Pembahasan Tugas 3: Aplikasi Turunan

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Responsi Kalkulus I 2023/2024

1. (a). Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y + \sin(xy^2) + 3x^2 = 6xy^2 + 3$ menggunakan turunan implisit.

   (b). Tentukan persamaan garis singgung $y + \sin\left(xy^2\right) + 3x^2 = 6xy^2 + 3$ di titik $(1, 0)$.

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Solusi.

(a). Akan ditentukan $\frac{dy}{dx}$, kedua ruas pada persamaan diturunkan terhadap x.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(y + \sin\left(xy^2\right) + 3x^2\right) &= \frac{d}{dx}\left(6xy^2 + 3\right) \\
\frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}\sin\left(xy^2\right) + \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) &= \frac{d}{dx}6xy^2 + \frac{d}{dx}3 \\
\frac{dy}{dx} + \cos\left(xy^2\right)\frac{d}{dx}\left(xy^2\right) + 6x &= 6y^2 + 12xy\frac{dy}{dx} + 0 \\
\frac{dy}{dx} + \cos\left(xy^2\right)\left(y^2 + 2xy\frac{dy}{dx}\right) + 6x &= 6y^2 + 12xy\frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} + y^2\cos\left(xy^2\right) + 2xy\cos\left(xy^2\right)\frac{dy}{dx} + 6x &= 6y^2 + 12xy\frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} + 2xy\cos\left(xy^2\right)\ \frac{dy}{dx} - 12xy\ \frac{dy}{dx} &= 6y^2 - y^2\cos\left(xy^2\right) - 6x \\
\left(1 + 2xy\cos\left(xy^2\right) - 12xy\right)\frac{dy}{dx} &= 6y^2 - y^2\cos\left(xy^2\right) - 6x \\
\frac{dy}{dx} &= \boxed{\frac{6y^2 - y^2\cos\left(xy^2\right) - 6x}{2xy\cos\left(xy^2\right) - 12xy + 1}}.
\end{aligned}$$

(b). Sebelum mencari persamaan garis singgung, harus ditentukan gradiennya di titik $(1, 0)$, yaitu :

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(1,0)} = \frac{6\cdot 0^2 - 0^2\cos\left(1\cdot 0^2\right) - 6\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 0\cos\left(1\cdot 0^2\right) - 12\cdot 1\cdot 0 + 1} = -6.$$

Maka persamaan garis singgung di titik $(x_0, y_0) = (1, 0)$ adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0) \implies y - 0 = -6(x - 1) \implies \boxed{y = -6x + 6}$$

Skema Penilaian :

(a) Menyelesaikan turunan implisit dengan langkah yang benar **(+10)**

(b)
- Mendapatkan gradien untuk persamaan tersebut, yaitu -6 **(+5)**
- Mendapatkan persamaan garis singggung $y = -6x + 6$. **(+5)**

2. Sebuah tabung tanpa tutup memiliki panjang jari-jari alas 10 cm dan tinggi 5 cm. Tabung tersebut diisi oleh air melalui selang dari atas. Jika perubahan kecepatan tinggi air adalah $\frac{1}{5}$ cm/detik, tentukan perubahan volume saat ketinggian air mencapai 2 cm.

   Wildan Bagus Wicaksono

   Solusi. Misalkan T menyatakan ketinggian air dan t menyatakan suatu waktu. Karena ketinggian air **berubah terhadap waktu**, ini berarti T merupakan fungsi dalam t, yaitu $T = T(t)$. Perhatikan bahwa perubahan ketinggian air adalah $\frac{1}{5}$ cm/detik, ini berarti $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{5}$ cm/detik. Karena volume air juga **berubah terdapat waktu**, ini berarti volume tabung V juga merupakan fungsi dalam t, yaitu $V = V(t)$. Akan ditentukan $\frac{dV}{dt}(2)$. Tinjau volume tabung pada suatu waktu t adalah

$$V(t) = \pi \cdot 10^2 \cdot T(t) = 100\pi T(t).$$

   Dari sini diperoleh

$$\frac{dV}{dt} = 100\pi \cdot \frac{dT}{dt} = 100\pi \cdot \frac{1}{5} = 20\pi \text{ cm}^3/\text{detik}.$$

   Dari sini diperoleh $\frac{dV}{dt} = \boxed{20\pi \text{ cm}^3/\text{detik}}$.

