Responsi Kalkulus I D 2023/2024

Departemen Matematika Universitas Brawijaya

Dosen Pengampu:

Corina Karim, S.Si.,M.Si.,Ph.D

Asisten:

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Fungsi Transenden dan Logaritma

Ringkasan

Modul ini akan membahas **secara ringkas** tentang: Fungsi Logaritma Natural, Fungsi Eksponen Natural, Fungsi Eksponen Umum, Penggunaan Eksponen dan Logaritma, Invers Fungsi Trigonometri, Fungsi Hiperbolik dan inversnya. Perlu diingat bahwa modul ini **jangan dijadikan patokan untuk belajar** karena hanya sebagai ringkasan. Lebih baik Anda membaca terlebih dahulu versi lengkapnya pada referensi tertentu, seperti buku oleh cak Purcell atau cak Thomas. Sebagai latihan tambahan, contoh soal dapat dicoba terlebih dahulu hingga benar-benar menyerah (atau sudah selesai). Jika tidak berhasil menyelesaikannya, maka ikuti alurnya dan **jangan sekedar dibaca**, namun sambil menulis seakan dikerjakan sendiri.

§1. Fungsi Logaritma Alami (Natural)

Definisi 1.1 (Fungsi Logaritma Alami/Natural)**.** Diberikan x adalah bilangan real positif. Logaritma natural dari x dituliskan sebagai $\ln(x)$ yang didefinisikan sebagai

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0.$$

Dengan demikian, untuk $x = 1$ berlaku

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{dt}{d} = 0.$$

Definisi 1.2 (Bilangan e)**.** Bilangan irasional $e = 2,718281828459\cdots$ yang termasuk bilangan transenden didefinisikan sebagai

$$\ln(e) = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

Teorema 1.3: Teorema Fundamental pada Logaritma Natural

Untuk $x > 0$, maka

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x \frac{dt}{t} = \frac{1}{x} \implies \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}.$$

Bentuk di atas dapat diperumum untuk setiap bilangan real $x \neq 0$, yaitu

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad \text{dan} \quad \int \frac{1}{x} = \ln|x| + C.$$

Dengan menggunakan **Definisi 1.1** dapat diturunkan sifat-sifat dari logaritma natural.

Teorema 1.4: Sifat-Sifat Logaritma Natural

Jika a dan b adalah bilangan real positif dan r bilangan real, maka

(a). $\ln(1) = 0$.

(b). $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

(c). $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

(d). $\ln(a^r) = r\ln(a)$.

Contoh 1.5

Tentukan turunan pertama dari $f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}(3x+2)^2}{\sqrt{x+4}}\right)$.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}(3x+2)^2}{\sqrt{x+4}}\right) \\ &= \ln\left[\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}(3x+2)^2\right] - \ln\left[(x+4)^{\frac{1}{2}}\right] && \text{(sifat c)} \\ &= \ln\left[\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}\right] + \ln\left[(3x+2)^2\right] - \ln\left[(x+4)^{\frac{1}{2}}\right] && \text{(sifat b)} \\ &= \frac{2}{3}\ln\left(x^2-1\right) + 2\ln(3x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+4). && \text{(sifat d)} \end{aligned}$$

Dengan menerapkan aturan rantai dan sifat-sifat turunan dapat diperoleh

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}\ln(x^2-1) + 2\ln(3x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+4)\right] \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}\ln\left(x^2-1\right)\right) + \frac{d}{dx}\left(2\ln(3x+2)\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x+4)\right) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x + 2\cdot\frac{1}{3x+2}\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+4} \\ &= \boxed{\frac{4x}{3x^2-3} + \frac{6}{3x+2} - \frac{1}{2x+8}}. \end{aligned}$$

▼

Contoh 1.6

Tentukan turunan pertama dari $\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$.

Solusi. Misalkan $g(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$. Diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \ln[g(x)] &= \ln\left(\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}\right) \\ &= \ln\left[\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \ln\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}\right] && \text{(sifat c)} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right) - \frac{2}{3}\ln(x+1). && \text{(sifat d)} \end{aligned}$$

Dengan menerapkan aturan rantai dan sifat-sifat turunan dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln[g(x)] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\ln(1-x^2) - \frac{2}{3}\ln(x+1)\right] \\
\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{dg(x)}{dx} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot(-2x) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1} \\
\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot g'(x) &= \frac{-x}{1-x^2} - \frac{2}{3(x+1)} \\
\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot g'(x) &= \frac{-3x-2(1-x)}{3\left(1-x^2\right)} \\
\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot g'(x) &= \frac{-x-2}{3\left(1-x^2\right)} \\
g'(x) &= -\frac{x+2}{3\left(1-x^2\right)}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} \\
g'(x) &= \boxed{-\frac{x+2}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x^2}}}.
\end{aligned}$$

▼

Contoh 1.7

Tentukan hasil $\displaystyle\int \frac{5}{2x+7}\,dx$.

Solusi. Dengan memisalkan $u = 2x+7$, maka $\dfrac{du}{dx} = 2 \Longrightarrow dx = \dfrac{du}{2}$. Dari sini diperoleh

$$\int \frac{5}{2x+7}\,dx = \int \frac{5}{u}\cdot\frac{du}{2} = \frac{5}{2}\int\frac{1}{u}\,du = \frac{5}{2}\ln|u| + C = \boxed{\frac{5}{2}\ln|2x+7| + C}.$$

▼

§2. Fungsi Invers dan Turunannya

Definisi 2.1. Diberikan fungsi $f : A \to B$ bijektif (surjektif dan injektif), maka fungsi f memiliki fungsi invers $f^{-1} : B \to A$ yang memenuhi

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x) = x \quad \forall\, x \in A \quad \text{dan} \quad \left(f\circ f^{-1}\right)(y) = y \quad \forall\, y \in B.$$

Untuk membuktikan bahwa fungsi kontinu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bersifat bijektif dapat dibuktikan menggunakan definisi injektif dan surjektif. Namun, dalam kondisi tertentu membuktikan menggunakan definisinya akan sulit. Alternatifnya, akan lebih praktis jika membuktikan fungsi kontinu f adalah fungsi monoton tegas. Untuk membuktikan f monoton tegas di $[a,b]$, perlu dibuktikan bahwa $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$ yang berarti f monoton naik, atau $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$ yang berarti f monoton turun.

Contoh 2.2

Periksa apakah $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^5 + 2x^3 - 1$ memiliki fungsi invers.

