Responsi Kalkulus I D 2023/2024

Departemen Matematika Universitas Brawijaya

Dosen Pengampu:

Corina Karim, S.Si.,M.Si.,Ph.D

Asisten:

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Pertemuan 5:

Integral Tentu dan Tak Tentu

Kamis, 26 Oktober 2023

Ringkasan

Modul ini akan membahas **secara ringkas** tentang : Integral Tentu, Integral Tak Tentu, Konsep Limit Deret, Teorema Dasar Kalkulus I, dan Sifat Integral. Perlu diingat bahwa modul ini **jangan dijadikan patokan untuk belajar** karena hanya sebagai ringkasan. Lebih baik Anda membaca terlebih dahulu versi lengkapnya pada referensi tertentu, seperti buku oleh cak Purcell atau cak Thomas. Sebagai latihan tambahan, contoh soal dapat dicoba terlebih dahulu hingga benar-benar menyerah (atau sudah selesai). Jika tidak berhasil menyelesaikannya, maka ikuti alurnya dan **jangan sekedar dibaca**, namun sambil menulis seakan dikerjakan sendiri.

§1. Review Dulu

§1.1. Antiturunan dan Integral Tak Tentu

Definisi 1.1 (Antiturunan)**.** Suatu fungsi F dikatakan *antiturunan* dari f pada suatu interval I apabila $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in I$.

Perhatikan beberapa contoh berikut.

1. Perhatikan bahwa turunan dari x^2 adalah $2x$, dengan kata lain, $\frac{d}{dx}\, x^2 = 2x$. Dari sini diperoleh $F(x) = x^2$ adalah antiturunan dari $f(x) = 2x$ karena $F'(x) = 2x = f(x)$.
2. Perhatikan bahwa turunan dari $x^3 + 1$ adalah $3x^2$, dengan kata lain, $\frac{d}{dx}\left(x^3 + 1\right) = 3x^2$. Dari sini diperoleh $F(x) = x^3 + 1$ adalah antiturunan dari $f(x) = 3x^2$ karena $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.
3. Perhatikan bahwa turunan dari $\sin(x)+C$ adalah $\cos(x)$ di mana C suatu konstan, dengan kata lain, $\frac{d}{dx}(\sin(x) + C) = \cos(x)$. Dari sini diperoleh $F(x) = \sin(x) + C$ antiturunan dari $f(x) = \cos(x)$ karena memenuhi $F'(x) = \cos(x) = f(x)$.

Pada contoh di atas pada nomor 3, dapat diamati bahwa untuk sebarang C konstan maka $F(x) = \sin(x) + C$ adalah antiturunan dari $\sin(x)$. Himpunan semua antiturunan dari $f(x)$ tersebut disebut sebagai *koleksi antiturunan dari* $f(x)$.

Definisi 1.2 (Integral Tak Tentu)**.** Koleksi semua antiturunan dari f disebut sebagai *integral tak tentu* dari f terhadap x, dinotasikan sebagai

$$\int f(x)\, dx.$$

Simbol $\int$ adalah notasi integral, fungsi f disebut *integran* dari integral, dan x disebut *variabel integral.*

1. Koleksi semua antiturunan dari $f(x) = 2x$ adalah

$$\int f(x)\ dx = \int 2x\ dx = x^2 + C_1$$

di mana C_1 suatu konstan. Dengan kata lain, integral tak tentu dari $f(x) = 2x$ adalah $F(x) = x^2 + C_1$ dengan C_1 konstan.

2. Koleksi semua antiturunan dari $f(x) = 3x^2$ adalah

$$\int f(x)\ dx = \int 3x^2\ dx = x^3 + C_2$$

di mana C_2 suatu konstan. Dengan kata lain, integral tak tentu dari $f(x) = 3x^2$ adalah $F(x) = x^3 + C_2$ dengan C_2 konstan.

3. Koleksi semua antiturunan dari $f(x) = \sin(x)$ adalah

$$\int f(x)\ dx = \int \sin(x)\ dx = \cos(x) + C_3$$

di mana C_3 suatu konstan. Dengan kata lain, integral tak tentu dari $f(x) = \sin(x)$ adalah $F(x) = \cos(x) + C_3$ dengan C_3 konstan.

Teorema 1.3: Integral Tak Tentu Beberapa Fungsi

(a). $\displaystyle\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ dengan syarat $n \neq -1$ dan C konstan.

(b). $\displaystyle\int \sin(x)\ dx = -\cos(x) + C$ dengan C konstan.

(c). $\displaystyle\int \cos(x)\ dx = \sin(x) + C$ dengan C konstan.

Misalkan $F(x)$ adalah antiturunan dari $f(x)$, sedangkan $G(x)$ adalah antiturunan dari $g(x)$. Ini berarti $F'(x) = f(x)$ dan $G'(x) = g(x)$. Dengan menggunakan sifat-sifat pada turunan dan k suatu konstan, diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}kF(x) &= kF'(x) = kf(x),\\
\frac{d}{dx}\Big(F(x) + G(x)\Big) &= F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x),\\
\frac{d}{dx}\Big(F(x) - G(x)\Big) &= F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x).
\end{aligned}$$

Baris pertama menunjukkan bahwa $kF(x)$ antiturunan dari $kf(x)$, $F(x) + G(x)$ merupakan antiturunan dari $f(x)+g(x)$, sedangkan $F(x)-G(x)$ merupakan antiturunan dari $f(x)-g(x)$. Dari **Definisi 1.2**, dapat dituliskan bahwa $F(x) = \int f(x)\ dx$ dan $G(x) = \int g(x)\ dx$. Oleh karena itu, ketiga hal di atas dapat dinyatakan sebagai berikut.

Teorema 1.4: Linieritas Integral Tak Tentu

Diberikan $f(x)$ dan $g(x)$ fungsi yang memiliki antiturunan dan k suatu konstan. Maka berlaku sifat-sifat berikut:

(a). $\displaystyle\int kf(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$.

