Pembahasan Tugas 4: Integral Tentu dan Integral Tak Tentu

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Responsi Kalkulus I 2023/2024

1. Jika diketahui $f'(x) = 5x^3 - \sqrt[3]{x^2} + \sin(x)$, maka :

   (a). Tentukan $f(x)$ jika nilai dari $f(0) = -2$.

   (b). Tentukan $f(\pi)$.

Zahra Nazila Annisa

Solusi.

(a). Perhatikan bahwa

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int \left(5x^3 - \sqrt[3]{x^2} + \sin(x)\right)\, dx = \frac{5x^4}{4} - \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} - \cos(x) + c$$

di mana c suatu konstan. Karena $f(0) = -2$, dari sini diperoleh

$$\begin{aligned} f(0) &= -2 \\ \frac{5(0)^4}{4} - \frac{3(0)^{\frac{5}{3}}}{5} - \cos(0) + c &= -2 \\ 0 - 0 - 1 + c &= -2 \Longrightarrow c = -1. \end{aligned}$$

Didapatkan $\boxed{f(x) = \frac{5x^4}{4} - \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} - \cos(x) - 1}$.

(b). Dari sini diperoleh

$$f(\pi) = \frac{5\pi^4}{4} - \frac{3\pi^{\frac{5}{3}}}{5} - \cos(\pi) - 1 \Longrightarrow \boxed{f(\pi) = \frac{5\pi^4}{4} - \frac{3\pi^{\frac{5}{3}}}{5}}$$

Skema Penilaian:

(a).
- Mendapatkan $f(x) = \frac{5x^4}{4} - \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} - \cos(x) + c$ dengan c konstan. **(+15)** Apabila tidak menuliskan $+c$. **(+10)**
- Mendapatkan nilai C. **(+5)**

(b). Mendapatkan $f(\pi)$. **(+5)**

2. (a). Tentukan nilai $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2 + \sin(x)\right)\, dx$.

   (b). Diberikan fungsi $f(x)$ dan fungsi $g(x)$ di mana masing-masing kontinu di interval $[-2, 2]$. Jika

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\, dx = -3, \quad \int_{-2}^{-1} g(x)\, dx = 1, \quad \int_{-1}^{2} f(x)\, dx = 4, \quad \int_{-1}^{2} g(x)\, dx = 5,$$

   tentukan nilai dari $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left(f(x) + 2g(x)\right)\, dx$.

Wildan Bagus Wicaksono

Solusi.

(a). Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \left(x^2 + \sin(x)\right)\, dx &= \int_{-1}^{1} x^2\, dx + \int_{-1}^{1} \sin(x)\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + [\cos(x)]_{-1}^{1} \\
&= \left[\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right] + \cos(1) - \cos(-1) \\
&= \frac{2}{3} + \cos(1) - \cos(1) \\
&= \boxed{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

(b). Perhatikan bahwa

$$\int_{-2}^{2} \left(f(x) + 2g(x)\right)\, dx = \int_{-2}^{2} f(x)\, dx + \int_{-2}^{2} 2g(x)\, dx = \int_{-2}^{2} f(x)\, dx + 2\int_{-2}^{2} g(x)\, dx.$$

Dari soal, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} f(x) &= \int_{-2}^{-1} f(x)\, dx + \int_{-1}^{2} f(x)\, dx = -3 + 4 = 1 \\
\int_{-2}^{2} g(x) &= \int_{-2}^{-1} g(x)\, dx + \int_{-1}^{2} g(x)\, dx = 1 + 5 = 6.
\end{aligned}$$

Jadi, didapatkan $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left(f(x) + 2g(x)\right)\, dx = 1 + 2(6) = \boxed{13}$.

Skema Penilaian:

(a).
- Menentukan $\displaystyle\int \left(x^2 + \sin(x)\right)\, dx$ dengan benar. **(+8)**

- Menuliskan hasil akhir dengan benar. **(+4)**

(b).
- Menuliskan $\int\limits_{-2}^{2} f(x) = \int\limits_{-2}^{-1} f(x)\, dx + \int\limits_{-1}^{2} f(x)\, dx$. **(+5)**
- Menuliskan $\int\limits_{-2}^{2} g(x) = \int\limits_{-2}^{-1} g(x)\, dx + \int\limits_{-1}^{2} g(x)\, dx$. **(+5)**
- Menuliskan hasil akhir dengan benar. **(+3)**

3. Gunakan teorema fundamental untuk menentukan nilai $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ di mana fungsi f memenuhi

$$\int_0^{\frac{1}{2}x} f(4t)\,dt = \sin^2(x) + 3\int_{\frac{1}{2}x}^{0} \frac{f(4t)}{t-3}\,dt.$$

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Solusi. Untuk mendapatkan fungsi $f(x)$, maka langkah pertama yang dapat dilakukan adalah dengan menyatukan terlebih dahulu integralnya. Kemudian kedua ruas diturunkan terhadap x agar berlaku teorema fundamental untuk persamaan di soal.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}x} f(4t)\,dt &= \sin^2(x) + 3\int_{\frac{1}{2}x}^{0} \frac{f(4t)}{t-3}\,dt \\
\int_0^{\frac{1}{2}x} f(4t)\,dt &= \sin^2(x) - \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{3f(4t)}{t-3}\,dt \\
\int_0^{\frac{1}{2}x} \left[f(4t) + \frac{3f(4t)}{t-3}\right]\,dt &= \sin^2(x) \\
\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\frac{1}{2}x} \left[f(4t) + \frac{3f(4t)}{t-3}\right]\,dt\right) &= \frac{d}{dx}\left(\sin^2(x)\right) \\
\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\frac{1}{2}x} \left[\frac{f(4t)(t-3) + 3f(4t)}{t-3}\right]\,dt\right) &= \sin(2x) \\
\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{tf(4t)}{t-3}\,dt\right) &= \sin(2x).
\end{aligned}$$