   Skema Penilaian:

   - Mendapatkan $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{5}$ cm/ detik. **(+10)**
   - Mendapatkan $\frac{dV}{dt} = 20\pi$ cm^3/detik. **(+5)**
   - Menyimpulkan $\frac{dV}{dt}(2) = 2\pi$ cm^3/detik. **(+5)**

3. Gunakan L'Hopital untuk menentukan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\tan(x) - 2x}{x^2 + x}.$$

Petunjuk: Cek syarat-syarat yang harus dipenuhi terlebih dahulu sebelum menggunakan L'Hopital. *Wildan Bagus Wicaksono*

Solusi. Perhatikan bahwa $\lim_{x\to 0} (\sin(x)\tan(x) - 2x) = \sin(0)\tan(0) - 2(0) = 0$ dan $\lim_{x\to 0} \left(x^2 + x\right) = 0^2 + 0 = 0$. Hal ini akan menghasilkan bentuk $\frac{\sin(x)\tan(x) - 2x}{x^2 + x} = \frac{0}{0}$ apabila disubstitusikan $x = 0$. Perhatikan bahwa fungsi $\sin(x)$, $\tan(x)$, $2x$ masing-masing terdiferensialkan. Ini berarti $\sin(x)\tan(x) - 2x$ juga terdiferensial. Kemudian, $x^2 + x$ cukup jelas terdiferensial karena fungsi polinomial.

Menurut L'Hopital berlaku

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\tan(x) - 2x}{x^2 + x} &\overset{\text{L}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\tan(x) + \sin(x)\sec^2(x) - 2}{2x + 1} \\
&= \frac{\cos(0)\tan(0) + \sin(0)\sec^2(0) - 2}{2(0) + 1} \\
&= \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1^2 - 2}{1} \\
&= \boxed{-2}.
\end{aligned}$$

Skema Penilaian:

- Mengecek bahwa $\lim_{x\to 0} \sin(x)\tan(x) - 2x) = 0$ dan $\lim_{x\to 0} \left(x^2 + x\right) = 0$. **(+7)**
- Mengecek $\sin(x)\tan(x) - 2x$ dan $x^2 + x$ masing-masing terdiferensial. **(+3)**
- Menyelesaikan soal dengan L'Hopital. **(+10)**

4. Diberikan $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$.

   (a). Tentukan semua asimtot datar, asimtot tegak, dan asimtot miring dari $y = f(x)$.

   (b). Tentukan interval di mana $f(x)$ merupakan fungsi naik dan fungsi turun.

   (c). Tentukan interval di mana grafik $y = f(x)$ cekung ke atas dan cekung ke bawah.

   (d). Memanfaatkan bagian (a), (b), dan (c), gambarkan grafik dari $y = f(x)$.

Wildan Bagus Wicaksono

Solusi. Perhatikan bahwa $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Tinjau perpotongan $y = f(x)$ dengan sumbu-y adalah $(0, f(0)) = (0, -2)$.

(a). Tinjau

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \infty, \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \infty, \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+2}{x^2-1} = -\infty.$$

Dari sini diperoleh $x = 1$ dan $x = -1$ merupakan asimtot tegak dari $y = f(x)$. Kemudian,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Ini berarti $y = 1$ merupakan asimtot datar dari $y = f(x)$. Grafik $y = f(x)$ tidak memiliki asimtot miring karena derajat $x^2 + 2$ sama dengan derajat $x^2 - 1$.

(b). Perhatikan bahwa

$$f'(x) = \frac{(2x+0)\left(x^2-1\right) - \left(x^2+2\right)(2x-0)}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-4x}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{6x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Akan ditentukan interval di mana f merupakan fungsi turun. Ini berarti haruslah $f'(x) < 0$. Karena $\left(x^2-1\right)^2 > 0$ untuk setiap $x \notin \{-1, 1\}$, dalam hal ini tinggal mempertimbangkan $-6x < 0 \iff x > 0$. Jadi, f turun di interval $(0, \infty)$.

Akan dipertimbangkan interval di mana f merupakan fungsi naik, yaitu haruslah $f'(x) > 0$. Sebagaimana sebelumnya, dalam hal ini tinggal mempertimbangkan $-6x > 0 \iff x < 0$. Jadi, f naik di interval $(-\infty, 0)$.