(b). $\displaystyle\int \Big(f(x)+g(x)\Big)\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$.

(c). $\displaystyle\int \Big(f(x)-g(x)\Big)\ dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx$.

Contoh 1.5

Tentukan integral tak tentu $\displaystyle\int \left(x^2+\sqrt{x}+\sin(x)\right)\ dx$.

Solusi. Berdasarkan **Teorema 1.4** berlaku

$$\begin{aligned}
\int \left(2x^2+x^{\frac{1}{2}}-\sin(x)\right)\ dx &= \int 2x^2\ dx + \int x^{\frac{1}{2}}\ dx + \int \sin(x)\ dx && \text{(sifat (b), (c))}\\
&= 2\int x^2\ dx + \int x^{\frac{1}{2}}\ dx + \int \sin(x)\ dx && \text{(sifat (a))}\\
&= \frac{1}{2+1}x^{2+1} + C_1 + \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C_2 + (-\cos(x)) + C_3\\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \cos(x) + C_1 + C_2 + C_3
\end{aligned}$$

di mana C_1, C_2, C_3 suatu konstan. Untuk penyederhanaan penulisan dapat dimisalkan $C = C_1 + C_2 + C_3$ yang mana juga suatu konstan, jadi

$$\int \left(x^2+\sqrt{x}+\sin(x)\right)\ dx = \boxed{\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\cos(x)+C,\ C \text{ konstan}}.$$

▼

§1.2. Integral Tentu

Perbedaan pada integral tertentu yaitu terletak pada batasnya, seperti $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ di mana fungsi f memiliki antiturunan di interval $[a,b]$. Suatu fungsi $f(x)$ memiliki antiturunan di interval $[a,b]$ jika f kontinu di interval tersebut.

Teorema 1.6: Fundamental Kalkulus

Jika fungsi $f(x)$ kontinu di interval $[a,b]$ dan F adalah antiturunan dari $f(x)$, maka

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Contoh 1.7

Tentukan $\displaystyle\int_0^3 x^2\,dx$ dan $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,dx$.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = 9 - 0 = \boxed{9}.$$

Di sisi lain,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - [-\cos(0)] = -\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) = \boxed{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

▼

Sifat-sifat pada integral tentu analog dengan sifat pada integral tak tentu.

Teorema 1.8: Linieritas Integral Tentu

Diberikan $f(x)$ dan $g(x)$ fungsi yang terintegralkan di interval $[a,b]$ dan k suatu konstan. Maka berlaku sifat-sifat berikut:

(a). $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$

(b). $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

(c). $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)-g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$

Teorema 1.9: Penjumlahan Dua Integral

Jika $f(x)$ terintegralkan di suatu interval yang mengandung titik-titik a,b,c, maka

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

tidak peduli bagaimana urutan dari a,b,c.

Sebagai contoh,

$$\int_0^3 x^2\,dx = \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx, \quad \int_0^3 x^2\,dx = \int_0^4 x^2\,dx + \int_4^3 x^2\,dx.$$

Contoh 1.10

Diberikan fungsi $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jika} \quad x \in [0, 2] \\ 6 - x, & \text{jika} \quad x \in (2, 4] \end{cases}.$$

Tentukan nilai dari $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx$.

Solusi. Dapat dicek bahwa f kontinu di $[0, 4]$, maka f terintegralkan di $[0, 4]$. Akan ditentukan integral dari $f(x)$ di interval $[1, 3]$. Dalam hal ini perlu dipertimbangkan di subinterval $[1, 2]$ dan $(2, 4]$ karena $f(x)$ memiliki ekspresi yang berbeda di masing-masing subinterval tersebut. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\int_1^3 f(x)\, dx &= \int_1^2 f(x)\, dx + \int_2^3 f(x)\, dx \\
&= \int_1^2 x^2\, dx + \int_2^3 (6 - x)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 + \left[6x - \frac{1}{2}x^2\right]_2^3 \\
&= \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3\right) + \left[\left(6 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2\right) - \left(6 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2\right)\right] \\
&= \frac{7}{3} + \left(\frac{27}{2} - 10\right) \\
&= \frac{7}{3} + \frac{7}{2} \\
&= \boxed{\frac{35}{6}}.
\end{aligned}$$

▼

Contoh 1.11: Kuis 2022

Hitung integral $\displaystyle\int_0^4 f(x)\, dx$ untuk fungsi f yang diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika} \quad 0 \le x < 1 \\ x, & \text{jika} \quad 1 \le x < 2 \\ 4 - x, & \text{jika} \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}.$$

Solusi. Dapat dicek bahwa f kontinu di $[0,4]$ sehingga f terintegralkan di $[0,4]$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned}
\int_0^4 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 x\,dx + \int_2^4 (4-x)\,dx \\
&= [x]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 + \left[4x - \frac{1}{2}x^2\right]_2^4 \\
&= (1-0) + \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 1^2\right) + \left[\left(4\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot 2^2\right) - \left(4\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 4^2\right)\right] \\
&= 1 + \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left[(8-2) - \left(\frac{1}{2}\cdot 16 - \frac{1}{2}\cdot 8\right)\right] \\
&= 1 + \frac{3}{2} + 2 \\
&= \boxed{\frac{9}{2}}.
\end{aligned}$$

▼

Teorema 1.12: Fundamental Kalkulus

Jika f kontinu di interval $[a,b]$ dan x suatu (variabel) titik di interval (a,b). Maka

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Contoh 1.13

Tentukan $\frac{d}{dx}\int_1^x t^3\,dt$.

Solusi. Dalam hal ini $f(t) = t^3$, menurut **Teorema 1.12** diperoleh $\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)\,dt = f(x) = \boxed{x^3}$.

▼

Contoh 1.14

Tentukan fungsi $f(x)$ yang memenuhi $\int_0^x f(t)\,dt = x + \sin(x)$.

