Responsi Kalkulus I D 2023/2024

Departemen Matematika Universitas Brawijaya

Dosen Pengampu:

Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D

Asisten:

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Aplikasi Turunan

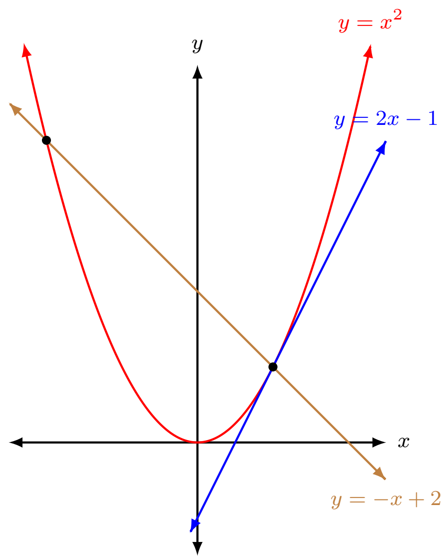
Ringkasan

Modul ini akan membahas **secara ringkas** tentang aplikasi turunan: garis singgung, garis normal, aproksimasi,kemonotonan dan kecekungan fungsi, dan teorema rata-rata. Perlu diingat bahwa modul ini **jangan dijadikan patokan untuk belajar** karena hanya sebagai ringkasan. Lebih baik Anda membaca terlebih dahulu versi lengkapnya pada referensi tertentu, seperti buku oleh cak Purcell atau cak Thomas. Sebagai latihan tambahan, contoh soal dapat dicoba terlebih dahulu hingga benar-benar menyerah (atau sudah selesai). Jika tidak berhasil menyelesaikannya, maka ikuti alurnya dan **jangan sekedar dibaca**, namun sambil menulis seakan dikerjakan sendiri.

§1. Review Dulu

§1.1. Menentukan Garis Singgung Dari Grafik

Misalkan suatu grafik $y = f(x)$ digambarkan di bidang koordinat kartesius. Suatu garis $y = ax+b$ yang memotong grafik $y = f(x)$ tepat di satu titik disebut **garis singgung** dari $y = f(x)$. Sebagaimana gambar berikut, garis $y = 2x-1$ merupakan garins singgung $y = x^2$ karena hanya memotong tepat di satu titik, yaitu di titik $(1, 1)$. Sedangkan, garis $y = -x + 2$ bukan garis singgung dari $y = x^2$ karena memotong di $y = x^2$ di dua titik, yaitu $(1, 1)$ dan $(-2, 4)$. Garis $y = 2x - 1$ merupakan garis singgung dari $y = x^2$ di titik $(1, 1)$.



Menentukan Persamaan Garis Singgung

Misalkan $y = f(x)$ terdiferensial di interval $[a, b]$ dan $c \in (a, b)$. Adapun langkah-langkah menentukan persamaan garis singgung di titik $(c, f(c))$ adalah sebagai berikut.

1. Tentukan gradien garis singgung. Grafien garis singgung di $(c, f(c))$ dapat ditentukan dengan $m = f'(c)$.

2. Karena telah diketahui gradien garis dan sebuah titik yang dilalui, yaitu titik

$(x_0, y_0) = (c, f(c))$, maka persamaan garis singgung tersebut adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0) \implies y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

Contoh 1.1

Tentukan persamaan garis singgung $y = x^2$ di titik $(1, 1)$.

Solusi. Akan ditentukan gradien dari garis singgung $y = x^2$ di titik $(1, 1)$, yaitu $m = f'(1)$ di mana $f(x) = x^2$. Perhatikan bahwa $f'(x) = 2x$, maka $f'(1) = 2(1) = 2$. Diperoleh gradien garis singgung tersebut adalah $m = 2$. Karena garis tersebut melalui $(x_0, y_0) = (1, 1)$, maka persamaan garis singgung tersebut adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0) \implies y - 1 = 2(x - 1) = 2x - 2 \implies \boxed{y = 2x - 1}.$$

Hal ini bersesuaian dengan penjelasan sebelumnya. ▼

Contoh 1.2

Tentukan persamaan garis singgung $y = \frac{2}{x}$ di titik $(2, 1)$.

