Responsi Kalkulus I D 2023/2024

Departemen Matematika Universitas Brawijaya

Dosen Pengampu:

Corina Karim, S.Si.,M.Si.,Ph.D

Asisten:

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Teknik Pengintegralan

Ringkasan

Modul ini akan membahas tentang teknik pengintegralan: integral substitusi, integral parsial, integral fungsi trigonometri, integral substitusi parameter,integral invers trigonometri, substitusi yang merasionalkan, integral fungsi rasional. Perlu diingat bahwa modul ini **jangan dijadikan patokan untuk belajar** karena hanya sebagai ringkasan. Lebih baik Anda membaca terlebih dahulu versi lengkapnya pada referensi tertentu, seperti buku oleh cak Purcell atau cak Thomas. Sebagai latihan tambahan, contoh soal dapat dicoba terlebih dahulu hingga benar-benar menyerah (atau sudah selesai). Jika tidak berhasil menyelesaikannya, maka ikuti alurnya dan **jangan sekedar dibaca**, namun sambil menulis seakan dikerjakan sendiri.

Telah dipelajari mengenai integral dari beberapa fungsi, yaitu fungsi eksponen, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, dan fungsi hiperbolik. Pada modul sebelumnya telah dijelaskan bagaimana untuk menentukan integral dari suatu fungsi dengan metode substitusi. Namun, tiddk semua proses pengintegralan dapat dilakukan dengan metode substitusi. Dalam hal ini akan dibahas mengenai beberapa tekhnik pengintegralan yang dapat digunakan dan tentunya harus memiliki jam terbang yang banyak dengan latihan soal agar dapat melatih intuisi dalam penggunakan tekhnik pengintegralan.

§1. Tekhnik Substitusi

Integral substitusi merupakan metode penyelesaian integral dengan melakukan substitusi salah satu bentuk fungsi dengan pemisalan variabel lain. Adapun bentuk umum dari integral substitusi adalah sebagai berikut.

Teorema 1.1: Tekhnik Substitusi

Diberikan fungsi $f(x)$ yang kontinu dan $g(x)$ yang terdiferensial. Jika $\int f(x)\ dx = F(x) + C$, maka

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(x)) + C$$

di mana C suatu konstan.

Untuk menggunakan tekhnik substitusi dapat dimisalkan $u = g(x)$. Maka $\frac{du}{dx} = g'(x) \iff du = g'(x)\ dx$. Ini berarti

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = \int f(u)\ du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$$

Contoh 1.2

Tentukan $\int x \cos\left(x^2\right)\ dx$ dan $\int_0^1 xe^{2x^2}\ dx$.

Solusi. Akan ditentukan $\int x\cos\left(x^2\right)\,dx$, misalkan $u = x^2$. Dari sini diperoleh $\frac{du}{dx} = 2x \iff dx = \frac{du}{2x}$. Ini berarti

$$\int x\cos\left(x^2\right) = \int x\cos(u)\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \boxed{\frac{\sin(u)}{2} + C}.$$

Akan ditentukan $\int\limits_0^1 xe^{2x^2}\,dx$, misalkan $v = 2x^2$ sehingga $\frac{dv}{dx} = 4x \iff dx = \frac{dv}{4x}$. Namun, perlu diingat bahwa batas integral tak tentu perlu diperhatikan karena melakukan metode substitusi. Untuk batas bawah awal adalah $x = 0$, maka batas bawah baru adalah $v = 2x^2 = 0$. Sedangkan, untuk batas atas awal adalah $x = 1$, maka batas bawah atas adalah $v = 2x^2 = 2$. Dari sini diperoleh

$$\int\limits_0^1 xe^{2x^2}\,dx = \int\limits_0^2 xe^v\frac{dv}{4x} = \frac{1}{4}\int_0^2 e^v\,dv = \frac{1}{4}\left[e^v\right]_0^2 = \boxed{\frac{e^2-1}{4}}.$$

Selain mengubah batasnya secara langsung sebagaimana di atas, proses lainnya dapat ditentukan dengan menggunakan integral tak tentu terlebih dahulu, yaitu

$$\int xe^{2x^2}\,dx = \int xe^v\cdot\frac{dv}{4x} = \frac{1}{4}\int e^v\,dv = \frac{e^v}{4} + C = \frac{e^{2x^2}}{4} + C.$$

Dari sini diperoleh

$$\int\limits_0^1 xe^{2x^2}\,dx = \left[\frac{e^{2x^2}}{4} + C\right]_0^1 = \boxed{\frac{e^2-1}{4}}.$$

▼

Pada modul sebelumnya telah banyak dikenalkan soal integral dengan metode substitusi, namun cukup sederhana untuk dilakukan. Contoh-contoh berikutnya diberikan tekhnik substitusi untuk persoalan integral yang sedikit berbeda dengan sebelumnya.

Contoh 1.3

Tentukan integral tak tentu $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

Solusi. Misalkan $u = 1+\sqrt{x}$, maka $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \iff dx = 2\sqrt{x}\,du$. Ini berarti

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{x}}{u}\cdot 2\sqrt{x}\,du = \int \frac{2x}{u}\,du.$$

Namun, dalam pengintegralan di atas masih mengandung bentuk x. Maka dari itu bentuk variabel x harus diubah dalam bentuk u terlebih dahulu. Perhatikan bahwa $u = 1+\sqrt{x} \iff u-1 = \sqrt{x} \iff (u-1)^2 = x$. Ini berarti

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2(u-1)^2}{u}\,du = \int \frac{2u^2-4u+2}{u}\,du = \int \left(2u-4+\frac{2}{u}\right) = u^2-4u+2\ln|u|+C$$

di mana C konstan. Substitusikan $u = 1 + \sqrt{x}$, ini berarti

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \left(1+\sqrt{x}\right)^2 - 4\left|1+\sqrt{x}\right| + 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C \\ &= 1 + 2\sqrt{x} + x - 4 - 4\sqrt{x} + 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C \\ &= x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C'\end{aligned}$$

di mana $C' = C - 3$ suatu konstan. Karena $\sqrt{x} \geq 0$, maka $1 + \sqrt{x} \geq 1 > 0$ sehingga hasil integral dapat ditulis lebih spesifik, yaitu

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \boxed{x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C'}.$$

▼

Contoh 1.4

Tentukan $\displaystyle\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$.

Solusi. Untuk menyelesaikannya pembaca diperkenankan untuk menentukan bentuk integral tak tentunya atau langsung mengubah batasnya. Dalam pembahasan ini akan diubah langsung batas integralnya. Misalkan $u = x - 1$, maka $\dfrac{du}{dx} = 1 \iff dx = du$. Untuk batas bawah pengintegralannya berubah menjadi $u = 2 - 1 = 1$, sedangkan batas atasnya berubah menjadi $u = 5 - 1 = 4$. Ini berarti

$$\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx = \int_1^4 x\sqrt{u}\,du.$$

Pada persoalan di atas masih terdapat variabel x yang mana harus diubah ke sebuah variabel yang sama, yaitu variabel u. Karena $x - 1 = u$, maka diperoleh $x = u + 1$ yang berarti

$$\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx = \int_1^4 (u+1)\sqrt{u}\,du = \int_1^4 \left(u\sqrt{u} + \sqrt{u}\right)\,du = \int_1^4 \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)\,du.$$

Dari sini diperoleh

$$\int_1^4 \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) = \left[\frac{2}{5}u^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left(\frac{2}{5}\cdot 4^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{5}\cdot 1^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}\right) = \boxed{\frac{256}{15}}.$$

▼

Contoh 1.5

Tentukan $\displaystyle\int \tan^3(x)\,dx$.

Solusi. Tulis $\int \tan^3(x)\ dx = \int \frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}\ dx$. Misalkan $u = \cos(x)$, maka $\frac{du}{dx} = -\sin(x) \iff dx = \frac{du}{-\sin(x)}$. Dari sini diperoleh

$$\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}\ dx = \int \frac{\sin^3(x)}{u^3} \cdot \frac{du}{-\sin(x)} = -\int \frac{\sin^2(x)}{u^3}\ du.$$

Dari sini masih terdapat variabel x dan untuk mengubahnya perhatikan bahwa $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - u^2$. Ini berarti

$$\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}\ dx = -\int \frac{\sin^2(x)}{u^3}\ du = -\int \frac{1-u^2}{u^3}\ du = \int \frac{u^2-1}{u^3}\ du.$$

Dari sini diperoleh

$$\int \frac{u^2-1}{u^3} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3}\right)\ du = \ln|u| + \frac{1}{2u^2} + C = \boxed{\ln|\cos(x)| + \frac{1}{2\cos^2(x)} + C}$$

di mana C suatu konstan. ▼

Contoh 1.6: Brutal Dikit Ga Ngaruh

Tentukan $\int \sec(x)\ dx$.