Solusi. Turunkan kedua ruas terhadap x, menurut **Teorema 1.12** berlaku

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}(x + \sin(x)) \implies \boxed{f(x) = 1 + \cos(x)}.$$

▼

Pada **Contoh 1.13** cukup sederhana dan langsung menerapkan **Teorema 1.12**. Bisa jadi bentuk integral $\int_0^x$ pada **Contoh 1.13** di lain tempat bisa dirubah menjadi $\int_0^{2x}$, $\int_1^{x^3}$, dan lain-lain. Integral yang demikian akan menggunakan aturan rantai.

Contoh 1.15

Tentukan fungsi $f(x)$ yang memenuhi $\int_1^{x^3} f(t)\ dt = x + \sin(x)$.

Solusi. Misalkan $g(x) = \int_1^x f(t)\ dt$, menurut **Teorema 1.12** berlaku $\frac{dg}{dx} = f(x)$. Dari aturan rantai berlaku

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} f(t)\ dt = \frac{d}{dx}g\left(x^3\right) = \frac{d\ g\left(x^3\right)}{dx^3}\cdot\frac{dx^3}{dx} = f\left(x^3\right)\cdot 3x^2 = 3x^2 f\left(x^3\right).$$

Di sisi lain, $\frac{d}{dx}(x+\sin(x)) = 1+\cos(x)$. Diperoleh

$$\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} f(t)\ dt = x+\sin(x) \implies 3x^2 f\left(x^3\right) = 1+\cos(x) \implies f\left(x^3\right) = \frac{1+\cos(x)}{x^2}.$$

Ganti x dengan $x^{\frac{1}{3}}$, diperoleh $\boxed{f(x) = \frac{1+\cos\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}}}$. ▼

Contoh 1.16: UAS 2020

Tentukan $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ jika diketahui $\int_0^{2x} f(t)\ dt = \sin(x) + \int_0^{2x}\frac{f(t)}{1+t}\ dt$.

Solusi. Turunkan kedua ruas terhadap x,

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2x} f(t)\ dt = \cos(x) + \frac{d}{dx}\int_0^{2x}\frac{f(t)}{1+t}\ dt.$$

Misalkan $g(t) = \frac{f(t)}{1+t}$, maka $\frac{d}{dx}\int_0^{2x} f(t)\ dt = \cos(x) + \frac{d}{dx}\int_0^{2x} g(t)\ dt$. Misalkan $p(x) = \int_0^x f(t)\ dt$ dan $q(x) = \int_0^x g(t)\ dt$, diperoleh $\frac{d}{dx}p(2x) = \cos(x) + \frac{d}{dx}q(2x)$. Dari aturan rantai diperoleh

$$\frac{d}{dx}p(2x) = \frac{d\ p(2x)}{2x}\cdot\frac{d(2x)}{dx} = f(2x)\cdot 2 = 2f(2x).$$

Dengan cara yang sama, $\frac{d}{dx}q(2x) = 2g(2x) = \frac{2f(2x)}{1+2x}$. Dari sini diperoleh

$$2f(2x) = \cos(x) + \frac{2f(2x)}{1+2x} \iff \cos(x) = 2f(2x) - \frac{2f(2x)}{1+2x} = 2f(2x)\left(1-\frac{1}{1+2x}\right)$$

sehingga diperoleh

$$\cos(x) = 2f(2x) \cdot \frac{2x}{1+2x} = f(2x) \cdot \frac{4x}{1+2x} \iff f(2x) = \frac{(1+2x)\cos(x)}{4x}.$$

Substitusikan $x = \frac{\pi}{4}$, diperoleh

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(1 + 2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2 \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{(2+\pi)\sqrt{2}}{2\pi}}.$$

▼

Teorema 1.17: Penukaran Batas

Jika fungsi $f(x)$ terintegralkan di interval $[a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Contoh 1.18

Tentukan $\frac{d}{dx}\int_x^1 t^3\,dt$.

Solusi. Untuk menerapkan **Teorema 1.12**, perhatikan bahwa variabel x berperan sebagai batas atas. Namun, pada **Contoh 1.18** variabel x berperan sebagai batas bawah sehingga diperlukan penukaran batas sebagaimana pada **Teorema 1.17**. Perhatikan bahwa

$$\int_x^1 t^3\,dt = -\int_1^x t^3\,dt.$$

Dari **Contoh 1.13** diperoleh

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 t^3\,dt = -\frac{d}{dx}\int_1^x t^3\,dt = \boxed{-x^3}.$$

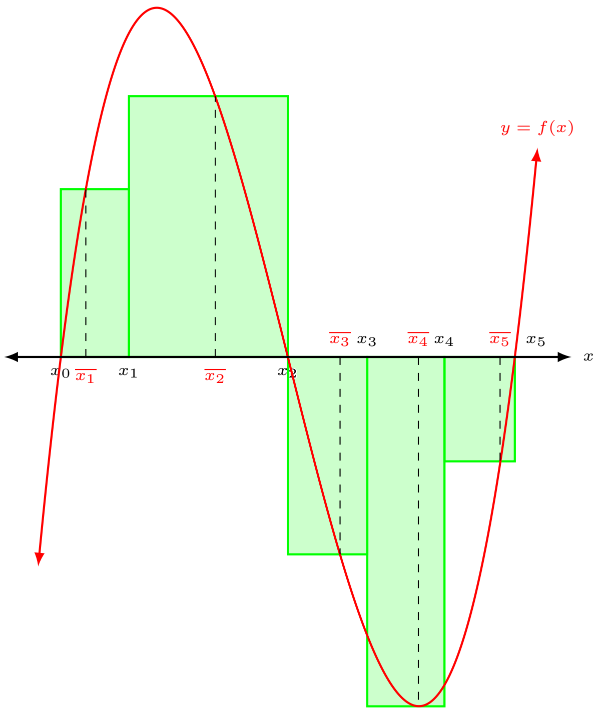
▼

§1.3. Riemann Sums (Jumlahan Riemann)