Solusi. Perhatikan bahwa f merupakan fungsi kontinu. Memeriksa bahwa apakah f merupakan fungsi bijektif akan cukup sulit, akan lebih praktis dengan memeriksa apakah f merupakan fungsi monoton di $\mathbb{R}$. Perhatikan bahwa $f'(x) = 4x^4 + 6x^2$. Perhatikan bahwa untuk untuk $x \neq 0$ maka $x^4 > 0$ dan $x^2 > 0$ sehingga $f'(x) = 4x^4 + 6x^2 > 0$. Jadi, f merupakan monoton naik di $\mathbb{R}$ sehingga f memiliki fungsi invers. ▼

Contoh 2.3

Buktikan bahwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x - 6$ memiliki fungsi invers, kemudian tentukan formula untuk $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Solusi. Perhatikan bahwa $f'(x) = 2 > 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka f merupakan fungsi monoton naik di $\mathbb{R}$. Jadi, f memiliki invers. Misalkan $y = f^{-1}(x)$, maka $f(y) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$. Dari sini diperoleh

$$x = f(y) = 2y - 6 \implies y = \frac{x+6}{2} \implies f^{-1}(x) = \boxed{\frac{x+6}{2}}.$$

Pembaca dapat mengeceknya secara mandiri bahwa $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$ dan $\left(f^{-1} \circ f\right)(y) = y$. ▼

Setelah berkenalan dengan fungsi invers, tentunya bahasan ini akan lebih menarik jika membahas tentang turunan dari fungsi invers.

Teorema 2.4: Turunan Fungsi Invers

ika fungsi f terdiferensial dan monoton tegas di interval I, maka f^{-1} terdiferensial di setiap titik dari range f, dengan

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Bukti. Misalkan $y(x) = f^{-1}(x)$, akan ditentukan $y'(x) = \frac{d}{dx} y(x) = \frac{d}{dx} f^{-1}(x)$. Dari sini diperoleh $f(y(x)) = x$. Dengan menerapkan aturan rantai,

$$1 = \frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} f(y(x)) = f'(y(x)) y'(x) \implies y'(x) = \frac{1}{f'(y(x))} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

seperti yang ingin dibuktikan. □

Contoh 2.5

Jika $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x - 6$, tentukan $\frac{d}{dx} f^{-1}(x)$.

Solusi. Perhatikan bahwa $f'(x) = 2$ dan $f^{-1}(x) = \dfrac{x+6}{2}$. Dari sini diperoleh

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{x+6}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Hal ini dapat diverivikasi secara langsung dari

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{d}{dx} \frac{x+6}{2} = \frac{1}{2}.$$

Jadi, $\dfrac{d}{dx} f^{-1}(x) = \boxed{\dfrac{1}{2}}$. ▼

Contoh 2.6

Diberikan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di mana $f(x) = x^3 + 3x + 5$, tentukan $\left(f^{-1}\right)'(5)$.

Solusi. Tinjau bahwa

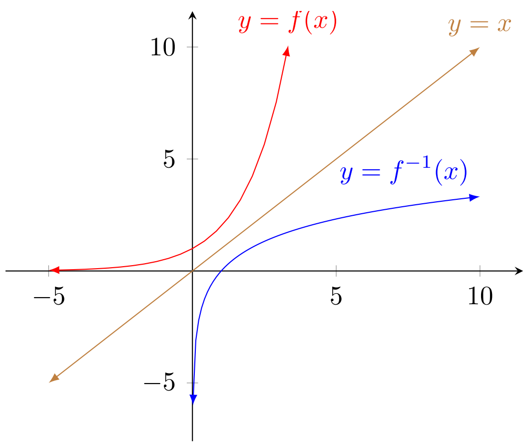
$$\left(f^{-1}\right)'(5) = \frac{d}{dx} f^{-1}(x)\bigg|_{x=5} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}\bigg|_{x=5} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(5)\right)}.$$

Dalam hal ini perlu ditentukan terlebih dahulu $f^{-1}(5)$. Misalkan $f^{-1}(5) = y$, maka $5 = f(y) = y^3 + 3y + 5 \implies 5 = y^3 + 3y + 5$ sehingga diperoleh $0 = y^3 + 3y = y\left(y^2 + 3\right)$. Maka dari itu $y = 0$ atau $y^2 + 3 = 0$. Namun, untuk $y^2 + 3 = 0$ tidak mungkin karena $y^2 = -3 \implies y = \pm\sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$. Jadi, $y = 0$ sehingga dapat diperoleh $f^{-1}(5) = 0$. Karena $f'(x) = 3x^2 + 3$, ini berarti

$$\left(f^{-1}\right)'(5) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(5)\right)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3 \cdot 0^2 + 3} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

▼

Apabila ditinjau berdasarkan grafiknya, grafik dari $y = f^{-1}(x)$ diperoleh dari mencerminkan grafik $y = f(x)$ terhadap garis $y = x$.



§3. Fungsi Eksponen Alami (Natural)

Definisi 3.1 (Fungsi Eksponen Alami)**.** Invers dari fungsi ln disebut sebagai **eksponen natural** yang ditulsikan sebagai exp, yaitu

$$x = \exp(y) = e^y \iff y = \ln(x).$$

Dengan kata lain, $\exp(y) = \ln^{-1}(y)$.

Teorema 3.2: Sifat-Sifat dan Turunan Eksponen Natural

(a). $e^x e^y = e^{x+y}$.

(b). $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

(c). $e^{\ln(x)} = x$.

(d). $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$.

(e). $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C$.

Bukti. Sifat (a), (b), dan (c) merupakan sifat eksponen dan logaritma yang telah dipelajari di bangku SMA, maka akan dibuktikan pada bagian (d) dan (e) saja. Misalkan $y(x) = e^x$, maka $\ln[y(x)] = \ln(e^x) = x\ln(e) = x$. Turunkan kedua ruas terhadap x dan dengan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$\frac{d}{dx}[y(x)] = 1 \implies 1 = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = \frac{1}{e^x} \cdot y'(x) \implies y'(x) = e^x,$$

terbukti. Karena turunan dari e^x adalah e^x, maka antiturunan (integral tak tentu) dari e^x adalah $e^x + C$, dengan kata lain, $\int e^x = e^x + C$ di mana C suatu konstan. □

Teorema 3.3: Aturan Rantai

Jika f adalah fungsi terdiferensial dan $y = e^{f(x)}$, maka $\dfrac{dy}{dx} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$. Dari sini dapat diverivikasi bahwa

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C.$$

Bukti. Bukti untuk turunan $e^{f(x)}$ diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Pada integral, untuk mempermudah pengingtegralan, substitusikan $u = f(x)$. Diperoleh $\dfrac{du}{dx} = f'(x) \iff du = f'(x)\, dx$. Maka dari itu

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = \int e^u\, du = e^u + C = e^{f(x)} + C.$$

Tekhnik ini dinamakan tekhnik substitusi yang akan dibahas lebih lanjut di tekhnik pengintegralan. □

Contoh 3.4

Tentukan $\dfrac{d}{dx}\left(xe^{x^2+1}\right)$ dan $\displaystyle\int xe^{x^2+1}\, dx$.