Solusi. Untuk persoalan satu ini memerlukan ide yang *tricky* untuk menyelesaikannya. Perhatikan bahwa turunan pertama dari $\tan(x)$ adalah $\sec^2(x)$, sedangkan turunan pertama dari $\sec(x)$ adalah $\sec(x)\tan(x)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\int \sec(x)\ dx &= \int \sec(x) \cdot \frac{\sec(x)+\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\ dx\\ &= \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x)\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\ dx.\end{aligned}$$

Misalkan $u = \sec(x) + \tan(x) = (\cos(x))^{-1} + \tan(x)$, maka

$$\frac{du}{dx} = (-1)(\cos(x))^{-2}(-\sin(x)) + \sec^2(x) = \sec(x)\tan(x) + \sec^2(x)$$

sehingga $du = \left(\sec(x)\tan(x) + \sec^2(x)\right)\ dx$. Ini berarti

$$\int \sec(x)\ dx = \int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \boxed{\ln|\sec(x)+\tan(x)| + C}.$$

▼

§2. Integral Parsial

Integral parsial merupakan bentuk penurunan dari sifat $(uv)' = u'v + uv' \iff uv' = (uv)' - vu'$ di mana u dan v merupakan suatu fungsi terhadap x, yaitu $u := u(x)$ dan $v := v(x)$. Apabila diintegralkan kedua ruas terhadap x, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int u(x)v'(x)\ dx &= \int \Big(u(x)v(x)\Big)'\ dx - \int v(x)u'(x)\ dx \\ \implies \int u(x)v'(x)\ dx &= u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\ dx. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\dfrac{du}{dx} = u'(x) \iff du = u'(x)\ dx$ dan $\dfrac{dv}{dx} = v'(x) \iff dv = v'(x)\ dx$. Maka bentuk di atas dapat dituliskan sebagai

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du.$$

Teorema 2.1: Integral Parsial

Misalkan $u := u(x)$ dan $v := v(x)$ adalah fungsi yang terdifierensial (maka f kontinu, cek modul sifat turunan) di interval $[a, b]$. Maka

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du \quad \text{dan} \quad \int_a^b u\ dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\ du.$$

Contoh 2.2

Tentukan integral tak tentu $\int xe^x\ dx$ dan $\int x^2e^x\ dx$.

Solusi. Perhatikan bahwa metode substitusi dalam masing-masing soal tidak menemukan substitusi yang tepat.
Akan ditentukan $\int xe^x\ dx$. Misalkan $u = x \implies du = dx$ dan $dv = e^x\ dx \implies v = \int e^x\ dx = e^x$. Maka

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du \implies \int xe^x = xe^x - \int e^x\ dx = \boxed{xe^x - e^x + C}.$$

Akan ditentukan $\int x^2e^x\ dx$. Misalkan $u = x^2 \implies du = 2x\ 2x$ dan $dv = e^x\ dx \implies v = \int e^x\ dx = e^x$. Ini berarti

$$\int x^2e^x\ dx = x^2e^x - \int e^x \cdot 2x\ dx = x^2e^x - 2\int xe^x\ dx.$$

Maka dalam hal ini perlu menentukan $\int xe^x\ dx$ menggunakan integral parsial kembali. Berdasarkan hasil sebelumnya, diperoleh

$$\int x^2e^x = x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C = \boxed{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C}$$

di mana C suatu konstan. ▼

Contoh 2.3: UAS 2022

Tentukan $\int x^2 \ln(x)\ dx$.

Solusi. Dalam mengintegralkan menggunakan integral parsial, yang menjadi tantangan pertama adalah memisalkan fungsi u dan v pada soal. Terkadang permisalan yang diambil membuat persoalan pengintegralan menjadi lebih sulit.
Misalkan $u = x^2 \implies du = 2x\ dx$ dan $dv = \ln(x)\ dx \implies v = \int \ln(x)\ dx$. Dengan pengambilan dv yang demikian, maka $\int \ln(x)\ dx$ harus diselesaikan terlebih dahulu. Mungkin ini terlihat ide yang buruk karena $\int \ln(x)\ dx$ perlu berpikir lebih lanjut, maka dapat dicoba cara yang lain.
Misalkan $u = \ln(x) \implies du = \frac{1}{x}\ dx$ dan $dv = x^2\ dx \implies v = \int x^2\ dx = \frac{x^3}{3}$. Dari sini diperoleh

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du \implies \int x^2 \ln(x)\ dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\ dx = \frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{1}{3} \int x^2\ dx$$

sehingga diperoleh $\int x^2 \ln(x)\ dx = \boxed{\frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C}$. ▼

Contoh 2.4

Tentukan $\int_e^{e^3} \ln(x)\ dx$.

Solusi. Untuk sedikit mempermudah akan diselesaikan terlebih dahulu integral tak tentu $\int \ln(x)\ dx$. Perhatikan bahwa $\ln(x) = 1 \cdot \ln(x)$, misalkan $u = \ln(x) \implies du = \frac{1}{x}\ dx$ dan $dv = 1\ dx \implies v = \int 1\ dx = x$. Maka

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du \implies \int \ln(x) \cdot 1\ dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx = x \ln(x) - \int 1\ dx = x \ln(x) - x + C.$$

Dari sini diperoleh

$$\int_e^{e^3} \ln(x)\ dx = [x \ln(x) - x + C]_e^{e^3} = e^3 \ln\left(e^3\right) - e^3 + C - (e \ln(e) - e + C) = \boxed{2e^3}.$$

Selain menggunakan metode di atas, dapat menggunakan permisalan $y = \ln(x) \iff x = e^y$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \iff dx = x\ dy = e^y\ dy$. Ini berarti

$$\int \ln(x)\ dx = \int y \cdot e^y\ dy = \int ye^y\ dy = ye^y - e^y + C = x \ln(x) - x + C$$

yang mana diperoleh hasil yang sama. ▼

Contoh 2.5

Tentukan $\int x^2 \sin(x)\ dx$.

Solusi. Perhatikan bahwa $\sin(x)$ apabila diturunkan berkali-kali akan menghasilkan pola berupa

$$\cos(x), \quad -\sin(x), \quad -\cos(x), \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad \cdots$$

yang mana tidak akan pernah bernilai nol. Sedangkan, apabila x^2 diturunkan berkali-kali akan menghasilkan pola berupa

$$2x, \quad 2, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad \cdots$$

yang mana pada turunan ketiga dan seterusnya bernilai 0. Maka dari itu pemilihan $u = x^2$ merupakan ide yang cukup baik, untuk lebih jelasnya dapat diperhatikan pada penjelasan berikut. Pilih $dv = \sin(x)\ dx \iff v = \int \sin(x)\ dx = -\cos(x)$ dan $du = 2x\ dx$. Dari sini diperoleh

$$\int x^2 \sin(x)\ dx = x^2(-\cos(x)) - \int (-\cos(x)) \cdot 2x\ dx = -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\ dx.$$

Untuk menentukan $\int x\cos(x)\ dx$ dapat dikerjakan menggunakan integral parsial kembali dengan memisalkan $u_1 = x \implies du_1 = dx$ dan $dv_2 = \cos(x)\ dx \implies v_2 = \sin(x)$. Dari sini diperoleh

$$\int x\cos(x)\ dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\ dx = x\sin(x) - (-\cos(x)) + C = x\sin(x) + \cos(x) + C$$

di mana C suatu konstan. Ini berarti

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(x) &= -x^2\cos(x) + 2\left(x\sin(x) + \cos(x) + C\right) \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + 2C \\ &= \boxed{\left(2 - x^2\right)\cos(x) + 2x\sin(x) + C'}\end{aligned}$$

di mana $C' = 2C$ suatu konstan. ▼

Contoh 2.6

Tentukan $\int e^x \sin(x)\ dx$.

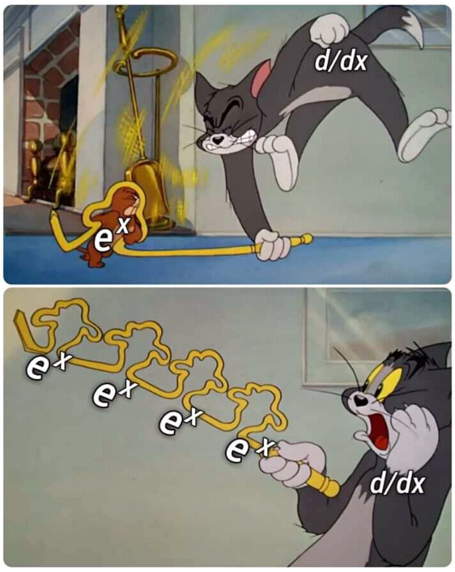
Solusi. Sebagaimana sebelumnya, apabila $\sin(x)$ diturunkan berkali-kali menghasilkan pola

$$\cos(x), \quad -\sin(x), \quad -\cos(x), \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad \cdots.$$

Sedangkan, apabila e^x diturunkan berkali kali menghasilkan pola

$$e^x, \quad e^x, \quad e^x, \quad e^x, \quad e^x, \quad \cdots$$

yang mana juga tidak akan pernah nol.



