Pembahasan Tugas 1: Limit dan Kekontinuan

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Responsi Kalkulus I 2023/2024

1. Diberikan fungsi $f(x)$ di mana

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le -1 \\ -2, & -1 < x \le 1 \\ -x^2, & x > 1. \end{cases}.$$

Tentukan manakah limit fungsi dari $f(x)$ berikut yang memiliki nilai. Jika ada, maka tentukan nilainya.

(a). $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

(b). $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

(c). $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

(d). $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Petunjuk (opsional): Apabila perlu, menggambar grafik dari $f(x)$ dapat digunakan sebagai bantuan ilustrasi dalam menentukan limit fungsi.

Wildan Bagus Wicaksono

Solusi.

(a). Akan ditentukan $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$. Ini artinya limit tersebut saat x mendekati -1 yang didekati dari arah kanan. Jadi, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} -2 = \boxed{-2}$.

(b). Akan ditentukan $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Ini artinya limit tersebut saat x mendekat 1 yang didekati dari arah kiri. Ini berarti $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} -2 = \boxed{-2}$.

(c). Akan ditentukan $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$. Harus diperiksa terlebih dahulu apakah limit fungsi tersebut memang ada, dengan mengecek $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ dan $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$. Dari bagian (a) diperoleh $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -2$. Selanjutnya, akan diperiksa $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ yang berarti limit saat x mendekati -1 dari arah kiri. Maka

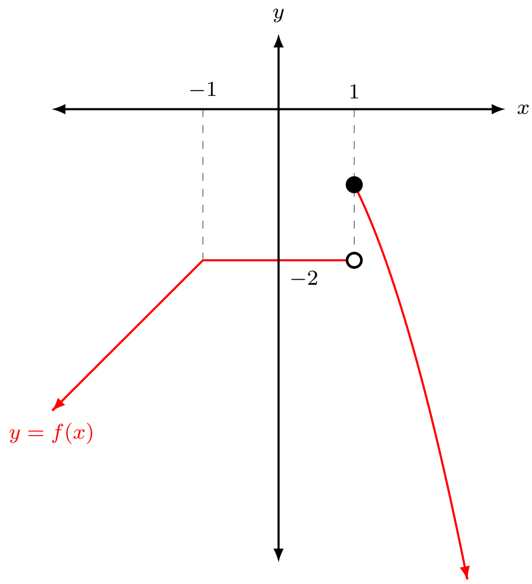
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x-1) = -1-1 = -2.$$

Karena $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -2$, ini berarti $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ada, yaitu $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \boxed{-2}$.

(d). Akan ditentukan $\lim_{x\to 1} f(x)$. Harus diperiksa terlebih dahulu apakah limit fungsi tersebut memang ada, dengan mengecek $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ dan $\lim_{x\to 1^-} f(x)$. Dari bagian (b) diperoleh $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -2$. Akan diperiksa $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, yaitu limit saat x mendekati 1 yang didekati dari kanan. Maka

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -x^2 = -1^2 = -1.$$

Karena $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, ini berarti $\lim_{x\to 1} f(x)$ $\boxed{\text{tidak ada}}$.



Skema Penilaian:

(a). Berhasil menyelesaikan dengan benar. **(+4)**

(b). Berhasil menyelesaikan dengan benar. **(+4)**

(c).
- Berhasil menemukan $\lim_{x\to -1^-} = -2$. **(+3)**
- Berhasil menyimpulkan $\lim_{x\to -1} f(x) = -2$. **(+3)**

(d).
- Berhasil menemukan $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$. **(+3)**
- Berhasil menyimpulkan $\lim_{x\to 1} f(x)$ tidak ada. **(+3)**

2. (a). Diberikan fungsi $f(x) = \sin(x) + 2$ dan $g(x) = \cos(2x)$. Tentukan

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)g(x) + f(x)}{\left(\frac{g}{f}\right)(x)}.$$

(b). Tentukan $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+2}{5x+4}$ dan $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{4x-2}$.

Zahra Nazila Annisa

Solusi.

(a). Perhatikan bahwa

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin(x) + 2) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 = 1 + 2 = 3.$$

Di sisi lain,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(2x) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1.$$

Menggunakan sifat-sifat limit, diperoleh

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (f(x)g(x) + f(x)) = 3 \cdot (-1) + 3 = -3 + 3 = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Dari sini diperoleh

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)g(x) + f(x)}{\left(\frac{g}{f}\right)(x)} = \frac{0}{-\frac{1}{3}} = \boxed{0}.$$

(b). Akan diselesaikan menggunakan fakta $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$ di mana k bilangan rasional positif. Perhatikan bahwa

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{5x+4} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{5 + \frac{4}{x}} = \frac{1+0}{5+0} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

Dengan cara yang sama,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2-2}}{4x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}}{4 - \frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{1-0}}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Skema Penilaian:

(a).
- Menemukan $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 3$ dan $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = -1$. **(+5)**
- Menemukan $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (f(x)g(x) + f(x)) = 0$ dan $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = -\dfrac{1}{3}$. **(+5)**
- Menemukan $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)g(x) + f(x)}{\left(\frac{g}{f}\right)(x)} = 0$. **(+5)**

(b).
- Menemukan $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+2}{5x+4} = \dfrac{1}{5}$. **(+5)**
- Menemukan $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{4x-2} = \dfrac{1}{4}$. **(+5)**

3. Tentukan nilai limit berikut dengan teorema apit.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\cos(2x-3)}{x^2}+5}$$

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Solusi. Berdasarkan sifat limit, kita tahu bahwa