Solusi. Menggunakan sifat $(uv)' = u'v + uv'$ dengan $u = x$ dan $v = e^{x^2+1}$, tinjau $u' = 1$ dan $v' = e^{x^2+1} \cdot (2x) = 2xe^{x^2+1}$. Diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{x^2+1}\right) = 1 \cdot e^{x^2+1} + x \cdot 2xe^{x^2+1} = e^{x^2+1} + 2x^2e^{x^2+1} = \boxed{\left(2x^2+1\right)e^{x^2+1}}.$$

Untuk menentukan $\int xe^{x^2+1}\,dx$, ingat bahwa dalam hal ini fakta yang sudah dijelaskan adalah $\int e^u\,du = e^u + C$. Untuk mempermudah pengintegralan, substitusikan $u = x^2 + 1$ sehingga diperoleh $\frac{du}{dx} = 2x \iff dx = \frac{du}{2x}$. Sehingga diperoleh

$$\int xe^{x^2+1}\,dx = \int x \cdot e^u \cdot \frac{du}{2x} = \int \frac{e^u}{2}\,du = \boxed{\frac{e^u}{2} + C,\ C \text{ konstan}}.$$

▼

Contoh 3.5

Tentukan $\frac{d}{dx}\left(e^x \cos^2(x)\right)$ dan $\int e^{\tan(x)} \sec^2(x)\,dx$.

Solusi. Misalkan $u = e^x$ dan $v = \cos^2(x)$, maka $u' = e^x$ dan $v' = 2\cos(x)(-\sin(x)) = -2\cos(x)\sin(x)$. Menggunakan sifat $(uv)' = u'v + uv'$, dari sini diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(e^x \cos^2(x)\right) = e^x \cos^2(x) + e^x(-2\sin(x)\cos(x)) = \boxed{e^x \cos^2(x) - 2e^x \sin(x)\cos(x)}.$$

Akan ditentukan $\int e^{\tan(x)} \sec^2(x)\ dx$. Sebagaimana **Contoh 3.4**, untuk mempermudah pengintegralan, substitusi $k = \tan(x)$ sehingga diperoleh $\frac{dk}{dx} = \sec^2(x)\ dx \iff dx = \frac{dk}{\sec^2(x)}$. Didapatkan

$$\int e^{\tan(x)} \sec^2(x)\,dx = \int e^k \sec^2(x) \cdot \frac{dk}{\sec^2(x)} = \int e^k\,dk = e^k + C = \boxed{e^{\tan(x)} + C,\ C \text{ konstan}}.$$

▼

Contoh 3.6

Tentukan integral tak tentu $\int e^{x-\tan(x)} \tan^2(x)\,dx$.

Solusi. Misalkan $u = x - \tan(x)$, ini berarti $\frac{du}{dx} = 1 - \sec^2(x) = -\tan^2(x)$ sehingga $du = -\tan^2(x)\,dx$. Dari sini diperoleh

$$\int e^{x-\tan(x)} \cdot \tan^2(x)\,dx = \int e^u\,(-du) = -\int e^u\,du = -e^u + C = \boxed{-e^{x-\tan(x)} + C.\ C \text{ konstan}}.$$

▼

§4. Fungsi Eksponen Umum

Definisi 4.1 (Fungsi Eksponensial Umum)**.** Untuk $a > 0$ dan x bilangan real, menggunakan **Teorema 3.2 (c), (d)** diperoleh

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln(a)}.$$

Teorema 4.2: Sifat-Sifat Fungsi Eksponen Umum

Diberikan $a > 0$ dan $b > 0$ serta x dan y bilangan real, maka berlaku:

(a). $a^x a^y = a^{x+y}$.

(b). $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

(c). $(a^x)^y = a^{xy}$.

(d). $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

(e). $(ab)^x = a^x b^x$.

(f). ${}^a\log(b) = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$ di mana $a \neq 1$.

Teorema 4.3: Turunan dan Integral Fungsi Eksponen

Jika $a > 0$, maka

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln(a) \quad \text{dan} \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

di mana C suatu konstan.

Bukti. Misalkan $y(x) = a^x$, maka diperoleh $\ln[y(x)] = \ln(a^x) = x \ln(a) \implies \ln[y(x)] = x \ln(a)$. Turunkan kedua ruas terhadap x dan dengan menerapkan aturan rantai, diperoleh

$$\frac{d}{dx} x \ln(a) = \frac{d}{dx} \ln[y(x)] \implies \ln(a) = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = \frac{1}{a^x} \cdot y'(x)$$

sehingga diperoleh $y'(x) = a^x \ln(a)$ seperti yang ingin dibuktikan. Kemudian, dapat diperoleh bahwa

$$a^x = \frac{y'(x)}{\ln(a)} \implies \int a^x \, dx = \int \frac{y'(x)}{\ln(a)} \, dx = \frac{1}{\ln(a)} \int y'(x) \, dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot y(x) + C = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

di mana C suatu konstan, seperti yang ingin dibuktikan. □

Catatan. Pembaca perlu menghafal **Teorema 4.3** karena bukti teorema tersebut dapat diturunkan melalui konsep-konsep sebelumnya dengan menggunakan fungsi ln.

Contoh 4.4

Tentukan $\dfrac{d}{dx}\left(2^{x^2}\left(x^2+1\right)\right)$ dan $\displaystyle\int 2^{\sin(x)} \cos(x) \, dx$.

Solusi. Akan ditentukan $\frac{d}{dx}\left(2^{x^2}\left(x^2+1\right)\right)$, misalkan $u = 2^{x^2}$ dan $v = x^2+1$. Perhatikan bahwa $\ln(u) = \ln\left(2^{x^2}\right) = x^2\ln(2)$. Dengan menerapkan aturan rantai,

$$\frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{d}{dx}x^2\ln(2) \implies \frac{1}{u}\cdot u' = 2x\ln(2) \implies u' = 2x\ln(2)\cdot u = 2x\ln(2)\cdot 2^{x^2} = 2^{x^2+1}x\ln(2).$$

Kemudian, $v' = 2x$. Dengan memanfaatkan $(uv)' = u'v + uv'$ maka diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(2^{x^2}\left(x^2+1\right)\right) = 2^{x^2+1}x\ln(2)\left(x^2+1\right) + 2^{x^2}\cdot 2x = 2^{x^2+1}x\left(x^2+1\right)\ln(2) + 2^{x^2+1}x$$

atau dapat dituliskan dengan

$$\frac{d}{dx}\left(2^{x^2}\left(x^2+1\right)\right) = \boxed{2^{x^2+1}x\left(x^2\ln(2)+\ln(2)+1\right)}.$$

Akan ditentukan $\int 2^{\sin(x)}\cos(x)\ dx$. Misalkan $u = \sin(x)$, maka $\frac{du}{dx} = \cos(x)$. Dari sini diperoleh

$$\int 2^{\sin(x)}\cos(x)\ dx = \int 2^u\ du = \frac{2^u}{\ln(2)} + C = \boxed{\frac{2^{\sin(x)}}{\ln(2)} + C,\ C \text{ konstan}}.$$

▼

§5. Penggunaan Eksponen dan Logaritma Natural

Selain berguna dalam menentukan turunan atau integral, logaritma natural da dan eksponensial pat membantu dalam menentukan nilai limit. Bentuk limit yang dihadapkan biasanya apabila variabel pada limit terletak pada pangkat.