Solusi. Akan ditentukan gradien garis singgung $f(x) = \frac{2}{x}$ di titik $(2, 1)$, ini berarti $m = f'(2)$. Perhatikan bahwa $f(x) = 2x^{-1} \implies f'(x) = (-1)2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$. Ini berarti $m = f'(2) = -\frac{2}{2^2} = -\frac{1}{2}$. Karena garis tersebut melalui $(x_0, y_0) = (2, 1)$, maka persamaan garis tersebut adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0) \implies y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) = -\frac{1}{2}x + 1 \implies y = -\frac{x}{2} + 2.$$

Jadi, persamaan garis singgung $y = \frac{2}{x}$ di titik $(2, 1)$ adalah $\boxed{y = -\frac{x}{2} + 2}$. ▼

Contoh 1.3: UTS 2020

Tentukan garis singgung kurva kurva $x^2y^2 + 4xy = 12y$ di titik $(2, 1)$.

Solusi. Untuk menentukan gradien garis singgung perlu ditentukan $\frac{dy}{dx}$ saat $(x, y) = (2, 1)$. Hal ini dapat ditentukan menggunakan fungsi implisit dan aturan rantai. Turunkan kedua ruas dari $x^2y^2 + 4xy = 12y$ terhadap x, maka

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^2y^2 + 4xy\right) &= \frac{d}{dx}12y \\
\frac{d}{dx}\,x^2y^2 + \frac{d}{dx}\,4xy &= 12\frac{dy}{dx} \\
2xy^2 + x^2 \cdot \frac{d}{dx}y^2 + 4 \cdot 1 \cdot y + 4x\frac{d}{dx}\,y &= 12\,\frac{dy}{dx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2xy^2 + x^2 \cdot 2y\,\frac{dy}{dx} + 4y + 4x\,\frac{dy}{dx} &= 12\,\frac{dy}{dx}\\
2xy^2 + 2x^2y\,\frac{dy}{dx} + 4y + 4x\,\frac{dy}{dx} &= 12\,\frac{dy}{dx}\\
2x^2y\,\frac{dy}{dx} + 4x\,\frac{dy}{dx} - 12\,\frac{dy}{dx} &= -2xy^2 - 4y\\
\left(2x^2y + 4x - 12\right)\frac{dy}{dx} &= -2xy^2 - 4y\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-2xy^2 - 4y}{2x^2y + 4x - 12}.
\end{aligned}$$

Maka gradien garis singgung di titik $(x, y) = (2, 1)$ adalah

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(2,1)} = \frac{-2 \cdot 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1}{2 \cdot 2^2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 12} = \frac{-4 - 4}{8 + 8 - 12} = \frac{-8}{4} = -2.$$

Karena garis singgung melalui titik $(x_0, y_0) = (2, 1)$, maka persamaan garis singgung tersebut adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0) \implies y - 1 = -2(x - 2) = -2x + 4 \implies \boxed{y = -2x + 5}.$$

▼

§1.2. Aproksimasi

Aproksimasi merupakan pendekatan untuk menentukan suatu nilai. Sebagai contoh, nilai dari $\sqrt{4,6}$ tidak dapat menentukan secara pasti tanpa menggunakan kalkulator. Namun, nilai dari $\sqrt{4,6}$ dapat ditentukan nilai pendekatannya atau aproksimasi menggunakan metode berikut.

Aproksimasi Linear

Misalkan suatu fungsi $f(x)$ yang terdiferensial. Maka nilai dari $f(x+\Delta x)$ dapat didekati dengan

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Contoh 1.4

Hitunglah pendekatan nilai dari $\sqrt{4,6}$ dan $\sqrt{8,2}$ tanpa menggunakan kalkulator.