Gambar 1: Pinterest

Pilih $u = e^x \implies du = e^x\ dx$ dan $dv = \sin(x)\ dx \implies v = -\cos(x)$, maka

$$\int e^x \sin(x)\ dx = e^x(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))e^x\ dx = -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\ dx.$$

Untuk menentukan $\int e^x\cos(x)\ dx$ juga menggunakan integral parsial dengan memisalkan $u_1 = e^x \implies du_1 = e^x\ dx$ dan $dv_1 = \cos(x)\ dx \implies v_1 = \sin(x)$. Dari sini diperoleh

$$\int e^x\cos(x) = e^x\sin(x) - \int \sin(x)e^x\ dx + C$$

sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned}\int e^x\sin(x)\ dx &= -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\ dx \\ &= -e^x\cos(x) + \left[e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)\ dx + C\right] \\ &= e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\ dx + C.\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk menentukan $\int e^x\sin(x)$ menggunakan integral parsial kembali dan terlihat proses menggunakan integral parsial nampak tidak berhenti untuk seterusnya. Namun, perhatikan bahwa ruas kiri dan ruas kanan terdapat suku $\int e^x\sin(x)\ dx$, yaitu

$$\int e^x\sin(x)\ dx = e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\ dx.$$

Maka dari itu misalkan $A = \int e^x\sin(x)$, ini berarti

$$A = e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - A \iff 2A = e^x\sin(x) - e^x\cos(x) + C.$$

Didapatkan bahwa $A = \boxed{\dfrac{e^x\sin(x) - e^x\cos(x)}{2} + C'}$ di mana $C' = \dfrac{C}{2}$ suatu konstan. ▼

§3. Integral Trigonometri Lanjutan

Dalam mengintegralkan fungsi trigonometri memerlukan kelihaian dalam memanfaatkan sifat-sifat dalam trigonometri.

Contoh 3.1

Tentukan $\int \sin^4(x)\cos^5(x)\ dx$.

Solusi. Misalkan $u = \sin(x)$, maka $du = \cos(x)\ dx$ sehingga diperoleh

$$\int \sin^4(x)\cos^5(x)\ dx = \int u^4\cos^5(x)\frac{du}{\cos(x)} = \int u^4\cos^4(x)\ du.$$

Perhatikan bahwa

$$\cos^4(x) = \left(\cos^2(x)\right)^2 = \left(1-\sin^2(x)\right)^2 = \left(1-u^2\right)^2 = 1-2u^2+u^4.$$

Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}\int \sin^4(x)\cos^5(x)\ dx &= \int u^4\left(1-2u^2+u^4\right)\ du\\ &= \int u^4-2u^6+u^8\ du\\ &= \frac{u^5}{5}-\frac{2u^7}{7}+\frac{u^9}{9}+C\\ &= \boxed{\frac{\sin^5(x)}{5}-\frac{2\sin^7(x)}{7}+\frac{\sin^9(x)}{9}+C}\end{aligned}$$

di mana C konstan. ▼

Contoh 3.2

Tentukan $\int \sin^3(x)\ dx$.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$\sin^3(x) = \sin(x)\sin^2(x) = \sin(x)\left(1-\cos^2(x)\right) = \sin(x)-\cos^2(x)\sin(x).$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$\int \sin^3(x)\ dx = \int\left(\sin(x)-\cos^2(x)\sin(x)\right)\ dx = -\cos(x)-\int\cos^2(x)\sin(x)\ dx.$$

Untuk menentukan $\int \cos^2(x)\sin(x)\ dx$, misalkan $u=\cos(x) \implies du = -\sin(x)\ dx$, diperoleh

$$\int \cos^2(x)\sin(x)\ dx = \int u^2\ (-du) = -\int u^2\ du = -\frac{u^3}{3}+C = -\frac{\cos^3(x)}{3}+C.$$

Ini berarti $\int \sin^3(x)\ dx = \boxed{-\cos(x)+\frac{\cos^3(x)}{3}+C'}$ di mana $C'=-C$ suatu konstan. ▼

Teorema 3.3: Reduksi integral $\sin^n(x)$

Untuk n bilangan asli, misalkan $\mathcal{S}_n = \int \sin^n(x)\ dx$. Maka untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$\mathcal{S}_{n+2} = -\frac{\cos(x)\sin^{n+1}(x)}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}\mathcal{S}_n$$

dengan $\mathcal{S}_1 = -\cos(x)$ dan $\mathcal{S}_2 = \dfrac{2x - \sin(2x)}{4}$.

Bukti. Tulis $\mathcal{S}_{n+2} = \int \sin^{n+2}(x)\ dx = \int \sin^{n+1}(x)\sin(x)\ dx$. Misalkan $u = \sin^{n+1}(x) \implies du = (n+1)\sin^n(x)\cos(x)$ dan $dv = \sin(x)\ dx \implies v = -\cos(x)$. Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{n+2} &= -\cos(x)\sin^{n+1}(x) - \int (-\cos(x))(n+1)\sin^n(x)\cos(x)\ dx \\
&= -\cos(x)\sin^{n+1}(x) + (n+1)\int \sin^n(x)\cos^2(x)\ dx \\
&= -\cos(x)\sin^{n+1}(x) + (n+1)\int \sin^n(x)\left(1 - \sin^2(x)\right)\ dx \\
&= -\cos(x)\sin^{n+1}(x) + (n+1)\int \sin^n(x)\ dx - (n+1)\int \sin^{n+2}(x)\ dx \\
&= -\cos(x)\sin^{n+1}(x) + (n+1)\mathcal{S}_n - (n+1)\mathcal{S}_{n+2} \\
\mathcal{S}_{n+2} + (n+1)\mathcal{S}_{n+2} &= -\cos(x)\sin^{n+1}(x) + (n+1)\mathcal{S}_n \\
(n+2)\mathcal{S}_{n+2} &= -\cos(x)\sin^{n+1}(x) + (n+1)\mathcal{S}_n \\
\mathcal{S}_{n+2} &= \frac{-\cos(x)\sin^{n+1}(x)}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}\mathcal{S}_n.
\end{aligned}$$

Mudah diverivikasi bahwa $\mathcal{S}_1 = \int \sin(x)\ dx = -\cos(x)$. Kemudian,

$$\mathcal{S}_2 = \int \sin^2(x)\ dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int \left(1 - \cos(2x)\right)\ dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right)$$

sehingga diperoleh $\mathcal{S}_2 = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(2x)}{4} = \dfrac{2x - \sin(2x)}{4}$ seperti yang ingin dibuktikan. $\square$

Dari **Contoh 3.2**, untuk $n = 1$ diperoleh

$$\mathcal{S}_3 = -\frac{\cos(x)\sin^2(x)}{3} + \frac{2}{3}\mathcal{S}_1 = \frac{-\cos(x)\sin^2(x)}{3} - \frac{2\cos(x)}{3}.$$

Karena $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, diperoleh

$$\mathcal{S}_3 = \frac{-\cos(x)\left(1 - \cos^2(x)\right) - 2\cos(x)}{3} + C = \frac{-3\cos(x) + \cos^3(x)}{3} + C = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

yang maan diperoleh hasil yang sama. Dengan cara yang sama dapat diperoleh hasil berikut. Pembaca dipersilahkan untuk membuktikannya sebagai latihan.

Teorema 3.4: Reduksi integral $\cos^n(x)$

Misalkan $\mathcal{C}_n = \cos^n(x)\ dx$ di mana n bilangan asli. Maka untuk setiap bilangan asli n berlaku
$$\mathcal{C}_{n+2} = \frac{\sin(x)\cos^{n+1}(x)}{n+2} + \frac{n+1}{n+2}\mathcal{C}_n$$
di mana $\mathcal{C}_1 = \sin(x)$ dan $\mathcal{C}_2 = \dfrac{2x+\sin(2x)}{4}$.

Contoh 3.5

Tentukan $\displaystyle\int \sin(-4x)\cos(3x)\ dx$.

Solusi. Karena $\sin(-x) = -\sin(x)$, maka
$$\int \sin(-4x)\cos(3x)\ dx = \int -\sin(4x)\cos(3x)\ dx = -\int \sin(4x)\cos(3x)\ dx.$$
Berdasarkan sifat
$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x+y) + \sin(x-y) \iff \sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}.$$
Ini berarti
$$\sin(4x)\cos(3x) = \frac{\sin(4x+3x)+\sin(4x-3x)}{2} = \frac{\sin(7x)+\sin(x)}{2}.$$
Ini berarti
$$\begin{aligned}\int \sin(-4x)\cos(3x)\ dx &= -\int \frac{\sin(7x)+\sin(x)}{2}\ dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \Big(\sin(7x)+\sin(x)\Big)\ dx \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(7x)}{7} - \cos(x)\right) + C \\ &= \boxed{\frac{\cos(7x)}{14} + \frac{\cos(x)}{2} + C}\end{aligned}$$
di mana C suatu konstan. ▼

Contoh 3.6

Tentukan $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin(2x)\ dx$.