Contoh 5.1

Tentukan nilai dari $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Solusi. Misalkan $g(x) = x^x$, maka $\ln[g(x)] = \ln(x^x) = x\ln(x)$ berdasarkan sifat d. Karena fungsi $f(x) = \ln(x)$ merupakan fungsi kontinu, maka berlaku properti

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\ln[g(x)] = \ln\left[\lim_{x\to 0^+} g(x)\right].$$

Perhatikan bahwa $x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$. Karena untuk $x \to 0^+$ kita punya $\ln(x) = -\infty$ dan $\frac{1}{x} \to \infty$, maka dapat diterapkan aturan L'Hopital, yaitu

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \stackrel{\text{L}}{=} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Ini berarti

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+} g(x)\right] = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \implies \ln\left[\lim_{x\to 0^+} g(x)\right] = 0 \implies \lim_{x\to 0^+} g(x) = 1.$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x\to 0^+} x^x = \boxed{1}$. ▼

Contoh 5.2

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Solusi. Misalkan $g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, maka $\ln[g(x)]=\ln\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ berdasarkan sifat d. Karena $\ln(x)$ merupakan fungsi kontinu, maka berlaku properti

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln[g(x)]=\ln\left[\lim_{x\to\infty}g(x)\right].$$

Perhatikan bahwa $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Karena untuk $x\to\infty$ berlaku $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\to\ln(1+0)=0$ dan $\dfrac{1}{x}\to 0$, maka dapat diterapkan aturan L'Hopital, yaitu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\text{L}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+0=1.$$

Ini berarti

$$1=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\left[\lim_{x\to\infty}g(x)\right]\implies 1=\ln\left[\lim_{x\to\infty}g(x)\right]\implies\lim_{x\to\infty}g(x)=e.$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\boxed{e}$. ▼

Catatan. Pembaca dapat melakukan substitusi untuk menentukan nilai limit. Misalkan $n=\dfrac{1}{x}$, maka untuk $x\to\infty$ diperoleh $n=\dfrac{1}{x}\to 0\implies n\to 0$. Dari sini diperoleh

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\ln(1+n)=\lim_{n\to 0}\frac{\ln(1+n)}{n}.$$

Perhatikan bahwa untuk $n\to 0$ berlaku $\ln(1+n)\to\ln(1)=0$ dan $n\to 0$, maka dapat diterapkan L'Hopital, yaitu

$$\lim_{n\to 0}\frac{\ln(1+n)}{n}\overset{\text{L}}{=}\lim_{n\to 0}\frac{\frac{1}{1+n}\cdot 1}{1}=\lim_{n\to 0}\frac{1}{1+n}=1.$$

Contoh 5.3

Tentukan $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\operatorname{cosec}(x)}$.

Solusi. Misalkan $f(x)=(1-3x)^{\operatorname{cosec}(x)}$, ini berarti $\ln[f(x)]=\ln\left[(1-3x)^{\operatorname{cosec}(x)}\right]=\operatorname{cosec}(x)\ln(1-3x)$. Karena ln merupakan fungsi kontinu, maka $\lim\limits_{x\to 0}\ln[f(x)]=\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}f(x)\right]$ sehingga diperoleh

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}f(x)\right]=\lim_{n\to 0}\operatorname{cosec}(x)\ln(1-3x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{\sin(x)}.$$

Perhatikan bahwa untuk $x\to 0$ berlaku $\ln(1-3x)\to\ln(1)=0$ dan $\sin(x)\to 0$ sehingga memenuhi syarat L'Hopital. Dari L'Hopital berlaku

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}f(x)\right]\overset{\text{L}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-3x}\cdot(-3)}{\cos(x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{3}{(1-3x)\cos(x)}=-\frac{3}{(1-0)\cos(0)}=-3.$$

Dari sini diperoleh $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\boxed{e^{-3}}$. ▼

§6. Fungsi Invers Trigonometri dan Turunannya

Pada subbab 2 telah dijelaskan mengenai fungsi invers secara umum beserta turunannya. Dalam bagian ini akan dijelaskan fungsi invers, khususnya pada fungsi trigonometri. Perlu diingat bahwa fungsi invers memiliki invers apabila fungsi tersebut bijektif. Alternatifnya, jika fungsi f fungsi yang kontinu, untuk membuktikan f bijektif cukup dibuktikan bahwa f fungsi yang monoton. Agar menjamin adanya fungsi invers pada trigonometri, maka perlu pembatasan di domain dari fungsi trigonometri tersebut.

Definisi 6.1 (Invers Trigonometri)**.** Definisikan $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$, $\sec^{-1}$, $\operatorname{cosec}^{-1}$, dan $\cot^{-1}$ berturut-turut menyatakan fungsi invers dari sin, cos, tan, sec, cosec, dan cot. Di beberapa sumber fungsi invers trigonometri ditulis sebagai

$$\sin^{-1} = \arcsin, \quad \cos^{-1} = \arccos, \quad \tan^{-1} = \arctan, \quad \sec^{-1} = \operatorname{arcsec},$$

$$\operatorname{cosec}^{-1} = \operatorname{arccosec}, \quad \cot^{-1} = \operatorname{arccot}$$

Adapun domain dan kodomain dari masing-masing fungsi invers trigonometri tersebut adalah:

(a). $\sin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b). $\cos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

(c). $\tan : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(d). $\cot^{-1} : (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$.

(e). $\sec^{-1} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

(f). $\operatorname{cosec}^{-1} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Contoh 6.2

Tentukan nilai dari $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\cos\left(\cos^{-1}(0,6)\right)$, dan $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

Solusi. Ingat bahwa range $\sin^{-1}$ adalah $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Misalkan $y = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ini berarti $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ dan $\sin(y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nilai y yang memenuhi dengan $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ adalah $y = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.
Dari **Definisi 2.1** dapat diperoleh pula $\cos\left(\cos^{-1}(0,6)\right) = 0,6$.
Kemudian untuk menentukan $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ perlu berhari-hari. Ingat bahwa $\sin^{-1}$ memiliki range di interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sehingga salah bahwa menyatakan $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{2}$ karena $\frac{3\pi}{2}$ tidak berada di interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Untuk mengatasi ini perlu mengubah $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ menjadi $\sin(k)$ di mana $-\frac{\pi}{2} \le k \le \frac{\pi}{2}$. Hal ini dapat memanfaatkan sifat periodik dari fungsi sin, yaitu

memiliki periodik 2π. Dengan kata lain, $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ di mana $k \in \mathbb{Z}$. Dari sini dapat diperoleh

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Maka diperoleh

$$\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \boxed{-\frac{\pi}{2}}.$$

Alternatifnya, pembaca dapat menggunakan permisalan, yaitu $y = \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \implies \sin(y) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. Lalu, dapat dicari solusi y dengan syarat $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, menyesuaikan dengan range $\sin^{-1}$. ▼

Setelah berkenalan dengan fungsi invers trigonometri, akan lebih menarik jika membahas tentang turunannya.

Teorema 6.3: Turunan Fungsi Invers Trigonometri

(a). $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

(b). $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

(c). $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(d). $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1}(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

(e). $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1}(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$.

(f). $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1}(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x| > 1$.