Misalkan fungsi $f(x)$ yang terdefinisi di interval $[a, b]$. Partisi interval $[a, b]$ menjadi n subinterval (tidak harus sama panjang) oleh titik-titik $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, di mana $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Sekarang, terdapat n subinterval, yaitu $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$. Di setiap interval $[x_{i-1}, x_i]$, ambil sebarang titik $\overline{x_i}$; yang disebut sebagai **titik sampel** dari subinterval ke-i. Maka jumlahan

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i = f\left(\overline{x_1}\right)\Delta x_1 + f\left(\overline{x_2}\right)\Delta x_2 + \cdots + f\left(\overline{x_n}\right)\Delta x_n$$

disebut sebagai **Riemann Sum (Jumlahan Riemann)** dari f yang berkorespondensi dengan partisi P. Berikut merupakan ilustrasi partisi pada suatu jumlahan Riemann dengan empat partisi interval.



Contoh 1.19

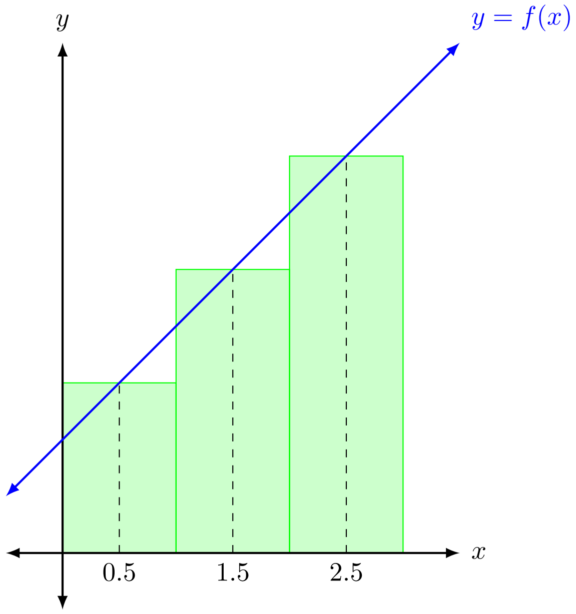
Tentukan jumlahan Riemann dari $f(x) = x + 1$ di interval $[0, 3]$ dengan titik-titik partisi intervalnya adalah $0 < 1 < 2 < 3$, serta titik sampel $\overline{x_i}$ merupakan titik tengah dari subinterval ke-i.

Solusi. Dari soal, diberikan $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan $x_3 = 3$. Dari sini,

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 1, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1, \quad \Delta x_3 = x_3 - x_2 = 3 - 2 = 1.$$

Interval $[0, 3]$ yang dipartisi oleh $0, 1, 2, 3$ menjadi tiga subinterval $[0, 1], [1, 2]$, dan $[2, 3]$. Pada soal titik sampel yang diminta merupakan titik tengah dari subinterval, yaitu

$$\overline{x_1} = \frac{0+1}{2} = 0,5, \quad \overline{x_2} = \frac{1+2}{2} = 1,5 \quad \overline{x_3} = \frac{2+3}{2} = 2,5.$$



Diperoleh jumlahan Riemann dari $f(x)$ atas partisi tersebut adalah

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} f\left(\overline{x}_i\right)\Delta x_i &= f\left(\overline{x_1}\right)\Delta x_1 + f\left(\overline{x_2}\right)\Delta x_2 + f\left(\overline{x_3}\right)\Delta x_3 \\ &= f(0,5)\cdot 1 + f(1,5)\cdot 1 + f(2,5)\cdot 1 \\ &= 1,5 + 2,5 + 3,5 \\ &= \boxed{7,5}.\end{aligned}$$

▼

Contoh 1.20

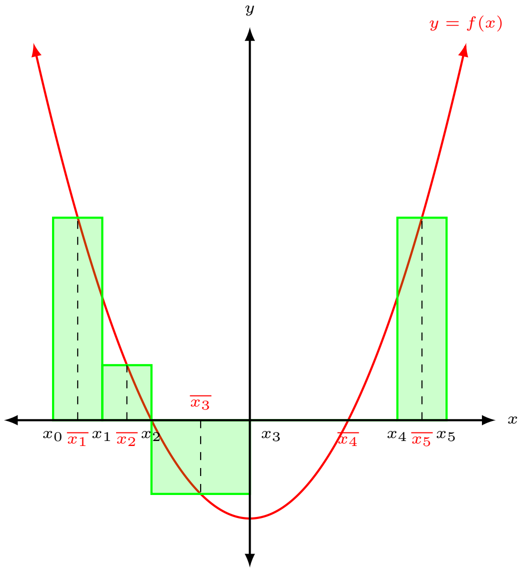
Tentukan jumlahan Riemann dari $f(x) = x^2 - 1$ di interval $[-2, 2]$ dengan titik partisi intervalnya adalah $-2 < -\frac{3}{2} < -1 < 0 < \frac{3}{2} < 2$ dan titik sampel yang berkorespondensi pada masing-masing intervalnya adalah $\overline{x_1} = -\frac{7}{4}$, $\overline{x_2} = -\frac{5}{4}$, $\overline{x_3} = -\frac{1}{2}$, $\overline{x_4} = 1$, dan $\overline{x_5} = \frac{7}{4}$.