(c). Perhatikan bahwa $f'(x) = -\dfrac{6x}{x^4-2x^2+1}$. Diperoleh

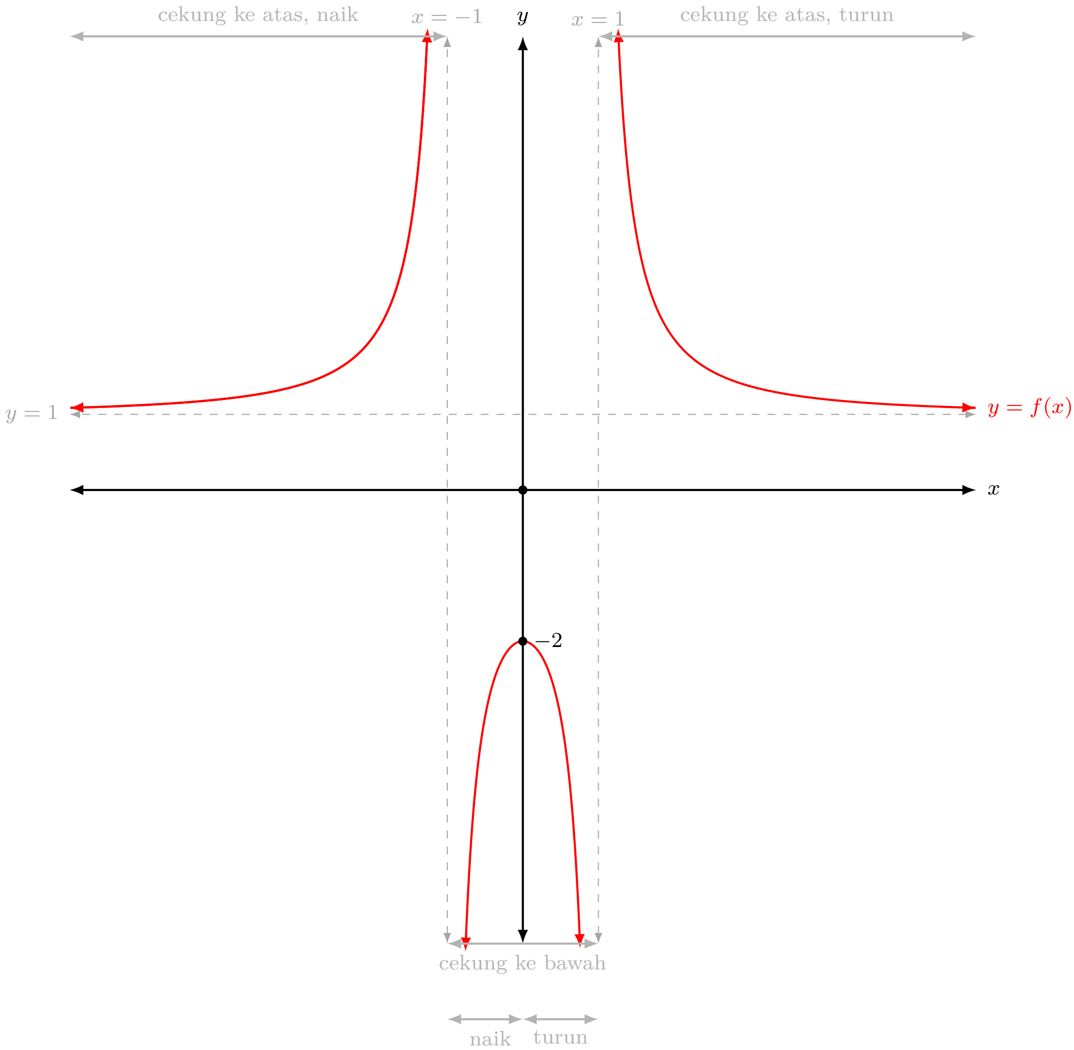
$$\begin{aligned} f''(x) &= -6 \cdot \frac{1\cdot\left(x^4-2x^2+1\right) - x\left(4x^3-4x+0\right)}{\left(x^4-2x^2+1\right)^2} \\ &= -6 \cdot \frac{\left(x^2-1\right)^2 - 4x^2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^4} \\ &= -6 \cdot \frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-1-4x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4} \\ &= \frac{6\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}. \end{aligned}$$

Karena $x^2 \geq 0$, maka $3x^2 + 1 \geq 1 > 0$ sehingga jelas $6\left(3x^2+1\right) > 0$.

Akan ditentukan interval di mana $y = f(x)$ cekung ke atas. Ini berarti haruslah $f''(x) > 0$, yaitu $\dfrac{6\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3} > 0$. Karena $6\left(3x^2+1\right)$ pasti bernilai positif sebagaimana disebutkan sebelumnya, hal ini tinggal mempertimbangkan kondisi $\left(x^2-1\right)^3 > 0$, yaitu saat $x > 1$ atau $x < -1$. Jadi, $y = f(x)$ cekung ke atas di interval $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Akan ditentukan interval di mana $y = f(x)$ cekung ke bawah. Ini berarti haruslah $f''(x) < 0$, yaitu $\dfrac{6\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3} < 0$. Karena $6\left(3x^2+1\right) > 0$, maka haruslah $\left(x^2-1\right)^3 < 0$ sehingga diperoleh $-1 < x < 1$. Jadi, $y = f(x)$ cekung ke bawah di interval $(-1, 1)$.

(d). Dari bagian bagian (a), diperoleh bahwa $f(x) \to \infty$ untuk $x \to 1^-$ atau $x \to -1^+$. Kemudian, $f(x) \to \infty$ untuk $x \to 1^+$ atau $x \to -1^-$. Dari bagian (b) dan (c) dapat diperoleh sketsa $y = f(x)$ sebagai berikut.



Skema Penilaian:

(a).
- Menemukan asimtot tegak. **(+4)**
- Menemukan asimtot datar. **(+4)**
- Menyatakan tidak ada asimtot miring. **(+2)**

(b).
- Menemukan interval di mana fungsi f turun. **(+5)**
- Menemukan interval di mana fungsi f naik. **(+5)**

(c).
- Menemukan interval di mana grafik $y = f(x)$ cekung ke atas. **(+5)**
- Menemukan interval di mana grafik $y = f(x)$ cekung ke bawah. **(+5)**

(d). Dapat menggambar grafik dengan benar. **(+10)**