Bukti. (a). Misalkan $y(x) = \sin^{-1}(x)$, maka $\sin(y(x)) = x$. Turunkan kedua ruas terhadap x, maka $\frac{d}{dx}\sin(y(x)) = \frac{d}{dx}x = 1$. Dengan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$1 = \frac{d}{dx}\sin(y(x)) = \cos(y(x)) \cdot y'(x) \implies y'(x) = \frac{1}{\cos(y(x))}.$$

Berdasarkan identitas $\sin^2(y(x)) + \cos^2(y(x)) = 1$ diperoleh $\cos^2(y(x)) = 1 - \sin^2(y(x))$. Karena $y(x) = \sin^{-1}(x)$ memiliki nilai di interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, maka dapat disimpulkan bahwa $0 \leq \cos(y(x)) \leq 1$. Oleh karena itu, dari sini diperoleh $\cos^2(y(x)) = 1 - \sin^2(y(x)) \implies \cos(y(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(y(x))} = \sqrt{1-x^2}$. Hal ini menunjukkan bahwa $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ seperti yang ingin dibuktikan.

Hal ini dapat diverivikasi langsung menggunakan **Teorema 2.4**. Misalkan $f(x) = \sin(x)$, maka $f'(x) = \cos(x)$. Dari sini diperoleh

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\cos\left(\sin^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\sin^{-1}(x)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b). Misalkan $y(x) = \cos^{-1}(x)$, maka $\cos(y(x)) = x$. Turunkan kedua ruas terhadap x dan dengan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$1 = \frac{d}{dx}\cos(y(x)) = -\sin(y(x)) \cdot y'(x) \implies y'(x) = -\frac{1}{\sin(y(x))}.$$

Karena $y(x) = \cos^{-1}(x)$ memiliki range di interval $[0, \pi]$, maka dapat disimpulkan bahwa $0 \leq \sin(y(x)) \leq 1$. Dari sini diperoleh

$$1 = \sin^2(y(x)) + \cos^2(y(x)) \implies \sin^2(y(x)) = 1 - \cos^2(x)) \implies \sin(y(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ini menunjukkan bahwa $y'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ seperti yang ingin dibuktikan.

Hal ini dapat diverivikasi langsung menggunakan **Teorema 2.4**. Misalkan $f(x) = \cos(x)$, maka $f'(x) = -\sin(x)$. Dari sini diperoleh

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{-\sin\left(\cos^{-1}(x)\right)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\left(\cos^{-1}(x)\right)}}$$

yang menunjukkan bahwa $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ seperti yang ingin dibuktikan.

(c). Misalkan $y(x) = \tan^{-1}(x)$, maka $\tan(y(x)) = x$. Turunkan kedua ruas terhadap x dan dengan menerapkan aturan rantai, diperoleh

$$1 = \frac{d}{dx}\tan(y(x)) = \sec^2(y(x)) \cdot y'(x) \implies y'(x) = \frac{1}{\sec^2(y(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(y(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

seperti yang ingin dibuktikan.

(d). Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

(e). Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Sebagai petunjuk tambahan, bagi kasus apabila $x > 1$ atau $x < -1$.

(f). Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Sebagai petunjuk tambahan, bagi kasus apabila $x > 1$ atau $x < -1$.

□

Contoh 6.4

(a). $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}(3x-1)$.

(b). $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(x-1)$.

(c). $\left.\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(x)\right|_{x=\frac{1}{4}}$.

(d). $\left.\dfrac{d}{dx}\cot^{-1}(x)\left(x^2+1\right)\right|_{x=0}$.

Bukti. (a). Dengan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(3x-1) = \frac{1}{\sqrt{1-(3x-1)^2}} \cdot 3 = \frac{3}{\sqrt{1-(9x^2-6x+1)}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{6x-9x^2}}}.$$

(b). Dengan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x-1) = \frac{1}{1+(x-1)^2} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{x^2-2x+2}}.$$

(c). Perhatikan bahwa $\frac{d}{dx}\cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, dari sini diperoleh

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(x)\bigg|_{x=\frac{1}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\bigg|_{x=\frac{1}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{16}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \boxed{-\frac{4}{\sqrt{15}}}.$$

(d). Misalkan $u = \cot^{-1}(x)$ dan $v = x^2+1$, maka $u' = -\frac{1}{1+x^2}$ dan $v' = 2x$. Dengan menerapkan sifat $(uv)' = u'v + uv'$ dapat diperoleh

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}(x)\left(x^2+1\right) = -\frac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right) + \cot^{-1}(x)\cdot 2x = -1 + 2x\cot^{-1}(x).$$

Dari sini diperoleh

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}(x)\left(x^2+1\right)\bigg|_{x=0} = \left(-1+2x\cot^{-1}(x)\right)\Big|_{x=0} = -1 + 2\cdot 0\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{-1}.$$

$\square$

§7. Fungsi Hiperbolik dan Inversnya

Definisi 7.1 (Fungsi Hiperbolik)**.** Untuk setiap bilangan real x, definisikan

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{dan} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Lebih lanjut, definisikan pula

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad \operatorname{cosech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}, \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \quad \coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)}.$$

Adapun domain dan kodomain dari masing-masing fungsi hiperbolik adalah sebagai berikut:

(a). $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b). $\cosh : \mathbb{R} \to [1, \infty)$.

(c). $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$.

(d). $\operatorname{sech} : \mathbb{R} \to (0, 1]$.

(e). $\operatorname{cosech} : (\infty, 0) \cup (0, \infty) \to (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(f). $\coth : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Menggunakan **Definisi 6.1** dapat diperoleh sifat-sifat berikut.

Teorema 7.2: Sifat-Sifat Fungsi Hiperbolik

Untuk x bilangan real, maka berlaku:

(a). $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.

(b). $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

(c). $\tanh(-x) = -\tanh(x)$.

(d). $\coth(-x) = -\coth(x)$.

(e). $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech}(x)$.

(f). $\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch}(x)$.

(g). $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

(h). $\operatorname{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x)$.

Bukti. Masing-masing bagian dapat dibuktikan menggunakan **Definisi 6.1**. Pada bagian berikut **Definisi 6.1** digunakan hanya untuk (a) dan (b), kemudian sisanya mengikuti hasil dari (a) dan (b).

(a). $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$.

(b). $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$.

(c). $\tanh(-x) = \dfrac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \dfrac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$.

(d). $\coth(-x) = \dfrac{1}{\tanh(-x)} = \dfrac{1}{-\tanh(x)} = -\coth(x)$.

(e). $\operatorname{sech}(-x) = \dfrac{1}{\cosh(-x)} = \dfrac{1}{\cosh(x)} = \operatorname{sech}(x)$.

(f). $\operatorname{csch}(-x) = \dfrac{1}{\sinh(-x)} = \dfrac{1}{-\sinh(x)} = -\operatorname{csch}(x)$.

(g). $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \left(\dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 \cdot e^{x} \cdot e^{-x}}{4} - \dfrac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^{x} \cdot e^{-x}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$.

(h). $1 - \tanh^2(x) = 1 - \dfrac{\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \dfrac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \dfrac{1}{\cosh^2(x)} = \operatorname{sech}^2(x)$.

$\square$

Teorema 7.3

Untuk x dan y bilangan real, maka berlaku:

(a). $\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

(b). $\sinh(x - y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$.