Solusi. Bentuk fungsi di atas adalah $f(x) = \sqrt{x}$ yang memiliki turunan $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Pertama, $4,6 = 4 + 0.6 = x + \Delta x$. Dengan memilih $x = 4$ dan $\Delta x = 0,6$, diperoleh

$$\sqrt{4,6} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}.0,6 = 2 + \frac{0,6}{4} = 2 + 0,15 = \boxed{2,15}.$$

Kedua, $8,2 = 9 - 0.8 = x + \Delta x$. Dengan memilih $x = 9$ dan $\Delta x = 0,8$, maka

$$\sqrt{8,2} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}.(-0,8) = 3 - \frac{0,8}{6} = 3 - 0,13 = \boxed{2,87}.$$

▼

§1.3. Nilai Maksimum dan Minimum Fungsi

Definisi 1.5. Misalkan himpunan S adalah domain dari f dan $c \in S$.

(a). $f(c)$ adalah **nilai minimum** dari f di S apabila $f(x) \geq f(c)$ untuk setiap $x \in S$.

(b). $f(c)$ adalah **nilai maksimum** f di S apabila $f(c) \geq f(x)$ untuk setiap $x \in S$.

(c). $f(c)$ merupakan **nilai eksrim** dari $f(x)$ di S apabila $f(c)$ merupakan nilai maksimum atau minimum.

Teorema 1.6: Eksistensi Nilai Maksimum dan Nilai Minimum

Jika f kontinu di interval $[a, b]$, maka f memiliki nilai minimum dan maksimum.

Definisi 1.7 (Titik Stasioner dan Singular)**.** Misalkan f adalah fungsi yang terdefinisi di interval $[a, b]$.

(a). Suatu titik c disebut **titik stasioner** apabila $f'(c) = 0$.

(b). Suatu titik c disebut **titik singular** apabila $f'(c)$ tidak ada.

Definisi 1.8 (Titik Kritis)**.** Misalkan f terdefinisi di interval $[a, b]$. **Titik kritis** dari f ada tiga jenis: titik ujung interval, titik stasioner, dan titik singular.

Teorema 1.9: Teorema Titik Kritis

Misalkan fungsi f terdefinisi di interval I. Jika $f(c)$ merupakan nilai ekstrim, maka c harus merupakan titik ekstrim, yaitu berlaku salah satu kondisi berikut:

(a). titik ujung interval I,

(b). titik stasioner dari f, yaitu titik c yang memenuhi $f'(c) = 0$, atau

(c). titik singular dari f, yaitu titik c yang memenuhi $f'(c)$ tidak ada.

Contoh 1.10

Tentukan nilai minimum dan maksimum dari $f(x) = x^2 + 4x - 5$ di interval $[-1, 2]$.

Solusi. Akan diperhatikan kondisi tiga jenis titik kritis dari f.

(a). Ujung interval dari $[-1, 2]$ adalah -1 dan 2. Diperoleh $f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) - 5 = -8$ dan $f(2) = 2^2 + 4(2) - 5 = 7$.

(b). Akan ditentukan titik stasionernya. Perhatikan bahwa $f'(x) = 2x+4$. Untuk menentukan titik stasionernya perlu diambil $f'(x) = 0$, maka $2x + 4 = 0 \iff x = -2$. Diperoleh $f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 5 = -9$.

(c). Akan ditentukan titik singularnya. Karena $f(x)$ merupakan fungsi polinomial, maka f terdiferensial di sebarang titik. Dengan kata lain, $f'(x)$ selalu ada. Jadi, f tidak memiliki titik singular.