Solusi. Interval $[-2, 2]$ dibagi menjadi lima subinterval, yaitu $\left[-2, -\frac{7}{4}\right]$, $\left[-\frac{7}{4}, -1\right]$, $[-1, 0]$, $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, dan $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Diperoleh bahwa

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = \frac{1}{2}, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{2}, \quad \Delta x_3 = x_3 - x_2 = 1,$$
$$\Delta x_4 = x_4 - x_3 = \frac{3}{2}, \quad \Delta x_5 = x_5 - x_4 = \frac{1}{2}.$$

Selain itu, diperoleh

$$f\left(\overline{x_1}\right) = f\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{33}{16}, \quad f\left(\overline{x_2}\right) = f\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{16}, \quad f\left(\overline{x_3}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4},$$
$$f\left(\overline{x_4}\right) = f(1) = 0, \quad f\left(\overline{x_5}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{33}{16}.$$



Diperoleh bahwa

$$R_P = \sum_{i=1}^{5} f\left(\overline{x_i}\right) \Delta x_i = \frac{33}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 1 + 0 \cdot \frac{3}{2} + \frac{33}{16} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{185}{16}}.$$

▼

§1.4. Integral Tentu Lanjutan (Pengayaan)

Definisi 1.21. Misalkan diberikan suatu partisi P pada interval $[a,b]$. Notasikan $\|P\|$, *norm* dari P, yaitu menyatakan interval terpanjang pada subinterval pada partisi P. Pada **Contoh 1.6** diperoleh $\|P\| = 1$, sedangkan pada **Contoh 1.7** diperoleh $\|P\| = \frac{3}{2}$.

Definisi 1.22 (Integral Tentu)**.** Misalkan fungsi $f(x)$ yang terdefinisi di interval $[a,b]$. Jika

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right) \Delta x_i$$

ada, maka fungsi $f(x)$ *terintegralkan* di $[a,b]$. Selanjutnya, integral tentu pada $f(x)$ dari a hingga b diberikan sebagai

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right) \Delta x_i.$$

Adapun hubungan integral tentu dengan jumlahan Riemann juga dapat dituliskan sebagai

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right) \Delta x_i.$$

Teorema 1.23: Keintegralan

Misalkan $f(x)$ terbatas di interval $[a,b]$, yaitu terdapat $M > 0$ yang memenuhi $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Jika $f(x)$ kontinu di $[a,b]$ kecuali di titik-titik tertentu yang banyaknya berhingga, maka $f(x)$ terintegralkan di $[a,b]$.

Dari **Teorema 1.10** dapat diperoleh bahwa fungsi berikut pasti dapat terintegralkan di sebarang interval $[a,b]$:

1. Fungsi polinomial, yaitu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
2. Fungsi sinus dan cosinus, yaitu $g(x) = \sin(x)$ dan $h(x) = \cos(x)$.
3. Fungsi rasional, yaitu $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ di mana $P(x), Q(x)$ merupakan fungsi polinomial dan $Q(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

Di beberapa contoh selanjutnya akan diberikan contoh soal yang dikerjakan menggunakan **Definisi 1.9**. Dengan memahami penggunaan **Definisi 1.9** dapat menjadi penyelamat saat menghadapi bab aplikasi pengintegralan. Sebelumnya, pembaca memerlukan beberapa identitas penjumlahan yang akan sering digunakan, yaitu

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Mengubah Integral Tak Tentu Menjadi Jumlahan Riemann

Untuk mengubah $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ menjadi jumlahan Riemann dapat mengikuti prosedur berikut.

1. Buat sebanyak n subinterval di mana panjang masing-masing intervalnya $\dfrac{b-a}{n}$. Sekarang, diperoleh subinterval

$$\left[a, a + \frac{b-a}{n}\right], \quad \left[a + \frac{b-a}{n}, a + 2\cdot\frac{b-a}{n}\right], \quad \cdots, \quad \left[a + (n-1)\cdot\frac{b-a}{n}, b\right]$$

   serta misalkan $x_0 = a$ dan $x_n = b$.

2. Sebagaimana sebelumnya, Δx_i menyatakan panjang dari interval ke-i, yaitu $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$.

3. Dari nomor 2 diperoleh $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
x_0 &= a \\
x_1 &= x_0 + \frac{b-a}{n} = a + \frac{b-a}{n} \\
x_2 &= x_1 + \frac{b-a}{n} = a + 2 \cdot \frac{b-a}{n} \\
x_3 &= x_2 + \frac{b-a}{n} = a + 3 \cdot \frac{b-a}{n} \\
&\vdots \\
x_k &= x_{k-1} + \frac{b-a}{n} = a + k \cdot \frac{b-a}{n} \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + \frac{b-a}{n} = b.
\end{aligned}$$

4. Pada masing-masing subinterval, buat persegi panjang dengan lebar Δx_i dan panjang $f(x_i)$. Diperoleh bahwa luas persegi panjang tersebut adalah $f(x_i)\Delta x_i$. Kemudian, jumlahkan semua persegi panjang yang terbentuk.

5. Diperoleh

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Contoh 1.24

Tuliskan $\displaystyle\int_1^4 (1+x)\, dx$ sebagai jumlahan riemann dan tentukan nilainya.

Solusi. Tulis $f(x) = x + 1$. Partisi interval $[1, 4]$ menjadi n subinterval yang sama panjang. Perhatikan bahwa panjang masing-masing subintervalnya adalah $\Delta x_i = \dfrac{4-1}{n} = \dfrac{3}{n}$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ dengan $x_0 = 1$ dan $x_n = 4$. Perhatikan bahwa $x_k = 1 + \dfrac{3k}{n}$ untuk $k = 0, 1, \cdots, n$. Maka

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (1+x_i)\frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{n} + \frac{9i}{n^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{9i}{n^2}.$$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{9i}{n} = 9\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = 9 \cdot \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = 9 \cdot \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{9n+9}{2n}.$$

Di sisi lain,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{6}{n} = \frac{\overbrace{6+6+\cdots+6}^{\text{sebanyak } n}}{n} = \frac{6n}{n} = 6.$$

Diperoleh

$$\int_1^4 (1+x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{9n+9}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(6+\frac{9+\frac{9}{n}}{2}\right) = 6+\frac{9}{2} = \boxed{\frac{21}{2}}.$$