(c). $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

(d). $\cosh(x - y) = \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y)$.

(e). $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$.

(f). $\tanh(x-y) = \dfrac{\tanh(x)-\tanh(y)}{1-\tanh(x)\tanh(y)}$.

Bukti. Masing-masing bagian dapat dibuktikan dengan **Definisi 6.1**, akan dicontohkan untuk bagian (a) dan (b). Tinjau

$$\begin{aligned}
\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y) &= \frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\
&= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4}\\
&= \frac{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}{4}\\
&= \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2}\\
&= \sinh(x+y).
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan bagian (a) diperoleh

$$\begin{aligned}
\sinh(x-y) &= \sin\Big(x+(-y)\Big)\\
&= \sinh(x)\cosh(-y)+\cosh(x)\sinh(-y)\\
&= \sinh(x)\cosh(y)-\cosh(x)\sinh(y). && \text{(Teorema 6.2 (a), (b))}
\end{aligned}$$

Bagian (c) dan (e) dapat dibuktikan pula menggunakan **Definisi 6.1**, kemudian bagian (d) dan (f) dapat diturunkan berdasarkan dua sifat tersebut. Diserahkan kepada pemabca sebagai latihan. □

Menggunakan **Teorema 6.3** dapat diperoleh sifat-sifat lain sebagai berikut.

Teorema 7.4

Untuk x bilangan real, maka berlaku:

(a). $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$.

(b). $\cosh(2x) = \cosh^2(x)+\sinh^2(x) = 1+2\sinh^2(x) = 2\cosh^2(x)-1$.

(c). $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$.

Bukti. Menggunakan **Teorema 6.3 (a)**, diperoleh

$$\sinh(2x)=\sinh(x+x)=\sinh(x)\cosh(x)+\cosh(x)\sinh(x)=2\sinh(x)\cosh(x).$$

Menggunakan **Teorema 6.3 (c)**, diperoleh

$$\cosh(2x)=\cosh(x+x)=\cosh(x)\cosh(x)+\sinh(x)\sinh(x)=\cosh^2(x)+\sinh^2(x).$$

Karena $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, dari sini diperoleh $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$. Ini berarti

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \left(1 + \sinh^2(x)\right) + \sinh^2(x) = 1 + 2\sinh^2(x).$$

Selain itu juga berlaku $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \iff \sinh^2(x) = 1 - \cosh^2(x)$, ini berarti

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh^2(x) + \left(\cosh^2(x) - 1\right) = 2\cosh^2(x) - 1.$$

Terakhir, menggunakan **Teorema 6.3 (e)** diperoleh

$$\tanh(2x) = \tanh(x) + \tanh(x) = \frac{\tanh(x) + \tanh(x)}{1 + \tanh(x)\tanh(x)} = \frac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}.$$

$\square$

Teorema 7.5: Turunan Fungsi Hiperbolik

(a). $\dfrac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$.

(b). $\dfrac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$.

(c). $\dfrac{d}{dx}\tanh(x) = \text{sech}^2(x)$.

(d). $\dfrac{d}{dx}\text{cosech}(x) = \text{cosech}(x)\coth(x)$.

(e). $\dfrac{d}{dx}\text{sech}(x) = -\text{sech}(x)\tanh(x)$.

(f). $\dfrac{d}{dx}\coth(x) = \text{cosech}^2(x)$.

Bukti. Untuk sifat (a) dan (b) dapat dibuktikan menggunakan **Definisi 6.1**, sedangkan sisanya menggunakan sifat turunan.

(a). Perhatikan bahwa $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, ini berarti

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^x\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\left(-e^{-x}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

(b). Perhatikan bahwa $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, ini berarti

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^x + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\left(-e^{-x}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x).$$

(c). Perhatikan bahwa $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Misalkan $u = \sinh(x) \implies u' = \cosh(x)$ dan $v = \cosh(x) \implies v' = \sinh(x)$. Berdasarkan sifat turunan $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, dari sini diperoleh

$$\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{1}{\sinh^2(x)} = \text{sech}^2(x).$$

(d). Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

(e). Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

(f). Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

$\square$

Contoh 7.6

Tentukan turunan pertama dari $\tanh(\sin(x))$.

Solusi. Misalkan $f(x) = \tanh(\sin(x))$. Untuk menentukan $f'(x)$ perlu diterapkan aturan rantai. Misalkan $u = \sin(x)$ sehingga $\tanh(\sin(x)) = \tanh(u)$, maka

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \operatorname{sech}^2(u) \cdot \cos(x) = \boxed{\operatorname{sech}^2(\sin(x))\cos(x)}.$$

▼

Contoh 7.7

Tentukan turunan pertama dari $(\cosh(x))^{\sinh(x)}$.

Solusi. Misalkan $f(x) = (\cosh(x))^{\sinh(x)}$. Dari sini diperoleh $\ln[f(x)] = \ln\left[(\cosh(x))^{\sinh(x)}\right] = \sinh(x)\ln(\cosh(x))$. Turunkan kedua ruas terhadap x dan dengan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$\frac{d}{dx}\ln[f(x)] = \frac{d}{dx}\sinh(x)\ln(\cosh(x)) \implies \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{d}{dx}\sinh(x)\ln(\cosh(x)).$$

Misalkan $u = \sinh(x)$ dan $v = \ln(\cosh(x))$, diperoleh $u' = \cosh(x)$. Untuk menentukan v' perlu diterapkan aturan rantai, yaitu

$$v' = \frac{d}{dx}\ln(\cosh(x)) = \frac{1}{\cosh(x)} \cdot \sinh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Dengan menerapkan $(uv)' = u'v + uv'$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) &= \cosh(x)\ln(\cosh(x)) + \sinh(x) \cdot \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \\
\frac{1}{(\cosh(x))^{\sinh(x)}} \cdot f'(x) &= \cosh(x)\ln(\cosh(x)) + \frac{\sinh^2(x)}{\cosh(x)} \\
f'(x) &= \boxed{(\cosh(x))^{\sinh(x)+1}\ln(\cosh(x)) + \sinh^2(x)(\cosh(x))^{\sinh(x)-1}}.
\end{aligned}$$

▼

Selanjutnya akan dibahas mengenai invers dari fungsi hiperbolik. Untuk menentukan turunan dari fungsi hiperbolik sebenarnya dapat menggunakan **Teorema 2.4** yang telah dijelaskan sebelumnya. Sebelum mempelajari hal tersebut, alangkah baiknya berkenalan terlebih dahulu formulasi fungsi invers dari fungsi trigonometri hiperbolik.

Definisi 7.8 (Invers Fungsi Hiperbolik)**.** Definisikan $\sinh^{-1}$, $\cosh^{-1}$, $\tanh^{-1}$, sech^{-1}, $\operatorname{cosech}^{-1}$, dan $\coth^{-1}$ berturut-turut merupakan fungsi invers dari sinh, cosh, tanh, sech, cosech, dan coth. Adapun domain dan kodomain masing-masing fungsi invers hiperbolik adalah sebagai berikut:

(a). $\sinh^{-1} : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$.

(b). $\cosh^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$.

