungsi kontinu, maka

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty} y\right) = \lim_{n\to\infty} \ln(y) = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{n}\right).$$

Misalkan $m = \dfrac{1}{n}$. Karena $n \to \infty$, maka $m = \dfrac{1}{n} \to 0^+ \implies m \to 0^+$. Sehingga diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{3}{n}\right) = \lim_{m\to 0} \frac{1}{m}\ln(1+3m) = \lim_{m\to 0^+} \frac{\ln(1+3m)}{m}.$$

Perhatikan bahwa untuk $m \to 0^+$ diperoleh $\ln(1+3m) \to \ln(1+0) = 0$, ini berarti telah memenuhi syarat L'Hopital yang mana masing-masing pembilang dan penyebutnya menuju ke 0. Jadi,

$$\lim_{m\to 0^+} \frac{\ln(1+3m)}{m} \overset{\text{L}}{=} \lim_{m\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+3m}\cdot 3}{1} = \lim_{m\to 0^+} \frac{3}{1+3m} = \frac{3}{1+0} = 3.$$

Ini berarti $\ln\left(\lim_{n\to\infty} y\right) = 3$, maka $\lim_{n\to\infty} y = \boxed{e^3}$.

Skema Penilaian:

(a).
- Menuliskan $\ln(y) = \left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+3\right)$. **(+2)**
- Menuliskan $\dfrac{d}{dx}\ln(y) = \dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}$ dengan benar. **(+2)**
- Menuliskan $\dfrac{d}{dx}\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+3\right)$ dengan benar. **(+3)**
- Menuliskan hasil akhir dengan benar. **(+3)**

(b).
- Memisalkan $u = x-9$ dan mendapatkan $du = dx$. **(+1)**
- Menuliskan hasil integral tak tentu $\displaystyle\int \frac{4}{x-9}\,dx$ dengan benar. **(+2)**
- Menuliskan hasil akhir dengan benar. **(+2)**

(c).
- Memisalkan $y = \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$ dan $\ln(y) = n\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$ dengan benar. **(+2)**
- Menuliskan $\ln\left(\displaystyle\lim_{n\to\infty} y\right) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{n}\right)$. **(+3)**
- Menuliskan $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right) = 3$. **(+3)**
- Menyimpulkan $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y = e^3$. **(+2)**

2. (a). [**10**] Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di mana $f(x) = \sqrt[3]{(e^{4x} + 3x^2)^2}$. Tentukan nilai dari $f'(0)$.

   (b). [**15**] Tentukan nilai dari $\int \left(5x \cdot 3^{x^2}\right)\, dx$.

Zahra Nazila Annisa

Solusi.

(a). Perhatikan bahwa $f(x) = \left(e^{4x} + 3x^2\right)^{\frac{2}{3}}$, maka

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(e^{4x} + 3x^2\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(4e^{4x} + 6x\right) \implies f'(0) = \frac{2}{3}(1+0)^{-\frac{1}{3}} \cdot (4+0) = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 4 = \boxed{\frac{8}{3}}.$$

(b). Substitusi $u = x^2$, maka $du = 2x\, dx$. Ini berarti

$$\int 5x \cdot 3^{x^2}\, dx = \int 5x \cdot 3^u \cdot \frac{du}{2x} = \frac{5}{2}\int 3^u\, du = \frac{5}{2\ln(3)} \cdot 3^u + C = \boxed{\frac{5}{2\ln(3)} \cdot 3^{x^2} + C}$$

di mana C suatu konstan.

Skema Penilaian:

(a).
- Menentukan $f'(x)$ dengan benar. **(+8)**
- Menentukan $f'(0)$ dengan benar. **(+2)**

(b).
- Substitusi $u = x^2$ dan $du = 2x\, dx$. **(+5)**
- Menentukan $\int 3^u\, du = 3^u \ln(3)$ dengan benar. **(+5)**
- Menuliskan hasil akhir $\frac{5}{2\ln(3)} \cdot 3^{x^2} + C$ dengan benar. **(+5)**
- Apabila tidak dituliskan $+C$ pada hasil akhir. **(-1)**

3. (a). **[10]** Didefinisikan $f : [3, \infty) \to [3, \infty)$ dengan $f(x) = x^2 - 6x + 12$ untuk setiap $x \geq 3$. Buktikan bahwa f memiliki fungsi invers, kemudian tentukan turunan pertama dari fungsi $f^{-1} : [3, \infty) \to [3, \infty)$.

   (b). **[15]** Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ apabila diketahui $\cos^2(5x) = \tan^{-1}\left(2x^3y^2\right)$.

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Solusi.