Hal ini dapat diverivikasi langsung dengan

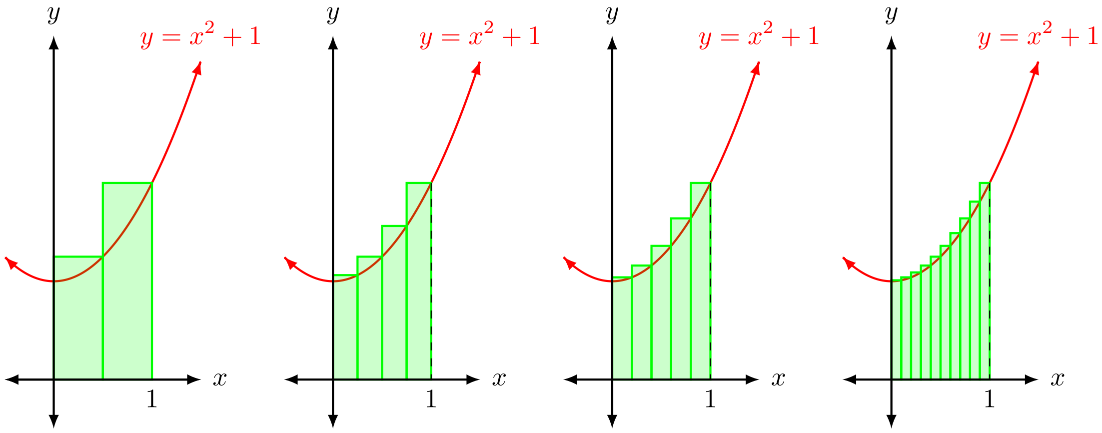
$$\int_1^4 (1+x)\,dx = \left[x+\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 = \left(4+\frac{1}{2}\cdot 4^2\right) - \left(1+\frac{1}{2}\cdot 1^2\right) = 12-\frac{3}{2} = \frac{21}{2}.$$

▼

Contoh 1.25

Tentukan luas daerah yang berada di bawah grafik $y = x^2+1$ dan di atas sumbu-x pada interval $[0,1]$ menggunakan metode partisi.

Solusi. Perhatikan beberapa partisi interval $[0,1]$ berikut yang mungkin dan bentuk persegi panjang sebagaimana pada gambar berikut.



Partisi interval $[0,1]$ menjadi n subinterval yang sama panjang, di mana masing-masing panjangnya adalah $\frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$. Pilih titik-titik yang mempartisi intervalnya sebagai

$$x_0 = 0 = \frac{0}{n},\quad x_1 = \frac{1}{n},\quad x_2 = \frac{2}{n},\quad x_3 = \frac{3}{n},\quad \cdots,\quad x_k = \frac{k}{n},\quad \cdots,\quad x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

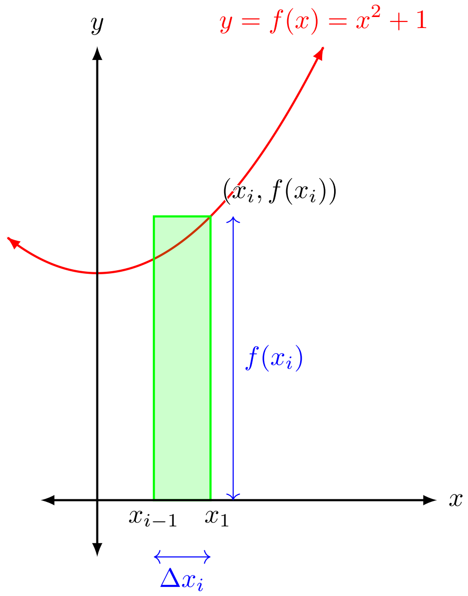
Kemudian, panjang masing-masing subintervalnya adalah

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = \frac{1}{n},\quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{n},\quad \cdots,\quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n},\quad \cdots,\quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n}$$

Sekarang, subintervalnya

$$\left[0,\frac{1}{n}\right],\quad \left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\quad \left[\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right],\quad \cdots,\quad \left[\frac{n-1}{n},1\right].$$

Perhatikan persegi panjang ke-i pada ilustrasi berikut.



Persegi panjang tersebut memiliki lebar $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ dan panjang $f(x_i) = x_{i+1}^2 + 1$. Oleh karena itu, luas persegi panjang ke-i adalah

$$f(x_i)\Delta x_i = \left(x_i^2 + 1\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{i^2}{n^2} + 1\right) = \frac{i^2}{n^3} + \frac{1}{n}.$$

Maka luas total dari semua persegi panjang adalah

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{n^3} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.$$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}.$$

Kemudian,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = \frac{\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{\text{sebanyak } n}}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Jadi, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} + 1$. Dari gambar sebelumnya yang memperlihatkan empat macam partisi pada interval $[0, 1]$, semakin banyak partisi yang dibuat ($n \to \infty$) akan mendapatkan nilai luas yang sebaik/sedekat mungkin. Oleh karena itu, luas daerah yang berada di bawah grafik $y = x^2 + 1$ dan di atas sumbu-x di interval $[0, 1]$ adalah

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} + 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6} + 1\right) = \frac{2}{6} + 1 = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

Hal ini dapat diverivikasi menggunakan integral tentu, yaitu

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x_i = \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)\ dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 + 0\right) = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

▼

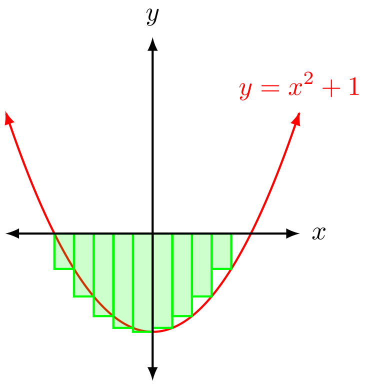
Contoh 1.26

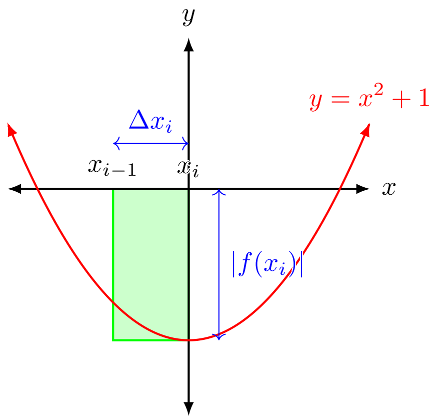
Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - 1$ dan sumbu-x dengan metode partisi.