(c). $\tanh^{-1} : (-1, 1) \to (-\infty, \infty)$.

(d). $\operatorname{sech}^{-1} : (0, 1) \to [0, \infty)$.

(e). $\operatorname{cosech}^{-1} : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \to (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(f). $\coth^{-1} : (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \to (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Teorema 7.9: Fungsi Invers Fungsi Hiperbolik

(a). $\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

(b). $\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ dengan $x \geq 1$.

(c). $\tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ dengan $-1 < x < 1$.

(d). $\operatorname{sech}^{-1}(x) = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ dengan $0 < x \leq 1$.

Bukti. (a). Misalkan $y = \sinh^{-1}(x)$, ini berarti $\sinh(y) = x$. Berdasarkan **Definisi 6.1** diperoleh $x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} \iff 2x = e^y - \dfrac{1}{e^y}$. Kalikan kedua ruas dengan e^y diperoleh $2xe^y = e^{2y} - 1 \iff 0 = e^{2y} - 2x \cdot e^y - 1$. Misalkan $e^y = n$, maka $0 = n^2 - 2x \cdot n + 1$. Penyelesaian n dapat ditentukan dengan formula kuadratik ABC, yaitu

$$n_{1,2} = \frac{-(-2x) \pm \sqrt{(-2x)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2+1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Perhatikan bahwa $\sqrt{x^2+1} > x$, maka dari itu $x - \sqrt{x^2+1} < 0$. Karena $n = e^y > 0$, oleh karena itu haruslah $n = x + \sqrt{x^2+1}$. Dari sini diperoleh $e^y = x + \sqrt{x^2+1} \implies y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ seperti yang ingin dibuktikan.

(b). Misalkan $y = \cosh^{-1}(x)$, maka $\cosh(y) = x$. Dari **Definisi 6.1** diperoleh $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \iff 2x = e^y + \dfrac{1}{e^y}$. Kalikan kedua ruas dengan e^y diperoleh $2xe^y = e^{2y} + 1 \iff 0 = e^{2y} - 2xe^y + 1$. Misalkan $n = e^y$, diperoleh $0 = n^2 - 2x \cdot n + 1$. Dengan rumus kuadratik ABC diperoleh

$$n_{1,2} = \frac{-(-2x) \pm \sqrt{(-2x)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{x^2-1}}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1}$$

dengan $x \geq 1$. Ini berarti $e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$. Namun, untuk $n = x - \sqrt{x^2-1}$ ini menunjukkan

$$n = x - \sqrt{x^2-1} = \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} == \frac{x^2 - \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}.$$

Karena $x \geq 1$, ini berarti $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 + \sqrt{1^2 - 1} = 1$ sehingga $n = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \leq 1 \implies n \leq 1$ untuk setiap $x \geq 1$. Padahal, $n = e^y \geq 1$ sehingga tidak mungkin $n = x - \sqrt{x^2 - 1}$. Maka dari itu haruslah

$$n = x + \sqrt{x^2 - 1} \iff e^y = x + \sqrt{x^2 - 1} \iff y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1$$

seperti yang ingin dibuktikan.

(c). Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

(d). Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

□

Teorema 7.10: Turunan Fungsi Invers Hiperbolik

(a). $\dfrac{d}{dx}\sinh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

(b). $\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

(c). $\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

(d). $\dfrac{d}{dx}\text{cosech}^{-1}(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$.

(e). $\dfrac{d}{dx}\text{sech}^{-1}(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$.

(f). $\dfrac{d}{dx}\coth^{-1}(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

Bukti. Bukti masing-masing dapat menerapkan **Teorema 2.4** atau menggunakan **Teorema 6.11**.

(a). Misalkan $y(x) = \sinh^{-1}(x)$, maka $\sinh(y(x)) = x$. Turunkan kedua ruas terhadap x dan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$1 = \frac{d}{dx}\sinh(y(x)) = \cosh(y(x)) \cdot y'(x) \implies y'(x) = \frac{1}{\cosh(y(x))}.$$

Berdasarkan identitas $\cosh^2(k) = 1 + \sinh^2(k)$, ini berarti $\cosh^2(y(x)) = 1 + \sinh^2(y(x))$. Karena range $\cosh(y(x))$ berada di interval $[1, \infty)$ yang berarti $\cosh(y(x)) > 0$, ini berarti $\cosh(y(x)) = \sqrt{1 + \sinh^2(y(x))} = \sqrt{1 + x^2}$. Ini menunjukkan bahwa $y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ seperti yang ingin dibuktikan. Hal ini dapat diverivikasi langsung dari

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(b). Misalkan $y(x) = \cosh^{-1}(x)$, maka $\cosh(y(x)) = x$. Turunkan kedua ruas terhadap x dan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$1 = \frac{d}{dx}\cosh(y(x)) = \sinh(y(x)) \cdot y'(x) \implies y'(x) = \frac{1}{\sinh(y(x))}.$$

Tinjau bahwa $\sinh^2(y(x)) = \cosh^2(y(x)) - 1$. Karena $y(x) = \cosh^{-1}(x)$ memiliki nilai di intervla $[0, \infty)$, ini berarti $y(x) \geq 0$. Dari sini diperoleh $e^{y(x)} \geq 1$ dan $e^{-y(x)} \leq 1$ yang berarti

$$\sinh(y(x)) = \frac{e^{y(x)} - e^{-y(x)}}{2} \geq \frac{1 - 1}{2} = 0 \implies (y(x)) \geq 0.$$

Oleh karena itu, haruslah $\sinh(y(x)) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1} = \sqrt{x^2-1}$ yang menunjukkan bahwa $y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ seperti yang ingin dibuktikan. Hal ini dapat diverivikasi langsung dengan

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

(c). Misalkan $y(x) = \tanh^{-1}(x)$, maka $\tanh(y(x)) = x$. Turunkan kedua ruas terhadap x dan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$1 = \frac{d}{dx}\tanh(y(x)) = \operatorname{sech}^2(y(x))\cdot y'(x) \implies y'(x) = \frac{1}{\operatorname{sech}^2(y(x))} = \frac{1}{1-\tanh^2(y(x))} = \frac{1}{1-x^2}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Hal ini dapat diverivikasi langsung dengan

$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\cdot 1 - \frac{1}{1-x}\cdot(-1)\right)$$

yang ekuivalen dengan $\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

(d). Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Sebagai petunjuk tambahan, bagi kasus saat $x > 0$ dan $x < 0$.

(e). Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

(f). Diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

□

Contoh 7.11: UAS 2022

Tentukan y' jika $\cosh\left(x^2y\right) = e^{x+xy^2}$.