Solusi. Perhatikan bahwa $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, maka
$$\begin{aligned}\int \sin(x)\sin(2x)\ dx = \int 2\sin^2(x)\cos(x)\ dx &= 2\int \Big(1-\cos^2(x)\Big)\cos(x)\ dx \\ &= 2\int \cos(x)\ dx - 2\int \cos^3(x)\ dx \\ &= 2\sin(x) - 2\int \cos^3(x)\ dx.\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\cos^3(x) = \cos(x)\cos^2(x) = \cos(x)\left(1 - \sin^2(x)\right) = \cos(x) - \sin^2(x)\cos(x).$$

Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x) &= \int \left(\cos(x) - \sin^2(x)\cos(x)\right)\,dx = \int \cos(x)\,dx - \int \sin^2(x)\cos(x)\,dx \\ &= \sin(x) - \int \sin^2(x)\cos(x)\,dx.\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan $\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx$ mudah dilakukan dengan metode substitusi, misalkan $u = \sin(x) \implies du = \cos(x)\,dx$. Ini berarti

$$\int \sin^2(x)\cos(x) = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3(x)}{3} + C.$$

Jadi, dapat disimpulkan

$$\int \sin(x)\sin(2x)\,dx = 2\sin(x) - 2\sin(x)\frac{2\sin^3(x)}{3} + 2C = \frac{2\sin^3(x)}{3} + C'$$

di mana $C' = 2C$ suatu konstan. Untuk menentukan $\int \cos^3(x)\,dx$ dapat menerapkan **Teorema 3.4**, yaitu

$$\int \cos^3(x)\,dx = \frac{\sin(x)\cos^2(x)}{3} + \frac{2}{3}\mathcal{C}_1 = \frac{\sin(x)\left(1-\sin^2(x)\right)}{3} + \frac{2}{3}\sin(x) + C = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}.$$

Selain itu, solusi alternatif lainnya adalah memanfaatkan

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = 2\sin(x)\sin(y) \iff -\sin(x)\sin(y) = -\frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{2}.$$

Ini berarti

$$\sin(x)\sin(2x) = -\frac{\cos(x+2x) - \cos(x-2x)}{2} = -\frac{\cos(3x) - \cos(-x)}{2} = -\frac{\cos(3x) - \cos(x)}{2}.$$

Dari sini diperoleh

$$\int \sin(x)\sin(2x)\,dx = \int -\frac{\cos(3x) - \cos(x)}{2}\,dx = -\frac{\frac{\sin(3x)}{3} - \sin(x)}{2} + C = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{6} + C.$$

Jangan khawatir! Dua hasil yang diperoleh merupakan hasil yang sama, pembaca dapat membuktikan bahwa $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ sebagai latihan. Diperoleh pula

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin(2x) = \left[\frac{2\sin^3(x)}{3} + C\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\cdot 1^3}{3} + C - \left(\frac{2\cdot 0^3}{3} + C\right) = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

▼

Contoh 3.7

Tentukan $\displaystyle\int \frac{\tan^3(x)}{\sqrt{\sec(x)}}\,dx$.

Solusi. Misalkan $u = \sec(x)$, maka $du = \sec(x)\tan(x)\,dx \iff dx = \dfrac{du}{\sec(x)\tan(x)}$. Ini berarti

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan^3(x)}{\sqrt{\sec(x)}}\,dx &= \int \frac{\tan^3(x)}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{\sec(x)\tan(x)}\\ &= \int \frac{\tan^2(x)}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{u}.\end{aligned}$$

Karena $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1 = u^2 - 1$, ini berarti

$$\int \frac{\tan^3(x)}{\sqrt{\sec(x)}}\,dx = \int \frac{u^2-1}{u\sqrt{u}}\,du = \int \left(\frac{u^2}{u\sqrt{u}} - \frac{1}{u\sqrt{u}}\right)du = \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{3}{2}}\right)du.$$

Dari sini mudah diperoleh

$$\int \frac{\tan^3(x)}{\sqrt{\sec(x)}}\,dx = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + 2u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2\left(u^2+3\right)}{3\sqrt{u}} = \boxed{\frac{2\left(\sec^2(x)+3\right)}{3\sqrt{\sec(x)}} + C}$$

di mana C suatu konstan. ▼

§4. Integral Substitusi Trigonometri

Permasalahan dalam kasus ini menggunakan sifat-sifat pada trigonometri, seperti sifat

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \implies \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x), \quad \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x), \quad 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x).$$

Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 4.1

Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solusi. Perhatikan identitas $\sin^2(u)+\cos^2(u) = 1$ sehingga diperoleh $1-\sin^2(u) = \cos^2(u)$. Oleh karena itu, substitusi $x = \sin(u)$ dapat menghilangkan bentuk akar pada $\sqrt{1-x^2}$. Substitusi $x = \sin(u)$, maka $dx = \cos(u)\,du$. Dari sini diperoleh

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos(u)\,du}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \int \frac{\cos(u)\,du}{\cos(u)} = \int du = u + C = \boxed{\sin^{-1}(x) + C}$$

di mana C suatu konstan.

Alternatif lainnya dapat dilakukan substitusi $x = \cos(v)$, maka $dx = -\sin(v)\,dv$. Dari sini diperoleh

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\sin(v)\ dv}{\sqrt{1-\cos^2(v)}} = -\int \frac{\sin(v)\ dv}{\sin(v)} = -\int dv = -v + C = \boxed{-\cos^{-1}(x) + D}$$

di mana D suatu konstan. ▼

Contoh 4.2

Tentukan $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}\ dx$.

Solusi. Sebagaimana contoh sebelumnya, substitusikan $x = \sin(u) \implies dx = \cos(u)\ du$. Dari sini diperoleh

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{\cos(u)\ du}{\sqrt{9-\sin^2(u)}}$$

yang mana identitas $\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$ tidak dapat digunakan. Sehingga substitusi $x = \sin(u)$ kurang membantu. Namun, dengan ide yang sama dapat dimanipulasi lebih jauh agar identitas tersebut dapat dimanfaatkan, tepatnya dengan substitusi $x = 3\sin(v) \implies dx = 3\cos(v)\ dv$. Dari sini diperoleh

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos(v)\ dv}{\sqrt{9-9\sin^2(v)}} = \int \frac{3\cos(v)\ dv}{3\sqrt{1-\sin^2(v)}} = \int \frac{3\cos(v)\ dv}{3\cos(v)} = \int dv = v + C$$

dengan C suatu konstan. Karena $x = 3\sin(v)$, maka $\sin(v) = \frac{x}{3}$ sehingga diperoleh $v = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$. Ini berarti $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \boxed{\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C}$ di mana C suatu konstan. ▼

Contoh 4.3

Tentukan $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Solusi. Perhatikan bahwa apabila disubstitusikan $x = \sin(u)$ atau $x = \sin(v)$ menghasilkan $1 + x^2 = 1 + \sin^2(u)$ atau $1 + x^2 = 1 + \sin^2(v)$. Namun, dalam hal ini tidak dapat dimanfaatkan identitas yang terkait dari fungsi sin dan cos. Identitas trigonometri yang lain adalah $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$ sehingga substitusi $x = \tan(k)$ merupakan substitusi yang bagus. Dari sini diperoleh $dx = \sec^2(k)\ dk$, maka

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{\sec^2(k)\ dk}{1+\tan^2(k)} = \int \frac{\sec^2(k)\ dk}{\sec^2(k)} = \int dk = k + C = \tan^{-1}(x) + C$$

di mana C suatu konstan. Ini berarti

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1}(x) + C\right]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

▼

Dari contoh-contoh sebelumnya dapat diperoleh sebagai berikut.

Teorema 4.4

Jika $a > 0$, maka

(a). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + C$

(b). $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}(x) + C$

(c). $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}(x) + C$

(d). $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(e). $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(f). $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Bukti. Ide dari bukti yang diberikan sama halnya dengan contoh-contoh sebelumnya. Akan dibuktikan untuk bagian (f), untuk sisanya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Dengan mengingat identitas $\tan^2(u) + 1 = \sec^2(u) \iff \tan^2(u) = \sec^2(u) - 1$, maka dari itu substitusikan $x = a\sec(u) \implies dx = a\sec(u)\tan(u)\ du$. Ini berarti

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec(u)\tan(u)\ du}{a\sec(u)\sqrt{a^2\sec^2(u)-a^2}} = \int \frac{\tan(u)\ du}{a\sqrt{\sec^2(u)-1}} = \int \frac{\tan(u)\ du}{a\tan(u)} = \int \frac{du}{a} = ua + C$$

di mana C suatu konstan. Karena $x = a\sec(u) \iff \frac{x}{a} = \sec(u)$ sehingga $u = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ yang menunjukkan

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{u}{a} + C = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

seperti yang ingin dibuktikan. □

Tentunya integral yang melibatkan fungsi trigonometri tidak hanya sebatas pada bentuk-bentuk di **Teorema 4.4** sehingga diperlukan ketrampilan dalam mengolah identitas-identitas trigonometri.