Solusi. Perhatikan bahwa titik potong $y = x^2 - 1$ dengan sumbu-x adalah $(1, 0)$ dan $(-1, 0)$. Partisi interval $[-1, 1]$ menjadi n subinterval, di mana panjang masing-masing subinterval adalah $\Delta x_i = \dfrac{1-(-1)}{n} = \dfrac{2}{n}$. Tulis

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1 + \frac{2}{n}, \quad x_2 = -1 + \frac{4}{n}, \quad \cdots, \quad x_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad \cdots, \quad x_n = 1.$$

Perhatikan persegi panjang ke-i pada gambar di kanan bawah. Perhatikan bahwa lebar persegi panjang adalah $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i = \dfrac{2}{n}$. Perhatikan bahwa $f(x_i) = 1 - \left(\dfrac{2i}{n}\right)^2 = 1 - \dfrac{4i^2}{n^2}$. Dari gambar terlihat bahwa $f(x_i) < 0$, diperoleh bahwa panjang persegi panjang tersebut adalah $|f(x_i)| = -f(x_i) = \dfrac{4i^2}{n^2} - 1$.





Diperoleh total luas persegi panjang adalah

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i^2}{n^2} - 1\right) \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{8i^2}{n^3} - \frac{2}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3} - \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} = 8 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} - 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}.$$

Perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}.$$

Di sisi lain,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} = \frac{\overbrace{2 + 2 + \cdots + 2}^{\text{sebanyak } n}}{n} = \frac{2n}{n} = 2.$$

Jadi,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} + 2\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 + \frac{3}{n} + 1}{6} + 2\right) = \frac{2}{6} + 2 = \boxed{\frac{7}{3}}.$$

▼

Mengubah Jumlahan Riemann ke Integral Tentu

Untuk mengubah $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ ke integral tentu $\int_a^b f(x)\ dx$ dapat mengikuti prosedur berikut:

1. Tentukan $f(x)$ yang bersesuaian.
2. Tentukan $a = x_0$ dan $b = x_n$ serta $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$.

Contoh 1.27

Tentukan $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{i^2}{n^2}+1\right)\dfrac{1}{n}$.

Solusi. Dari soal, perhatikan bahwa $f(x) = x^2+1$ dengan $x_i = \dfrac{i}{n}$. Diperoleh $a = x_0 = 0$ dan $b = x_n = 1$ serta $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n}$. Dari sini diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2}{n^2}+1\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 \left(x^2+1\right)\ dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}+1\right)-(0+0) = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

▼

Contoh 1.28

Tentukan $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{4i^2}{n^3}-\dfrac{1}{n}\right)$.

Solusi. Perhatikan bahwa $\sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{4i^2}{n^3}-\dfrac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(4\left[\dfrac{i}{n}\right]^2-1\right)\dfrac{1}{n}$. Tulis $f(x) = 4x^2-1$ di mana $x_i = \dfrac{i}{n}$. Diperoleh $x_0 = \dfrac{0}{n} = 0$ dan $b = x_n = \dfrac{n}{n} = 1$ serta diperoleh $\Delta x_i = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$. Dari sini

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(4\cdot\left[\frac{i}{n}\right]^2-1\right)\frac{1}{n} = \int_0^1 \left(4x^2-1\right)\ dx = \left[\frac{4}{3}x^3-x\right]_0^1 = \left(\frac{4}{3}\cdot 1^3-1\right)-\left(\frac{4}{3}\cdot 0^3-0\right) = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Solusi alternatifnya, perhatikan bahwa $\sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{4i^2}{n^3}-1\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\left[\dfrac{2i}{n}\right]^2-1\right)\dfrac{1}{n}$. Tulis $f(x) = x^2-1$ dengan $x_i = \dfrac{2i}{n}$ sehingga diperoleh $a = x_0 = 0$ dan $b = x_n = 2$ serta $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2}{n}$. Tinjau

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{2i}{n}\right]^2-1\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\left[\frac{2i}{n}\right]^2-1\right)\frac{2}{n} = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(x^2-1\right)\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^2 = \frac{1}{3}.$$

▼

§2. Latihan Soal

1. Diketahui $\int_0^2 (ax-b)dx = 4$ dan $\int_1^3 (x^2+2b)dx = 10$. Tentukan nilai dari $3a+6b$.

2. Tentukan hasil dari integral tentu dan tak tentu berikut.

   (a). $\int_{-1}^{2} (x - 2|x|)\, dx$.

   (b). $\int_{-3}^{3} \left(\cos(-x) - \sin x\right) dx$.

   (c). $\int \left(4\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx$.

   (d). $\int \sin(-2x)\cos(-3x)\, dx$.

3. Tentukan $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ di mana

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{jika} \quad -1 \le x < 0 \\ 1, & \text{jika} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}.$$

4. Diketahui $f'(x) = x^2 + 4x + 2$ dan $f(3) = 35$. Tentukan fungsi $f(x)$ tersebut.

5. Dengan menggunakan konsep teorema fundamental, tentukan nilai dari:

   (a). $\frac{d}{dx}\left[\int_{2023}^{x} \left(y^2 - y\right)\, dy\right]$.

   (b). $\frac{d}{dx}\left[\int_{2}^{x} \sin^2(t)\, dt\right]$.