Dari kondisi di atas, dapat disimpulkan bahwa nilai minimumnya adalah $\boxed{-9}$ dan nilai maksimumnya adalah $\boxed{7}$. ▼

§1.4. Kemonotonan dan Kecekungan Fungsi

Definisi 1.11 (Fungsi Naik dan Naik Tegas)**.** Diberikan suatu fungsi $f(x)$ yang terdefinisi di interval I. Fungsi f disebut **fungsi naik** apabila untuk setiap $a, b \in I$ dan $a < b$, maka $f(a) \leq f(b)$. Fungsi f disebut **fungsi naik tegas** apabila untuk setiap $a, b \in I$ dan $a < b$, maka $f(a) < f(b)$.

Definisi 1.12 (Fungsi Turun dan Turun Tegas)**.** Diberikan suatu fungsi $f(x)$ yang terdefinisi di interval I. Fungsi f disebut **fungsi turun** apabila untuk setiap $a, b \in I$ dan $a < b$, maka $f(a) \geq f(b)$. Fungsi f disebut **fungsi turun tegas** apabila untuk setiap $a, b \in I$ dan $a < b$, maka $f(a) > f(b)$.

Definisi 1.13 (Fungsi Monoton)**.** Diberikan suatu fungsi $f(x)$ yang terdefinisi di interval I. Fungsi f disebut **fungsi monoton** apabila pada interval I hanya berlaku salah satunya: fungsi naik atau fungsi turun.

Untuk menentukan kapan fungsi bersifat naik atau turun dapat ditentukan menggunakan teorema berikut.

Teorema 1.14: Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Diberikan suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu di interval tertutup $[a, b]$ dan terdiferensial pada interval terbuka (a, b).

(a). Fungsi f naik tegas di interval (a, b) apabila $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$.

(b). Fungsi f turun tegas di interval (a, b) apabila $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$.

Apabila $f'(x) \geq 0$, maka f disebut fungsi naik. Begitu juga apabila $f'(x) \leq 0$ maka f disebut fungsi turun.

Contoh 1.15

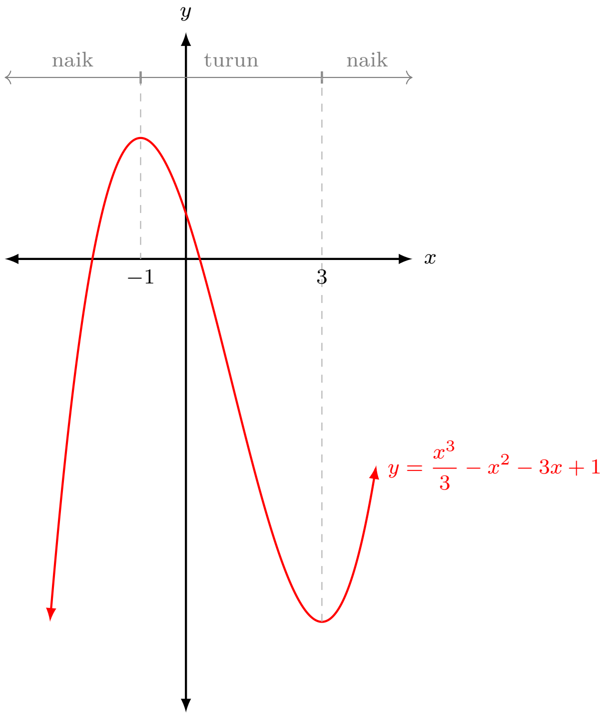
Tentukan interval di mana $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ merupakan fungsi turun tegas dan merupakan fungsi naik tegas.

Solusi. Perhatikan bahwa $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$.

(a). Fungsi f merupakan naik tegas di interval tertentu apabila terpenuhinya $f'(x) > 0$, yaitu $(x-3)(x+1) > 0$. Dari sini diperoleh $x < -1$ atau $x > 3$. Jadi, fungsi f naik tegas di interval $\boxed{(\infty, -1) \cup (3, \infty)}$.

(b). Fungsi f merupakan turun tegas di interval tertentu apabila terpenuhinya $f'(x) < 0$, yaitu $(x-3)(x+1) < 0$. Dari sini diperoleh $-1 < x < 3$. Jadi, fungsi f turun tegas di interval $\boxed{(-1, 3)}$.