Contoh 4.5

Tentukan $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx$ dengan menentukan bentuk integral tak tentu $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\ dx$ terlebih dahulu.

Solusi. Substitusikan $x = \sin(u) \implies dx = \cos(u)\ du$, maka

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \int \sqrt{1-\sin^2(u)}\ \cos(u)\ du = \int \cos^2(u)\ du = \int \frac{\cos(2u)+1}{2}\ du = \frac{\frac{\sin(2u)}{2} + u}{2} + C$$

di mana C suatu konstan. Karena $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$, ini berarti

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{\sin(u)\cos(u) + u}{2} + C = \frac{x\cos(u) + \sin^{-1}(x)}{2} + C$$

di mana C suatu konstan. Mengingat identitas $\cos(u) = \sqrt{1-\sin^2(u)} = \sqrt{1-x^2}$, ini berarti

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \boxed{\frac{x\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1}(x)}{2} + C}.$$

Sehingga dapat diperoleh

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1(0)+\sin^{-1}(1)}{2} - \frac{(-1)(0)+\sin^{-1}(-1)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

▼

Contoh 4.6

Tentukan $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25x^2-4}}{x}\,dx$.

Solusi. Substitusi $x = \frac{2}{5}\sec(u) \implies dx = \frac{2}{5}\sec(u)\tan(u)\,du$. Ini berarti

$$\int \frac{\sqrt{25x^2-4}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{4\sec^2(u)-4}}{\frac{2}{5}\sec(u)} \cdot \frac{2}{5}\sec(u)\tan(u)\,du = \int 2\tan^2(u)\,du = 2\int \tan^2(u)\,du.$$

Karena $\tan^2(u) = \sec(u)^2 - 1$, ini berarti

$$\int \frac{\sqrt{25x^2-4}}{x}\,dx = 2\int \tan^2(u)\,du = 2\int \left(\sec^2(u)-1\right)\,du = 2(\tan(u)-u)+C$$

di mana C suatu konstan. Karena $x = \frac{2}{5}\sec(u)$, maka

$$x^2 = \frac{4}{25}\sec^2(u) \iff \frac{25}{4}x^2 = \sec^2(u) = 1+\tan^2(u) \implies \tan(u) = \sqrt{\frac{25}{4}x^2-1} = \frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}.$$

Ini berarti

$$\int \frac{\sqrt{25x^2-4}}{x} = 2\left(\frac{\sqrt{25x^2-4}}{2} - \sec^{-1}\left(\frac{5x}{2}\right)\right)+C = \boxed{\sqrt{25x^2-4} - 2\sec^{-1}\left(\frac{5x}{2}\right)+C}.$$

▼

Contoh 4.7

Tentukan $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

Solusi. Perhatikan bahwa $3-2x-x^2 = 4-\left(x^2+2x+1\right) = 4-(x+1)^2$. Maka dari itu substitusi $x+1 = 2\sin(v) \iff x = 2\sin(v)-1$ sehingga diperoleh $dx = 2\cos(v)\,dv$. Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,dx &= \int \frac{2\sin(v)-1}{\sqrt{4-4\sin^2(v)}} \cdot 2\cos(v)\,dv = \int \frac{2\sin(v)-1}{2\sqrt{1-\sin^2(v)}} \cdot 2\cos(v)\,dv \\
&= \int \frac{2\sin(v)-1}{2\cos(v)} \cdot 2\cos(v)\,dv \\
&= \int (2\sin(v)-1)\,dv \\
&= -2\cos(v) - v + C
\end{aligned}$$

di mana C suatu konstan. Perhatikan bahwa $\sin(v) = \frac{x+1}{2} \implies v = \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$ dan

$$\cos(v) = \sqrt{1-\sin^2(v)} = \sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{x^2+2x+1}{4}} = \sqrt{\frac{3-2x-x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2}.$$

Dari sini diperoleh

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-3x-x^2}}\,dx = -2\cdot\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C = \boxed{-\sqrt{3-2x-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C}.$$

▼

Contoh 4.8: UAS 2020

Tentukan $\int \frac{x}{(1-x^2)^2}\,dx$.

Solusi. Soal ini dapat diselesaikan dengan substitusi biasa sebagaimana pada subbab awal, namun dalam bahasan ini akan diselesaikand engan substitusi trigonometri. Substitusi $x = \sin(u) \implies dx = \cos(u)\,du$, maka

$$\int \frac{x}{(1-x^2)^2} = \int \frac{\sin(u)}{(1-\sin^2(u))^2}\cdot\cos(u)\,du = \int \frac{\sin(u)\cos(u)}{\cos^4(u)}\,du = \int \frac{\sin(u)}{\cos^3(u)}\,du.$$

Misalkan $v = \cos(u)$, maka $dv = -\sin(u)\,du$ sehingga diperoleh

$$\int \frac{\sin(u)}{\cos^3(u)}\,du = \int \frac{-dv}{v^3} = \frac{1}{2v^2} + C = \frac{1}{2\cos^2(u)} + C$$

di mana C suatu konstan. Karena $\cos^2(u) = 1 - \sin^2(u) = 1 - x^2$, maka

$$\int \frac{x}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2\cos^2(u)} + C = \boxed{\frac{1}{2(1-x^2)} + C}.$$

▼

Contoh 4.9: UAS 2019

Tentukan $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$.

Solusi. Perhatikan bahwa $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, maka substitusi $x+1 = \tan(u) \iff x = \tan(u) - 1$ sehingga $dx = \sec^2(u)\,du$. Ini berarti

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}\,dx &= \int \frac{2\tan(u)-1}{\tan^2(u)+1}\cdot\sec^2(u)\,du \\ &= \int \frac{2\tan(u)-1}{\sec^2(u)}\cdot\sec^2(u)\,du \\ &= \int (2\tan(u)-1)\,\,du \\ &= 2\int \tan(u)\,du - u + C\end{aligned}$$

di mana C konstan. Perhatikan bahwa $\int \tan(u)\, du = \int \frac{\sin(u)}{\cos(u)}\, du$. Misalkan $v = \cos(u) \implies dv = -\sin(u)\, du$. Ini berarti

$$\int \frac{\sin(u)}{\cos(u)}\, du = \int \frac{-dv}{v} = -\ln|v| + C_1 = -\ln|\cos(u)| + C_1$$

di mana C_1 suatu konstan. Dari sini diperoleh

$$\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\, dx = -2\ln|\cos(u)| - u + C_2.$$

di mana $C_2 = 2C_1 + C$ suatu konstan. Karena

$$\cos^2(u) = \frac{1}{\sec^2(u)} = \frac{1}{1+\tan^2(u)} = \frac{1}{1+(x+1)^2} \implies \cos(u) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

dan $\sqrt{x^2+2x+2} > 0$, ini berarti

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} &= -2\ln\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right| - \tan^{-1}(x+1) + C \\
&= -2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right) - \tan^{-1}(x+1) + C \\
&= \ln\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right)^{-2}\right] - \tan^{-1}(x+1) + C \\
&= \boxed{\ln\left(x^2+2x+2\right) - \tan^{-1}(x+1) + C}.
\end{aligned}$$

▼

§5. Integral Fungsi Rasional

Pada penjelasan sebelumnya telah dikenalkan tentang beberapa integral fungsi rasional dengan metode substitusi, seperti

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx, \quad \int \frac{3x^2}{x^3+9}\, dx, \quad \text{dan lain-lain.}$$

Namun, tidak semua persoalan integral fungsi rasional dapat langsung dikerjakan dengan metode substitusi. Pengintegralan fungsi rasional memiliki tekhnik tersendiri dalam menyelesaikannya, salah satunya adalah mengubah sebagai pecahan parsial (dekomposisi pecahan). Sebagai contoh,

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)}, \quad \frac{x}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2}.$$

§5.1. Derajat Pembilang Kurang dari Penyebut

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah suatu polinomial. Dua langkah awal sebelum melakukan dekomposisi pecahan $\frac{f(x)}{g(x)}$, yaitu:

- Derajat dari $f(x)$ **harus kurang dari** $g(x)$. Bahasan derajat $f(x)$ lebih dari atau sama dengan $g(x)$ dibahas di subbab selanjutnya.