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\cos(2x-3)}{x^2}+5} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cos(2x-3)}{x^2}+5\right]}$$

Kemudian, kita selesaikan menggunakan teorema apit untuk limit yang berada di dalam akar dengan syarat nilai di bawah tanda akar harus lebih besar sama dengan nol. Ingat bahwa fungsi cos terbatas di interval $[-1,1]$, maka

$$\begin{aligned} -1 \le \cos(2x-3) &\le 1 \\ -\frac{1}{x^2} \le \frac{\cos(2x-3)}{x^2} &\le \frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2}+5 \le \frac{\cos(2x-3)}{x^2}+5 &\le \frac{1}{x^2}+5 \end{aligned}$$

Karena $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ dan $\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x^2} = -0 = 0$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}+5\right) &= 0+5 = 0+5 = 5 \ge 0, \\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+5\right) &= 0+5 = 0+5 = 5 \ge 0. \end{aligned}$$

Karena $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}+5\right) = 5 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+5\right)$, menurut Teorema Apit berlaku $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cos(2x-3)}{x^2}+5\right) = 5$. Jadi,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\cos(2x-3)}{x^2}+5} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cos(2x-3)}{x^2}+5\right]} = \boxed{\sqrt{5}}$$

Skema Penilaian:

- Menyatakan bahwa $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\cos(2x-3)}{x^2}+5} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cos(2x-3)}{x^2}+5\right]}$. **(+5)**
- Menemukan bahwa $-\frac{1}{x^2}+5 \le \frac{\cos(2x-3)}{x^2}+5 \le \frac{1}{x^2}+5$. **(+5)**
- Menemukan bahwa $\lim_{x\to\infty}\left(\pm\frac{1}{x^2}+5\right) = 0$. **(+5)**
- Menyimpulkan bahwa $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\cos(2x-3)}{x^2}+5\right] = 5$ menggunakan teorema apit. **(+5)**

4. Diberikan fungsi $g(x)$ di mana

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 1 \\ 2ax - 3, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Tentukan nilai a agar fungsi $g(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$.

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Solusi.

Agar $g(x)$ kontinu di $\mathbb{R}$, perlu dicek kekontinuan di $x = 1$. Agar $g(x)$ kontinu di $x = 1$, haruslah

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1). \tag{1}$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(4 - x^2\right) = 4 - 1^2 = 3$$
$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} (2ax - 3) = 2a \cdot 1 - 3 = 2a - 3.$$

Dari syarat sebagaimana pada (1), diperoleh

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) \implies 3 = 2a - 3$$

sehingga didapatkan $a = \dfrac{3+3}{2} = 3$. Jadi,

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 1 \\ 6x - 3, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Dapat dicek bahwa $g(1) = 6(1) - 3 = 3$, $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 4 - 1^2 = 3$, dan $\lim_{x \to 1^+} g(x) = 6(1) - 3 = 3$ yang mana memenuhi tiga syarat kekontinuan. Jadi, $\boxed{a = 3}$.

Skema Penilaian:

- Menemukan bahwa $\lim_{x \to 1^+} g(x) = 2a - 3$. **(+5)**
- Menemukan bahwa $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 3$. **(+5)**
- Mengecek nilai di $g(1) = 3$. **(+5)**
- Menemukan nilai $a = 3$ dengan memperhatikan syarat $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$. **(+5)**

5. Tanpa menggunakan kalkulator, buktikan bahwa terdapat bilangan real x yang memenuhi

$$x^2 + \sin(x) = 1.$$

Wildan Bagus Wicaksono

Solusi.

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing kontinu di $x = c$, maka $f(x) + g(x)$ juga kontinu di $x = c$.

Perhatikan bahwa x^2 dan $\sin(x)$ masing-masing kontinu di sebarang titik mengingat x^2 fungsi polinomial (cek di modul kekontinuan). Berdasarkan sifat kekontinuan, maka $x^2 + \sin(x)$ juga kontinu di sebarang titik. Tulis $f(x) = x^2 + \sin(x)$ yang merupakan fungsi kontinu.
Akan diperlihatkan nilai $f(x)$ saat $x \in [0, \pi]$. Perhatikan bahwa untuk $x = 0$ berlaku $f(0) = 0^2 + \sin(0) = 0 + 0 = 0$. Sedangkan, untuk $x = \pi$ berlaku $f(\pi) = \pi^2 + \sin(\pi) = \pi^2 + 0 = \pi^2$. Karena $1 \in [0, \pi]$ dan $f(x)$ kontinu di $[0, \pi]$, menurut Teorema Nilai Antara, terdapat $c \in (0, \pi)$ sedemikian sehingga $f(c) = 1 \implies c^2 + \sin(c) = 1$, terbukti.

Catatan. Pemilihan $x = 0$ dan $x = \pi$ sebenarnya bukan sebuah keharusan. Alternatif lainnya dapat memilih $x = 0$ dengan $x = 2\pi$ atau yang lainnya.
Perlu diingat bahwa menyatakan syarat kekontinuan di sini diperlukan sebagai syarat Teorema Nilai Antara. Nama teorema perlu dituliskan pada lembar jawaban.

Skema Penialain:

- Membuktikan bahwa $x^2 + \sin(x)$ merupakan fungsi kontinu. **(+5)**
- Berhasil menerapkan teorema nilai antara untuk menyelesaikan soal. **(+10)**
- (Jika tidak termasuk dua hal di atas) Nilai parsial apabila hanya menyatakan $f(0) < 1 < f(\pi)$ atau semacamnya dan langsung menuju kesimpulan. **(+7)**