Solusi. Ambil turunan kedua ruas terhadap x, maka

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cosh\left(x^2y\right) &= e^{x+xy^2} \\
\frac{d\cosh\left(x^2y\right)}{d\left(x^2y\right)}\cdot\frac{d\left(x^2y\right)}{dx} &= \frac{d\left(e^{x+xy^2}\right)}{d\left(x+xy^2\right)}\cdot\frac{d\left(x+xy^2\right)}{dx} \\
\sinh\left(x^2y\right)\left(2x\cdot y + x^2\cdot\frac{dy}{dx}\right) &= e^{x+xy^2}\cdot\left(1+1\cdot y^2+1\cdot 2y\frac{dy}{dx}\right) \\
2xy\sinh\left(x^2y\right) + x^2\sinh\left(x^2y\right)\cdot\frac{dy}{dx} &= e^{x+xy^2} + y^2e^{x+xy^2} + 2ye^{x+xy^2}\cdot\frac{dy}{dx} \\
x^2\sinh\left(x^2y\right)\cdot\frac{dy}{dx} - 2ye^{x+xy^2}\cdot\frac{dy}{dx} &= e^{x+xy^2} + y^2e^{x+xy^2} - 2xy\sinh\left(x^2y\right) \\
\left(x^2\sinh\left(x^2y\right) - 2ye^{x+xy^2}\right)\frac{dy}{dx} &= e^{x+xy^2} + y^2e^{x+xy^2} - 2xy\sinh\left(x^2y\right) \\
\frac{dy}{dx} &= \boxed{\frac{e^{x+xy^2} + y^2e^{x+xy^2} - 2xy\sinh\left(x^2y\right)}{x^2\sinh\left(x^2y\right) - 2ye^{x+xy^2}}}.
\end{aligned}$$

Catatan. Hasil akhir dari soal ini bisa berbagai bentuk, tergantung manipulasi yang dilakukan. Hasil akhir yang berbeda dengan di atas belum tentu jawaban yang pembaca temukan salah.
▼

§8. Latihan Soal

1. Tentukan turunan pertama dari masing-masing fungsi berikut dengan memanfaatkan fungsi eksponensial dan logaritma natural.

   (a). $f(x) = e^{x^2 \ln(x)}$.

   (b). $g(x) = 6e^{\frac{1}{x}} + \ln\left(5x^3\right)$.

   (c). $h(x) = \ln\left[\dfrac{\sqrt{(2x^2-1)^3}(x^3-5)^2}{\sqrt[3]{3x-5}}\right]$.

   (d). $i(x) = (x^2+1)^{\cos x}$

   (e). $j(x) = x^2 e^{-x^3}$.

   (f). $k(x) = \dfrac{5}{3}\ln\left[\dfrac{(10x-3)^3}{(2x-7)^5(7x-3)^{\frac{3}{5}})}\right]$.

2. (a). $\displaystyle\int e^{-4x} dx$.

   (b). $\displaystyle\int x^2 e^{-x^3} dx$.

   (c). $\displaystyle\int \frac{6e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$.

   (d). $\displaystyle\int 5^{x^4} x^3\, dx$.

   (e). $\displaystyle\int \frac{a^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\, dx$ di mana $a > 0$ dan $a \neq 1$.

   (f). $\displaystyle\int \left(5^{2x} - \frac{1}{7^x}\right) dx$.

3. (a). $\displaystyle\int \left(\frac{5}{3x-8}\right) dx$.

   (b). $\displaystyle\int_{-1}^{3} \left(\frac{x}{10-x^2}\right) dx$.

   (c). $\displaystyle\int \left(\frac{7}{4x+5}\right) dx$.

   (d). $\displaystyle\int \left(\frac{2x-4}{x^2-4x+8}\right) dx$.

4. Diberikan fungsi $f : [1,\infty) \to (0,1]$ di mana $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

   (a). Buktikan bahwa f memiliki fungsi invers, kemudian tentukan formula untuk $f^{-1} : (0,1] \to [1,\infty)$.

   (b). Tentukan $\left(f^{-1}\right)'(x)$ dengan menerapkan **Teorema 2.4**.

5. Diberikan $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^5 - 3x^2 + x + 5$. Buktikan bahwa f memiliki invers, kemudian tentukan $\left(f^{-1}\right)'(4)$.

6. (a). $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}(x)\cos(x)$.

   (b). $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(5+x)$.

   (c). $\left.\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}(\cos(x))\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

   (d). $\left.\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}(x)\cos^{-1}(x)\right|_{x=\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

7. (a). $\dfrac{d}{dx}x^2 \cdot 2023^x$.

   (b). $\dfrac{d^2}{dx^2}x^{5^x}$.

   (c). $\dfrac{d}{dx}\,{}^{x^2}\log(x+1)$.

   (d). $\dfrac{d}{dx}(1+x)^x$.

   (e). $\dfrac{d}{dx}\,{}^{2}\log\left(8t^{\ln(2)}\right)$.

   (f). $\dfrac{d}{dx}e^{\cos(x)+\ln(x)}$.

8. Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ apabila:

   (a). $x^y = y^x$.

   (b). $xy = e^{e^{x+y}}$.

   (c). $\tan(y) = e^x + \ln(x)$.

   (d). $\sinh(xy) = e^{y^2+x}$.

9. (a). $\int (5^x + 1)^2 \, dx$.

   (b). $\int \left(1 + x \cdot 3^{x^2-2}\right) \, dx$.

   (c). $\int\limits_1^4 \dfrac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$.

   (d). $\int\limits_0^1 x \cdot 2^{x^2} \, dx$.

   (e). $\int 10^{5x-1} \, dx$.

   (f). $\int\limits_0^1 \left(10^{3x} + 10^{-3x}\right) \, dx$.

10. (SadharCail 2020) Jika ada, tentukan nilai a yang memenuhi $f^{-1}(x) = f(x)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \neq \dfrac{a}{2020}$ di mana $f(x) = \dfrac{14x - 11}{2020x - a}$.

11. (SadharCail 2021) Tentukan persamaan garis yang menghubungkan titik maksimum lokal dengan titik minimum lokal dari fungsi $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

12. Tentukan turunan pertama dari setiap fungsi berikut.

    (a). $f(x) = (\sinh(x))^{\cosh(x)}$.

    (b). $g(x) = x^2 \sinh^{-1}(x^5)$.

    (c). $h(x) = \coth(4x)\sinh(x)$.

    (d). $p(x) = \ln\left(\sqrt{3\sinh\left(\dfrac{x}{5}\right)}\right)$.

13. Buktikan turunan invers trigonometri berikut ini.

    (a). $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

    (b). $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}(x)) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

    (c). $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1}(x)) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

    (d). $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1}(x)) = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

    (e). $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}(x)) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.

    (f). $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1}(x)) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$.

14. Tentukan nilai dari masing-masing limit berikut.

    (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$.

    (b) (UAS 2022) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{x^2}$.

    (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\ln(x)}$.

    (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\sin(x))$.

    (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+2}\right)^x$.

    (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6^x}{2^x + x^4}$.

15. (SadharCaiL 2022) Tentukan syarat a dan b agar $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{b^{x^2-1} - a^{x^2-1}}{x+1}$ bernilai positif.

16. (SadharCail 2020) Tentukan $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 6e^{-2x} + 15e^{-x} - 10}{\cos(4x) - 3\sin(2x) + 8x^2 + 6x - 1}$.

17. (Wildan Bagus W.) Definisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, dan $\lfloor -\pi \rfloor = -4$. Definisikan $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, kemudian tentukan nilai dari $\displaystyle\int_0^{2023} 2^{\{x\}}\, dx$.