- Mengetahui bentuk pemfaktoran dari $g(x)$ sebagai perkalian beberapa faktor yang *irreducible* (tidak dapat difaktorkan lagi) dalam koefisien berupa bilangan real. Sebagai contoh,
$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2), \quad x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2).$$

Dekomposisi Pecahan

Setelah mengetahui dua langkah awal di atas, langkah selanjutnya dapat mengikuti metode berikut.

1. Misalkan $x-r$ adalah faktor linear dari $g(x)$. Misalkan $(x-r)^m$ faktor dari $f(x)$ dengan pangkat dari $x-r$ yang tertinggi. Maka, bersesuaian dengan faktor tersebut, tambahkan m pecahan parsial
$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}.$$
Lakukan hal yang sama untuk setiap faktor linear dari $g(x)$ yang berbeda.

2. Jika $x^2 + px + q$ adalah faktor kuadratik dari $f(x)$ yang *irreducible* (tidak dapat difaktorkan sebagai perkalian dua faktor linear). Misalkan $\left(x^2+px+q\right)^n$ adalah faktor dari $g(x)$ dengan pangkat dari $x^2 + px + q$ pangkat tertinggi. Maka, bersesuaian dengan faktor tersebut, tambahkan n pecahan parsial
$$\frac{B_1x + C_1}{(x^2+px+q)} + \frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{\left(x^2+px+q\right)^n}.$$
Lakukan hal yang sama untuk setiap faktor kuadrati dari $g(x)$ yang berbeda.

3. Tuliskan $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sebagai jumlahan semua pecahan parsial dari nomor 1 dan nomor 2.

4. Samakan kedua ruas.

Contoh 5.1

Tentukan nilai dari $\displaystyle\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$.

Solusi. Perhatikan bahwa $g(x) = x^3 - 2x^2 - 3x = x\left(x^2 - 2x - 3\right) = x(x-3)(x+1)$. Faktor-Faktor dari $g(x)$ berupa faktor linear, dari langkah nomor 1:

- Perhatikan bahwa x faktor linear dari $g(x)$ dengan pangkat tertingginya 1, maka pecahan parsial yang bersesuaian dari faktor ini adalah $\dfrac{A}{x}$.

- Perhatikan bahwa $x-3$ faktor linear dari $g(x)$ dengan pangkat tertingginya 1, maka pecahan parsial yang bersesuaian dari faktor ini adalah $\frac{B}{x-3}$.

- Perhatikan bahwa $x+1$ faktor linear dari $g(x)$ dengan pangkat tertingginya 1, maka pecahan parsial yang bersesuaian dari faktor ini adalah $\frac{C}{x+1}$.

Karena $g(x)$ tidak memiliki faktor kuadratik *irreducible* sebagaimana nomor 2, maka langkah tersebut dapat dilewati. Pada langkah nomor 3, jumlahkan semua pecahan parsial terkait, tulis

$$\frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}.$$

Samakan penyebut di ruas kanan, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{5x+3}{x(x-3)(x+1)} &= \frac{A(x-3)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x+1)}\\ &= \frac{(A+B+C)x^2+(-2A+B-3C)x+(-3A)}{x(x-3)(x+1)}.\end{aligned}$$

Ini berarti

$$(A+B+C)x^2+(-2A+B-3C)x+(-3A) = 5x+3 = (0)x^2+(5)x+3$$

sehingga haruslah $A+B+C=0$, $-2A+B-3C=5$, dan $-3A=3$. Diperoleh bahwa $A=-1$, substitusikan, diperoleh $B+C=-A=1$ dan $B-3C=5+2A=3$. Dengan eliminasi diperoleh $B=\frac{3}{2}$ dan $C=-\frac{1}{2}$. Maka dari itu

$$\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} = -\frac{1}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x-3} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Ini berarti

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x} &= \int\left(-\frac{1}{x}\right)\,dx + \int\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-3}\right)\,dx - \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)\,dx\\ &= -\int\frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-3} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}\\ &= \boxed{-\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + D}\end{aligned}$$

di mana D konstan. ▼

Contoh 5.2

Tentukan $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.

Solusi. Tulis $g(x)=x(x+1)(x+2)$ yang mana semua faktornya berupa faktor linear (maka langkah nomor 2 dapat dilewati saja nanti). Dari langkah nomor 1:

- Perhatikan bahwa x faktor linear dari $g(x)$ dengan pangkat tertingginya 1, maka pecahan parsial yang bersesuaian dari faktor ini adalah $\frac{A}{x}$.

- Perhatikan bahwa $x+1$ faktor linear dari $g(x)$ dengan pangkat tertingginya 1, maka pecahan parsial yang bersesuaian dari faktor ini adalah $\dfrac{B}{x+1}$.
- Perhatikan bahwa $x+2$ faktor linear dari $g(x)$ dengan pangkat tertingginya 1, maka pecahan parsial yang bersesuaian dari faktor ini adalah $\dfrac{C}{x+2}$.

Langkah nomor 2 dapat dilewati karena tidak memiliki faktor kuadratik *irreducible*. Pada langkah nomor 3, jumlahkan semua pecahan parsial, tulis

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}.$$

Samakan penyebut di ruas kanan,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)(x+2)}&=\frac{A(x+1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}\\&=\frac{(A+B+C)x^2+(3A+2B+C)x+2A}{x(x+1)(x+2)}.\end{aligned}$$

sehingga haruslah

$$(A+B+C)x^2+(3A+2B+C)x+2A=1=(0)x^2+(0)x+1$$

sehingga diperoleh $A+B+C=0$, $3A+2B+C=0$, dan $2A=1$. Diperoleh $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-1$, dan $C=\dfrac{1}{2}$. Ini berarti

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x(x+1)(x+2)}&=\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3}\right)\,dx\\&=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+3}\\&=\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+D\end{aligned}$$

di mana D konstan. Dari sini diperoleh

$$\int_1^2\frac{dx}{x(x+1)(x+2)}=\left[\frac{\ln|x|}{2}-\ln|x+1|+\frac{\ln|x+3|}{2}+D\right]_1^2=\boxed{\frac{5\ln(2)-3\ln(3)}{2}}.$$

▼

Contoh 5.3

Tentukan $\displaystyle\int\frac{x}{(x-3)^2}\,dx$.

Solusi. Misalkan $g(x)=(x-3)^2$ yang memiliki faktor linear $(x-3)$. Dari langkah nomor 1:

- Perhatikan $(x-3)$ faktor linear dari $g(x)$ yang memiliki pangkat tertingginya 2. Maka pecahan parsial yang bersesuaian dari faktor ini adalah $\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{(x-3)^2}$.

Karena tidak memiliki faktor kuadratik *irreducible*, maka langkah nomor 2 dapat dilewati. Dari langkah nomor 3, jumlahkan semua pecahan parsial, tulis

$$\frac{x}{(x-3)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}.$$

Samakan penyebut di ruas kanan,

$$\frac{x}{(x-3)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}=\frac{Ax-3A+B}{(x-3)^2}=\frac{Ax+(B-3A)}{(x-3)^2}.$$

Dari sini diperoleh $Ax+(B-3A)=x=(1)x+0$ sehingga $A=1$ dan $B-3A=0$, didapatkan $B=3A=3$. Maka dari itu

$$\int\frac{x}{(x-3)^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}\right)\,dx=\int\frac{dx}{x-3}+3\int(x-3)^{-2}\,dx.$$

Misalkan $u=x-3$, maka $du=dx$ sehingga $\displaystyle\int(x-3)^{-2}\,dx=\int u^{-2}\,du=-\frac{1}{u}=-\frac{1}{x-3}$. Dari sini diperoleh

$$\int\frac{x}{(x-3)^2}\,dx=\ln|x-3|+3\left(-\frac{1}{x-3}\right)+C=\boxed{\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}+C}$$

di mana C suatu konstan. ▼

Contoh 5.4

Tentukan $\displaystyle\int\frac{3x^2+x-1}{x^3-x^2}\,dx.$

Solusi. Tulis $g(x)=x^3-x^2=x^2(x-1)$ yang memiliki faktor linear x dan $x-1$. Dari langkah nomor 1:

- Perhatikan bahwa x faktor linear dari $g(x)$ yang memiliki pangkat tertingginya 2. Maka pecahan parsial yang bersesuaian dari faktor ini adalah $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}$.
- Perhatikan bahwa $x-1$ faktor linear dari $g(x)$ yang memiliki pangkat tertingginya 1. Maka pecahan parsial yang bersesuaian dari faktor ini adalah $\dfrac{C}{x-1}$.