Dari proses ini kita perlu memisalkan $u = \frac{1}{2}x$, sehingga didapatkan $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$. Berarti

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\left(\int_0^{u} \frac{tf(4t)}{t-3}\,dt\right)\frac{du}{dx} &= \sin(2x) \\
\frac{uf(4u)}{u-3}\cdot\frac{1}{2} &= \sin(2x) \\
f(4u) &= \left(\frac{2u-6}{u}\right)\sin(2x) \\
f(2x) &= \left(\frac{2x-12}{x}\right)\sin(2x).
\end{aligned}$$

DUntuk memperoleh $f(x)$ dapat dilakukan dengan cara

$$\begin{aligned} f(2x) &= \left(\frac{(2x)-12}{\frac{1}{2}(2x)}\right)\sin(2x) \\ f(x) &= \left(\frac{x-12}{\frac{1}{2}x}\right)\sin(x) \\ f(x) &= \left(\frac{2x-24}{x}\right)\sin(x). \end{aligned}$$

Langkah terakhir adalah dengan melakukan substitusi $x = \dfrac{\pi}{4}$, sehingga diperoleh

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\frac{2\pi}{4}-24}{\frac{\pi}{4}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-24\right)\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi-48}{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{2} = \left(\frac{\pi-48}{\pi}\right)\sqrt{2}.$$

Jadi, $\boxed{f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\pi-48}{\pi}\right)\sqrt{2}}$.

Catatan. Setelah menemukan $f(2x) = \dfrac{2x-12}{x}\sin(2x)$ dapat disubstitusikan $x = \dfrac{\pi}{8}$, dari sini diperoleh

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\cdot\frac{\pi}{8}-12}{\frac{\pi}{8}}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}-12}{\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi-48}{\pi}\sqrt{2}.$$

Skema Penilaian:

- Menuliskan $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}x}^{0}\frac{f(4t)}{t-3}\,dt = -\int_{0}^{\frac{1}{2}x}\frac{f(4t)}{t-3}\,dt.$ **(+8)**
- Menerapkan teorema fundamental dan menemukan $f(2x) = \dfrac{2x-12}{x}\sin(2x)$. **(+15)**
- Terdapat dua alternatif penilaian.
  - Apabila mencari $f(x) = \dfrac{2x-24}{x}\sin(x)$ dengan tepat. **(+5)**
    Menemukan hasil akhir. **(+2)**
  - Apabila menemukan $f(2x)$ dan mensubtitusikan $x = \dfrac{\pi}{8}$. **(+5)**
    Menuliskan hasil akhir dengan benar. **(+2)**

4. Tentukan nilai $\displaystyle\int_{-3}^{2} \left|x^2-1\right|\ dx$.

Wildan Bagus Wicaksono

Solusi. Perhatikan bahwa $x^2-1 \geq 0 \iff x \leq -1 \vee x \geq 1$ dan $x^2-1<0 \iff -1<x<1$. Diperoleh bahwa $\left|x^2-1\right| = x^2-1$ saat $x \leq -1$ atau $x \geq 1$, sedangkan $\left|x^2-1\right| = 1-x^2$ saat $-1<x<1$. Dari sini dapat disimpulkan bahwa

$$\left|x^2-1\right| = \begin{cases} x^2-1, & \text{jika} \quad x \leq -1 \\ 1-x^2, & \text{jika} \quad -1<x<1 \\ x^2-1, & \text{jika} \quad x \geq 1 \end{cases}. \tag{$*$}$$

Dapat dicek bahwa $\left|x^2-1\right|$ merupakan fungsi yang kontinu dengan tiga syarat kekontinuan (diserahkan kepada pembaca). Jadi,

$$\int_{-3}^{2} \left|x^2-1\right|\ dx = \int_{-3}^{-1} \left|x^2-1\right|\ dx + \int_{-1}^{1} \left|x^2-1\right|\ dx + \int_{1}^{2} \left|x^2-1\right|\ dx.$$

Dari $(*)$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{2} \left|x^2-1\right|\ dx &= \int_{-3}^{-1} \left|x^2-1\right|\ dx + \int_{-1}^{1} \left|x^2-1\right|\ dx + \int_{1}^{2} \left|x^2-1\right|\ dx \\
&= \int_{-3}^{-1} \left(x^2-1\right)\ dx + \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)\ dx + \int_{1}^{2} \left(x^2-1\right)\ dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-3}^{-1} + \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{2} \\
&= \left[\left(\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right)-\left(\frac{(-3)^3}{3}-(-3)\right)\right] + \left[\left(1-\frac{1^3}{3}\right)-\left((-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)\right] \\
&\quad + \left[\left(\frac{2^3}{3}-2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)\right] \\
&= \left[\frac{2}{3}-(-6)\right] + \left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right] + \left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right] \\
&= \frac{20}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3} \\
&= \boxed{\frac{28}{3}}.
\end{aligned}$$

Skema Penilaian:

- Menentukan bentuk yang ekuivalen dengan $\left|x^2-1\right|$ berdasarkan batas nilai x. **(+5)**
- Menuliskan $\displaystyle\int_{-3}^{2} \left|x^2-1\right|\ dx = \int_{-3}^{-1} \left|x^2-1\right|\ dx + \int_{-1}^{1} \left|x^2-1\right|\ dx + \int_{1}^{2} \left|x^2-1\right|\ dx$. **(+7)**

- Melakukan proses pengintegralan masing-masing dengan benar. **(+6, masing-masing 2)**
- Menuliskan hasil akhir dengan benar. **(+2)**