   (c). $\frac{d}{dt}\left[\int_{t}^{5} \sin(u)\cos(u)\, du\right]$

   (d). $\frac{d}{dx}\left[\int_{5x}^{x^2} \sin(t)\, dt\right]$

6. Tentukan fungsi $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\int_1^{3x} t f(t)\, dt = x^2 + 2\int_{3x}^{2} f(t)\, dt$$

   untuk setiap bilangan real $x \ge 1$.

7. (Kuis 2022) Misalkan f adalah fungsi yang diberikan oleh $f(x) = 4x^3 + 1$. Hitunglah jumlah Riemann fungsi f pada interval $[-2, 2]$ dengan menggunakan partisi sembilan titik dan interval bagian sama panjang, serta titik tengah sebagai titik sampelnya.

8. Tentukan jumlah Riemann fungsi $f(x) = x + 3$ pada interval $[0, 1]$ yang dipartisi oleh titik-titik $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, dan $x_4 = 1$ di mana titik-titik sampelnya adalah $\overline{x_1} = \frac{1}{10}$, $\overline{x_2} = \frac{1}{2}$, $\overline{x_3} = \frac{3}{5}$, dan $\overline{x_4} = \frac{4}{5}$.

9. Nyatakan masing-masing integral tentu berikut sebagai jumlahan Riemann.

(a). $\displaystyle\int_1^3 x^2\,dx.$

(b). $\displaystyle\int_{-1}^1 (x-2)\,dx.$

(c). $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2}.$

(d). $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x^2+1}\,dx.$

10. Nyatakan masing-masing integral tentu berikut sebagai jumlahan Riemann, kemudian tentukan hitung nilai jumlahannya. Bandingkan hasilnya apabila langsung dihitung dari integral tentunya.

(a). $\displaystyle\int_0^1 (x+2)\,dx.$

(b). $\displaystyle\int_{-2}^3 \left(x^2-1\right)\,dx.$

(c). $\displaystyle\int_2^4 2x^3\,dx.$

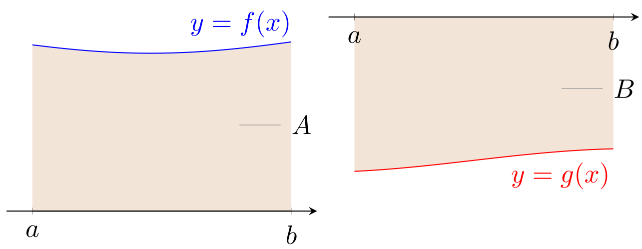
(d). $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x+x^2\right)\,dx.$

11. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh garis $y=x$, sumbu-x, dan garis $x=3$ dengan metode partisi.

12. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh sumbu-x dan grafik $y=1-x^2$ dengan metode partisi.

13. Diberikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ yang terintegralkan di interval $[a,b]$. Perhatikan dua gambar berikut dengan A dan B menyatakan luas masing-masing daerah yang diarsir. Daerah pada gambar kiri terletak di atas sumbu-x, sedangkan daerah pada gambar kanan terletak di atas sumbu-x. Dengan metode partisi, buktikan bahwa

$$A=\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{dan} \quad B=-\int_a^b g(x)\,dx.$$

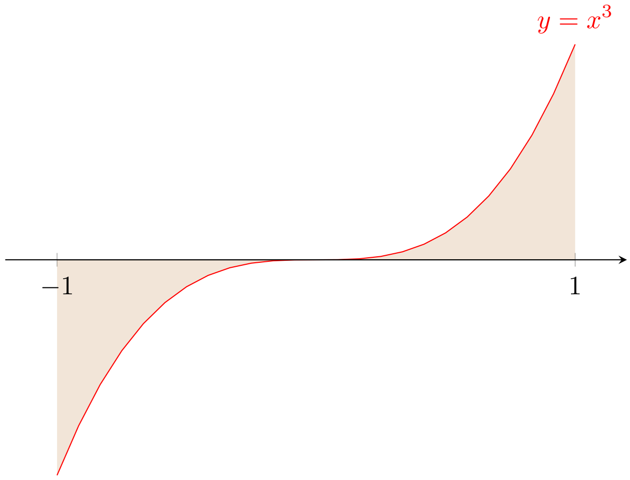


14. Memanfaatkan soal nomor 13, tentukan:

(a). Luas daerah yang dibatasi oleh $y=x^2-4$ dan sumbu-x.

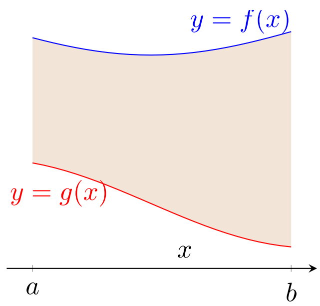
(b). Luas daerah yang dibatasi oleh $y=x^3$ dan garis $x=2$.

(c). Luas daerah yang diarsir sebagaimana gambar berikut.



15. Diberikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ yang terintegralkan di interval $[a, b]$. Gambar berikut menunjukkan grafik fungsi $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ di interval $[a, b]$. Gunakan metode partisi untuk menunjukkan bahwa luas daerah yang diarsir adalah

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$



16. Manfaatkan nomor 15 untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh:

    (a). $y = x$ dan $y = x^2$.

    (b). $y = x^3$ dan $y = x^2$.

    (c). $y = 1 + x^2$ dan $y = 1 - x^2$.

17. Ubahlah deret berikut menjadi integral tentu, kemudian tentukan nilainya.

    (a). $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} + 1\right) \frac{1}{n}$.

    (b). $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{9i^2}{n^2} + 2\right) \frac{3}{n}$.

    (c). $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{4i^2}{n^2} - 1\right) \frac{1}{n}$.

    (d). (ONMIPA 2007) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

    (e). $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n^3}}$.

    (f). $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 + 8i^2}}{n^2}$.