Langkah nomor 2 dapat dilewati karena $g(x)$ tidak memiliki faktor kuadratik *irreducible*. Dari langkah nomor 3, jumlahkan semua parsial, tulis

$$\frac{3x^2+x-1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}.$$

Samakan penyebut di ruas kanan,

$$\frac{3x^2+x-1}{x^2(x-1)}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}=\frac{(A+C)x^2+(-A+B)x-B}{x^2(x-1)}$$

sehingga diperoleh $A + C = 3$, $-A + B = 1$, dan $-B = -1$. Diperoleh bahwa $B = 1$, $A = B - 1 = 0$, dan $C = 3 - A = 3$. Ini berarti

$$\frac{3x^2 + x - 1}{x^2(x-1)} = \frac{0}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1} = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1}.$$

Dari sini diperoleh

$$\int \frac{3x^2 + x - 1}{x^2(x-1)} = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1}\right) dx = \boxed{-\frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + D}$$

di mana D suatu konstan. ▼

Contoh 5.5

Tentukan $\displaystyle\int \frac{x^2 - 10x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx$.

Solusi. Tulis $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = \left(x^2 - 1\right)^2 = (x+1)^2(x-1)^2$. Perhatikan bahwa $x + 1$ dan $x - 1$ merupakan faktor linear dari $g(x)$. Dari langkah nomor 1:

- Perhatikan bahwa $x + 1$ faktor linear dari $g(x)$ dengan pangkat tertingginya 2. Maka pecahan parsial yang bersesuaian dari faktor ini adalah $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2}$.
- Perhatikan bahwa $x - 1$ faktor linear dari $g(x)$ dengan pangkat tertingginya 2. Maka pecahan parsial yang bersesuaian dari faktor ini adalah $\dfrac{C}{x-1} + \dfrac{D}{(x-1)^2}$.

Langkah nomor 2 dapat dilewati karena tidak memiliki faktor kuadratik yang *irreducible*. Dari langkah nomor 3, tulis

$$\frac{x^2 - 10x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}.$$

Samakan penyebut di ruas kanan,

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 10x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} &= \frac{A(x+1)(x-1)^2 + B(x-1)^2 + C(x-1)(x+1)^2 + D(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (-A+B+C+D)x^2 + (-A-2B-C+2D)x + (A+B-C+D)}{(x+1)^2(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Dari sini diperoleh sistem persamaan

$$\begin{cases} A + C &= 0 & \ldots(1) \\ -A + B + C + D &= 1 & \ldots(2) \\ -A - 2B - C + 2D &= -10 & \ldots(3) \\ A + B - C + D &= 1 & \ldots(4) \end{cases}$$

Dari persamaan (1) diperoleh $C = -A$. Substitusikan ke persamaan (2), (3), dan (4), diperoleh

$$\begin{cases} -2A + B + D &= 1 & \ldots(5) \\ -2B + 2D &= -10 & \ldots(6) \\ 2A + B + D &= 1 & \ldots(7) \end{cases}$$

Jumlahkan persamaan (5) dan (7) diperoleh $2(B+D)=2 \iff B+D=1$, dari sini diperoleh $2A=1-(B+D)=0 \iff A=0$. Eliminasi $B+D=1$ dengan $-2B+2D=-10 \iff -B+D=-5$, diperoleh $D=-2$ dan $B=3$ serta $C=-A=0$. Jadi,

$$\frac{x^2-10x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{0}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{0}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Dari sini diperoleh

$$\int \frac{x^2-10x+1}{x^4-2x^2+1}=\int\left(\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}+S=\boxed{\frac{5-x}{x^2-1}+S}$$

di mana S suatu konstan. ▼

Contoh 5.6

Tentukan $\displaystyle\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)\left(x^2+1\right)}\,dx$.

Solusi. Perhatikan bahwa $g(x)=(4x+1)\left(x^2+1\right)$ memiliki faktor linear $4x+1$ dan faktor kuadratik *irreducible* x^2+1. Dari langkah 1 dan langkah 2:

- Perhatikan bahwa $4x+1$ faktor linear dari $g(x)$ yang memiliki pangkat tertingginya 1. Maka pecahan parsial yang bersesuaian dengan faktor ini adalah $\dfrac{A}{4x+1}$.
- Perhatikan bahwa x^2+1 faktor kuadrati *irreducible* dari $g(x)$ yang memiliki pangkat tertingginya 1. Maka pecahan parsial yang bersesuaian dengan faktor ini adalah $\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$.

Dari langkah 3, tulis

$$\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{4x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Samakan penyebut kedua ruas,

$$\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)(4x+1)}{(4x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{(A+4B)x^2+(B+4C)x+(A+C)}{(4x+1)\left(x^2+1\right)}.$$

Dari sini diperoleh $A+4B=6$, $B+4C=-3$, dan $A+C=1$. Substitusi $C=1-A$, maka

$$-3=B+4C=B+4(1-A)=B+4-4A \implies -7=B-4A.$$

Eliminasi dengan $A+4B=6$, diperoleh $A=2$ dan $B=1$ sehingga $C=1-A=-1$. Dari sini diperoleh

$$\frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{2}{4x+1}+\frac{x-1}{x^2+1}.$$

Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)}dx &= \int \frac{2}{4x+1}dx+\int\frac{x-1}{x^2+1}dx\\ &= \frac{2}{4}\ln|4x+1|+\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx\\ &= \boxed{\frac{1}{2}\ln|4x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\tan^{-1}(x)+C}.\end{aligned}$$

▼

§5.2. Derajat Pembilang Lebih dari Penyebut

Pada bahasan sebelumnya telah dibahas dekomposisi pecahan apabila derajat pembilang kurang dari penyebut. Tentunya akan lebih menarik jika pada kasus sebaliknya, yaitu apabila derajat pembilang lebih besar dari atau sama dengan penyebut. Metode yang digunakan sangat mirip, perbedaannya hanya terletak pada langkah awal saja yang akan melibatkan pembagian pada polinomial. Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah polinomial dan derajat dari $f(x)$ lebih besar dari atau sama dengan $g(x)$. Menurut Algoritma Pembagian, polinomial $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = g(x)H(x) + R(x)$$

di mana $H(x)$ dan $R(x)$ berturut-turut merupakan polinomial dan derajat $R(x)$ kurang dari derajat $g(x)$. Dari sini diperoleh

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{g(x)H(x)+R(x)}{g(x)}\,dx = \int \left(H(x) + \frac{R(x)}{g(x)}\right)dx = \int H(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{g(x)}\,dx.$$

Contoh 5.7

Tentukan $\displaystyle\int \frac{x^5-3}{x^3-x}\,dx$.

Solusi. Langkah pertama, tentukan hasil bagi $H(x)$ dan sisa bagi $S(x)$ saat x^5-3 dibagi x^3-x, lalu tuliskan sebagai

$$x^5 - 3 = \left(x^3 - x\right)H(x) + S(x).$$

Untuk menentukan $H(x)$ dan $S(x)$ dapat dilakukan dengan pembagian bersusun.

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad\; x^2 \qquad\quad + 1 \\ \hline
x^3 - x & \; x^5 \qquad\qquad\quad - 3 \\
 & -x^5 + x^3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad x^3 \\
 & \qquad -x^3 \quad + x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad x - 3
\end{array}$$

Dari pembagian di atas diperoleh bahwa hasil baginya $H(x) = x^2 + 1$ dan sisa baginya $S(x) = x - 3$. Tulis $x^5 - 3 = \left(x^3 - x\right)\left(x^2 + 1\right) + (x - 3)$. Ini berarti

$$\int \frac{x^5-3}{x^3-x}\,dx = \int \frac{(x^2+1)(x^3-x)+x-3}{x^3-x}\,dx = \int \left[\left(x^2+1\right) + \frac{x-3}{x^3-x}\right]dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \frac{x-3}{x^3-x}\,dx.$$

Akan ditentukan $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^3-x}\,dx = \int \frac{x-3}{(x-1)x(x+1)}$ yang mana prosesnya telah dijelaskan di bahasan sebelumnya. Tinjau bahwa $(x-1)$, x, dan $(x+1)$ masing-masing faktor linier dari

$g(x) = (x-1)x(x+1)$ yang di mana pangkat tertingginya masing-masing adalah 1. Dengan meninjau bentuk pecahan parsial dari masing-masing faktor yang berkaitan, tulis

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{x^3-x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} \\
\frac{x-3}{x^3-x} &= \frac{A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)}{x^3-x} \\
x-3 &= (A+B+C)x^2 + (-B+C)x + -A.
\end{aligned}$$

Dari sini diperoleh $A+B+C=0$, $-B+C=1$, dan $-A=3 \iff A=3$. Didapatkan pula $B+C=-A=-3$. Eliminasi dengan persamaan $-B+C=1$ diperoleh $C=-1$ dan $B=-2$. Maka dari itu

$$\int \frac{x-3}{x^3-x}dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) dx = 3\ln|x| - 2\ln|x+1| - \ln|x-1| + C$$

di mana C suatu konstan. Jadi,

$$\int \frac{x^5-3}{x^3-x}dx = \boxed{\frac{1}{3}x^3 + x + 3\ln x - 2\ln|x+1| - \ln|x-1| + C}.$$

Contoh 5.8

Tentukan $\displaystyle\int \frac{x^6+x^5+x^4+2x^3-x^2+2x-2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Solusi. Akan ditentukan hasil bagi dan sisa ketika $x^6+x^5+x^4+2x^3-x^2+2x-2$ dibagi oleh $\left(x^2+1\right)^2 = x^4+2x^2+1$.