(a). Untuk menunjukkan f memiliki fungsi invers, maka perlu dibuktikan bahwa f bersifat bijektif. Mengingat f kontinu di $[3, \infty)$, maka dari itu cukup dibuktikan bahwa f monoton di $[3, \infty)$. Karena $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3) > 0$ untuk setiap $x > 3$ dan $f'(x) = 0$ untuk $x = 3$, maka dari itu dapat disimpulkan f monoton naik di interval $[3, \infty)$. Karena f monoton, maka f memiliki fungsi invers.

Misalkan $f^{-1}(x) = y$, maka $x = f(y) = y^2 - 6y + 12$ yang ekuivalen dengan $0 = y^2 - 6y + (12 - x)$. Untuk menyelesaikan y dapat menggunakan formula kuadratik ABC, yaitu

$$\begin{aligned}
y_{1,2} &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(12 - x)}}{2(1)} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 48 + 4x}}{2} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{4x - 12}}{2} \\
&= \frac{6 \pm 2\sqrt{x - 3}}{2} \\
&= 3 \pm \sqrt{x - 3}.
\end{aligned}$$

Karena kodomain dari f^{-1} adalah $[3, \infty)$, maka dari itu haruslah $y = 3 + \sqrt{x - 3}$, sebab $3 - \sqrt{x - 3} < 3$ yang mana nilainya tidak terletak di $[3, \infty)$. Ini berarti

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{d}{dx}\left(3 + (x - 3)^{\frac{1}{2}}\right) = 0 + \frac{1}{2}(x - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x - 3}}}.$$

(b). Turunkan kedua ruas terhadap x, yaitu

$$\frac{d}{dx}\cos^2(5x) = \frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(2x^3y^2\right).$$

Ingat bahwa $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ dan menggunakan fakta $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

(bukti telah diberikan di modul), diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos^2(5x) &= \frac{d}{dx}\tan^{-1}(2x^3y^2) \\
-10\cos(5x)\sin(5x) &= \frac{1}{(2x^3y^2)^2+1}\frac{d}{dx}(2x^3y^2) \\
-5\sin(10x) &= \frac{1}{4x^6y^4+1}\left(6x^2y^2+4x^3y\frac{dy}{dx}\right) \\
-(4x^6y^4+1)(5\sin(10x)) &= 6x^2y^2+4x^3y\frac{dy}{dx} \\
-(4x^6y^4+1)(5\sin(10x))-6x^2y^2 &= 4x^3y\frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= \boxed{-\frac{5(4x^6y^4+1)\sin(10x)+6x^2y^2}{4x^3y}}
\end{aligned}$$

Skema Penilaian:

(a).
- Membuktikan f monoton naik. **(+2)**
- Mendapatkan $y_{1,2} = 3 \pm \sqrt{x-3}$. **(+3)**
- Menyimpulkan solusi $y = 3 + \sqrt{x-3}$ yang memenuhi dengan tepat. **(+3)**
- Menentukan $f'(x)$ dengan benar. **(+2)**

(b).
- Menentukan $\frac{d}{dx}\cos^2(5x) = -10\cos(5x)\sin(5x)$ dengan benar. **(+4)**
- Menggunakan sifat $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{x^2+1}$. **(+3)**
- Menuliskan $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(2x^3y^2\right) = \frac{1}{4x^6y^4+1}\cdot\frac{d}{dx}\left(2x^3y^2\right)$. **(+3)**
- Menuliskan $\frac{d}{dx}\left(2x^3y^2\right) = 6x^2y^2 + 4x^3y\,\frac{dy}{dx}$. **(+3)**
- Menuliskan $\frac{dy}{dx}$ dengan benar. **(+2)**

4. (a). Menggunakan definisi fungsi trigonometri hiperbolik, tunjukkan bahwa $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ untuk x bilangan real.

   (b). Jika $g(x) = e^x \sinh(x)\cosh(x)$, maka buktikan bahwa $g'(x) - g(x) = e^x \cosh(2x)$.

   (c). Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{cosech}(x) + \sinh(x)}$.

Wildan Bagus Wicaksono

Solusi.

(a). Dari definisi $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ dan $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) = \sinh^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2\cdot e^x \cdot e^{-x}}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2\cdot e^x \cdot e^{-x}}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^{2x} + e^{-2x} - 2)}{4} \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2}{4} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(b). **Cara 1.** Misalkan $u = e^x$ dan $v = \sinh(x)\cosh(x)$, maka $u' = e^x$ dan

$$v' = \cosh(x)\cdot\cosh(x) + \sinh(x)\cdot\sinh(x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x). \qquad (*)$$

Dari sifat $(uv)' = u'v + uv'$ diperoleh

$$g'(x) = e^x(x)\cosh(x) + e^x\cosh(2x) = g(x) + e^x\cosh(2x) \implies g'(x) - g(x) = e^x\cosh(2x)$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Tips. Apabila pembaca tidak dapat mengingat identitas $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$, pembaca dapat membuktikannya menggunakan definisi dengan meninjau

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \cosh(2x).$$

Cara 2. Perhatikan bahwa $\sinh(x)\cosh(x) = \dfrac{1}{2}\sinh(2x)$, tulis $g(x) = \dfrac{e^x \sinh(2x)}{2}$. Berdasarkan sifat $(uv)' = u'v + uv'$ dapat diperoleh

$$g'(x) = \frac{e^x \cdot \sinh(2x) + e^x \cdot \cosh(2x)\cdot 2}{2} = \frac{e^x \sinh(2x)}{2} + e^x\cosh(2x) = g(x) + e^x\cosh(2x).$$

Dari sini diperoleh $g'(x) - g(x) = \cosh(2x)$ seperti yang ingin dibuktikan.