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & & & & & x^2 & +x & -1 \\
\hline
x^4+2x^2+1 & x^6 & +x^5 & +x^4 & +2x^3 & -x^2 & +2x & -2 \\
 & -x^6 & & -2x^4 & & -x^2 & & \\
\cline{2-6}
 & & x^5 & -x^4 & +2x^3 & -2x^2 & +2x & \\
 & & -x^5 & & -2x^3 & & -x & \\
\cline{3-7}
 & & & -x^4 & & -2x^2 & +x & -2 \\
 & & & x^4 & & +2x^2 & & +1 \\
\cline{4-8}
 & & & & & & x & -1
\end{array}$$

Dari sini diperoleh bahwa hasil baginya adalah $H(x) = x^2+x-1$ dan sisanya adalah $R(x) = x-1$, maka dari itu tulis

$$x^4+x^3+2x-2 = \left(x^4+2x^2+1\right)\left(x^2+x-1\right) + x - 1 = \left(x^2+1\right)^2\left(x^2+x-1\right) + x - 1.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}\int \frac{x^6+x^5+x^4+2x^3-x^2+2x-2}{x^2+1} &= \int \frac{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+x-1\right)+x-1}{x^2+1}\,dx\\ &= \int \left(x^2+x-1+\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx\\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx\end{aligned}$$

Karena x^2+1 merupakan faktor kuadratik *irreducible* dari $\left(x^2+1\right)^2$ dengan pangkat tertingginya adalah 2, maka dari itu misalkan

$$\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Samakan penyebut di ruas kanan,

$$\frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\left(B_1x+C_1\right)\left(x^2+1\right)+B_2x+C_2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{B_1x^3+C_1x^2+(B_1+B_2)x+(C_1+C_2)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

sehingga haruslah $B_1=0$, $C_1=0$, $B_1+B_2=1$, dan $C_1+C_2=-1$. Jadi, diperoleh $B_2=1$ dan $C_2=-1$ yang mana ternyata kembali ke bentuk semula. Namun, jangan khawatir! Tinjau

$$\int \frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx=\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx-\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Untuk menyelesaikan $\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$, misalkan $u=x^2+1 \implies du=2x;$. Ini berarti

$$\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx=\int \frac{1}{2u^2}=-\frac{1}{2u}+C_1=-\frac{1}{2x^2+2}+C_1$$

di mana C_1 suatu konstan. Untuk menyelesaikan $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$, misalkan $x=\tan(v) \implies dx = \sec^2(v)\,dv$. Ini berarti

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\int \frac{\sec^2(v)\,dv}{\left(\tan^2(v)+1\right)^2}=\int \frac{\sec^2(v)\,dv}{\sec^4(x)}\int \frac{dv}{\sec^2(v)}=\int \cos^2(v)\,dv.$$

Karena $\cos^2(v)=\frac{\cos(2v)+1}{2}$, ini berarti

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\int \cos^2(v)\,dv=\int \frac{\cos(2v)+1}{2}\,dv=\frac{\frac{\sin(2v)}{2}+v}{2}+C_2=\frac{\sin(v)\cos(v)+v}{2}+C_2$$

di mana C_2 suatu konstan. Karena $\tan(v)=x$, ini berarti $\sin(v)=x\cos(v)$. Berdasarkan identitas $\sin^2(v)+\cos^2(v)=1$ diperoleh

$$1=\sin^2(v)+\cos^2(v)=x^2\cos^2(v)+\cos^2(v)=\left(x^2+1\right)\cos^2(v) \implies \cos(v)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Substitusikan $\sin(v)=\sqrt{1-\cos^2(v)}=\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Dari sini diperoleh

$$\sin(v)\cos(v)+v=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\tan^{-1}(x)=\frac{x}{x^2+1}+\tan^{-1}(x).$$

Jadi, diperoleh

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^6+x^5+x^4+2x^3-x^2+2x-2}{x^2+1} &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx \\
&= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx-\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}. \quad = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x- \\
&= \boxed{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x-\frac{x+1}{2x^2+2}-\frac{\tan^{-1}(x)}{2}+C}
\end{aligned}$$

di mana $C = C_1 + \dfrac{C_2}{2}$ suatu konstan.

§6. Latihan Soal

Soal Kuliah

1. (a). $\int e^{2x} \cos(x)\ dx.$
   (b). $\int xe^{x}\ dx.$
   (c). $\int \sin^{-1} x\ dx.$
   (d). $\int \frac{\ln[\ln x]}{x} dx.$
   (e). $\int x \sec^2(x)\ dx.$
   (f). $\int x^5 \ln(x)\ dx.$
2. (a). $\int x(\ln(x))^5\ dx.$
   (b). $\int \ln\left(x + x^2\right)\ dx.$
   (c). $\int \sin(\ln(x))\ dx.$
   (d). $\int \frac{dx}{x(\ln(x))^2}.$
   (e). $\int x \tan^{-1}(x)\ dx.$
   (f). $\int x^5 e^{x^3}\ dx.$
3. (a). $\int \sin(2x)\cos(4x)\ dx.$
   (b). $\int \sin(3x)\cos^2(2x)\ dx.$
   (c). $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \cos(4x)}\ dx.$
   (d). $\int \tan^4(x)\ dx.$
   (e). $\int \tan^4(x)\sec^4(x)\ dx.$
   (f). $\int \sin^4(2x)\cos(2x)\ dx.$
   (g). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x)\cos^3(2x)\ dx.$
   (h). $\int \cos(\sqrt{x}) dx.$
   (i). $\int \frac{1}{x - \sqrt{x}} dx.$
4. Buktikan **Teorema 3.4**.
5. Lengkapi bukti **Teorema 4.4**.
6. (a). $\int \operatorname{cosec}(x)\ dx.$
   (b). $\int \cot(x)\ dx.$
7. (a). $\int \sqrt{25 - x^2}\ dx.$
   (b). $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 49}}.$
   (c). $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2 + 4}.$
   (d). $\int \frac{\sqrt{y^2 - 25}}{y^3}.$
   (e). $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}.$
   (f). $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}.$
   (g). $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{1 + x^4}}\ dx.$
   (h). $\int \frac{\sqrt{1 - (\ln(x))^2}}{x \ln(x)}\ dx.$
8. (a). $\int \frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3}\ dx.$
   (b). $\int \frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2}\ dx.$
   (c). $\int \frac{z + 1}{z^2(z - 1)}\ dz.$
   (d). $\int \frac{dx}{1 - x^2}.$

14. (a). $\displaystyle\int \frac{t^4+9}{t^4+9t^2}\, dt.$

    (b). $\displaystyle\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\, dx.$

    (c). $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2 x}.$

    (d). $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{x^3-1};.$

15. (a). $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\, dx.$

    (b). $\displaystyle\frac{x^4}{x^2-1}\, dx.$

    (c). $\displaystyle\frac{9x^3-3x+1}{x^3-x^2}\, dx.$

    (d). $\displaystyle\int \frac{y^4+y^2-1}{y^3+y}\, dy.$

16. Hitung luas daerah $g(x) = \dfrac{6e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ yang dibatasi $x=-1$ dan $x=1$.

17. Hitung luas daerah $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}$ yang dibatasi $x=3$ dan $x=6$.

Soal Lomba

18. (Caption 2020) Diberikan suatu bilangan $c \in \mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan

$$\int_{23082020\pi}^{23082020\pi} \frac{1-\cos^{20200823}(|x|)}{1-e^x}\, dx = 2\pi c.$$

Tentukan digit satuan dari penjumlahan digit-digit c.

19. (SadharCail 2022) Tentukan hasil dari $\displaystyle\int \sqrt{\frac{9-x}{x}}\, dx$.

20. (SadharCail 2022) Tentukan $\displaystyle\int \ln\left(\sqrt{ax}\right)\, dx$.

21. (SadharCail 2022) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan ganjil, $n > 2$, berlaku

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot n}.$$

22. (Mission 2023) Tentukan $\displaystyle\int \sec^5(x)\, dx$.

23. (Mission 2023) Tentukan nilai dari $\cos\left(\cot^{-1}\left(\operatorname{cosec}\left(\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)\right)$.

24. (Mission 2023) Diketahui nilai dari $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}\, dx = \frac{a}{b}$ di mana a, b bilangan asli yang memenuhi $\text{FPB}(a,b)=1$. Tentukan nilai dari $\sqrt[ab]{(a+b)+(2a+b)(a+b)b}$.