Tips. Pembaca juga dapat membuktikan bahwa $\sinh(x)\cosh(x) = \dfrac{\sinh(2x)}{2}$ menggunakan definisi, atau menggunakan sifat penjabaran $\sinh(x+y)$.

(c). Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{\operatorname{cosech}(x)+\sinh(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\sinh(x)}+\sinh(x)} = \frac{\sinh(x)}{1+\sinh^2(x)} = \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}.$$

Ini berarti

$$\int \frac{dx}{\operatorname{cosech}(x)+\sinh(x)} = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}\ dx.$$

Misalkan $u = \cosh(x)$, maka $\frac{du}{dx} = \sinh(x) \iff du = \sinh(x)\ dx$. Dari sini diperoleh

$$\int \frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}\ dx = \int \frac{\sinh(x)\ dx}{\cosh^2(x)} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}+C = -\frac{1}{\cosh(x)}+C = \boxed{-\operatorname{sech}(x)+C}.$$

Tips. Untuk menentukan integral dari fungsi trigonometri maupun fungsi trigonometri hiperbolik, coba kembalikan ke dalam bentuk $\sin(x)$, $\cos(x)$ atau $\sinh(x)$, $\cosh(x)$.

Remark. Soal bagian (c) mengalami perubahan dengan soal semula, yakni $\int \frac{dx}{\operatorname{sech}(x)+\cosh(x)}$. Dari sini diperoleh

$$\frac{1}{\operatorname{sech}(x)+\cosh(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cosh(x)}+\cosh(x)} = \frac{\cosh(x)}{\cosh^2(x)+1} = \frac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)+2}$$

karena $\cosh^2(x) = \sinh^2(x)+1$ berdasarkan bagian (a). Misalkan $u = \sinh(x)$, maka $du = \cosh(x)\ dx$ sehingga

$$\int \frac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)+2}\ dx = \int \frac{\cosh(x)\ dx}{\sinh^2(x)+2} = \int \frac{du}{u^2+2}.$$

Substitusi $u = \sqrt{2}\tan(v) \implies du = \sqrt{2}\sec^2(v)\ dv$, maka

$$\int \frac{du}{u^2+2} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2(v)\ dv}{2\tan^2(v)+2} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2(v)}{2\sec^2(v)} = \int \frac{\sqrt{2}}{2}\ dv = \frac{\sqrt{2}}{2}v + C$$

di mana C suatu konstan. Dari sini diperoleh

$$\tan(v) = \frac{u}{\sqrt{2}} \implies v = \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sinh(x)}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Jadi, $\int \frac{dx}{\operatorname{sech}(x)+\cosh(x)} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sinh(x)}{\sqrt{2}}\right)+C}$.

Skema Penilaian:

(a). Menyelesaikan bagian (a). **(+5)**

(b). Apabila menggunakan Cara 1:

- Menuliskan $g'(x) = e^x\cosh(x) + e^x\sinh^2(x) + e^x\cosh^2(x)$. **(+3)**
- Menuliskan $\cosh^2(x)+\sinh^2(x)$. **(+5)**

- Menunjukkan bahwa $g'(x) - g(x) = e^x \cosh(2x)$. **(+2)**

Apabila menggunakan Cara 2:

- Menuliskan $\sinh(x)\cosh(x) = \dfrac{\sinh(2x)}{2}$. **(+5)**
- Menuliskan $g'(x) = \dfrac{e^x \sinh(2x)}{2} + e^x \cosh(2x)$. **(+3)**
- Menunjukkan bahwa $g'(x) - g(x) = e^x \cosh(2x)$. **(+2)**

(c).
- Menuliskan $\dfrac{1}{\text{cosech}(x) + \sinh(x)} = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$. **(+5)**
- Melakukan substitusi $u = \cosh(x)$ sehingga diperoleh $\displaystyle\int \frac{\sinh(x)}{{}^2(x)}\ dx = \int \frac{du}{u^2}$. **(+3)**
- Menyelesaikan pengintegralan. **(+2)**
- Apabila berhasil menyelesaikan semua proses tapi tidak menuliskan $+C$. **(-1)**