▼



Teorema 1.16: Cekung ke Atas-Bawah dan Titik Belok

Diberikan fungsi $f(x)$ yang kontinu di $[a, b]$ dan terdiferensial dua kali di interval (a, b).

(a). Grafik dari $y = f(x)$ cekung ke atas di interval (a, b) apabila $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$.

(b). Grafik dari $y = f(x)$ cekung ke bawah di interval (a, b) apabila $f''(x) < 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$.

(c). Titik $(c, f(c))$ di mana $c \in (a, b)$ yang memenuhi $f''(c) = 0$ disebut sebagai **titik belok**.

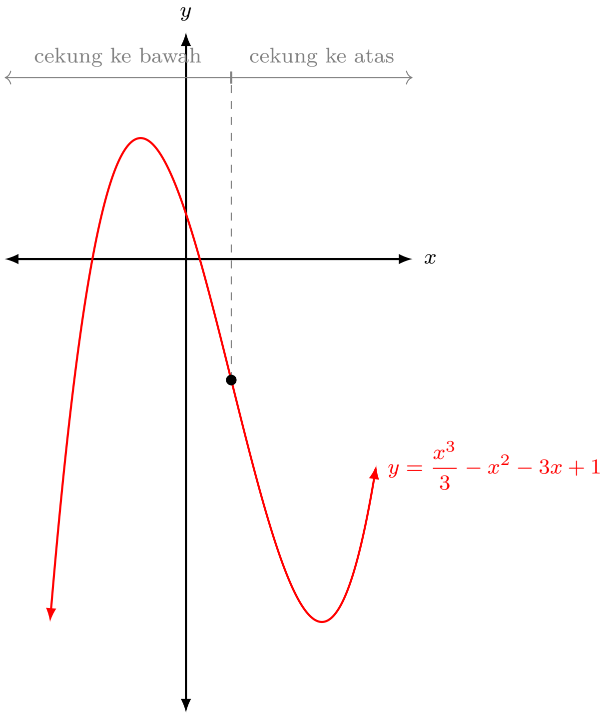
Contoh 1.17

Tentukan interval di mana grafik $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$ cekung ke atas dan cekung ke bawah. Tentukan pula titik beloknya.

Solusi. Tulis $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$, maka $f'(x) = x^2 - 2x - 3 \implies f''(x) = 2x - 2$. Grafik $y = f(x)$ cekung ke atas apabila $f''(x) > 0$, yaitu $2x - 2 > 0 \iff x > 1$. Jadi, $y = f(x)$ cekung ke atas di interval $\boxed{(1, \infty)}$. Sedangkan, $y = f(x)$ cekung ke bawah apabila $f''(x) < 0$ yang berarti $x < 1$. Jadi, $y = f(x)$ cekung ke bawah di interval $\boxed{(-\infty, 1)}$. Kemudian, titik belok dari $f(x)$ harus memenuhi $f''(x) = 0$ sehingga $2x - 2 = 0 \iff x = 1$. Jadi, titik beloknya adalah

$$(1, f(1)) = \left(1, \frac{1^3}{3} - 1^2 - 3(1) + 1\right) = \boxed{\left(1, -\frac{8}{3}\right)}.$$

▼



§1.5. Sketsa Grafik Canggih

Sketsa canggih memerlukan beberapa dasar yang telah dipelajari sebelumnya, yaitu dapat menentukan asimtot grafik, menentukan interval naik-turun, menentukan interval cekung ke atas-bawah, bahkan melibatkan pergeseran.

Contoh 1.18: UTS 2022

Buatlah sketsa grafik fungsi $y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$ secara canggih dengan menggunakan konsep limit, turunan, dan sebagainya.

Solusi. Perhatikan bahwa persamaan grafik ekuivalen dengan

$$y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \frac{2\left(x^2 - 16\right) + 24}{x^2 - 16} = 2 + \frac{24}{x^2 - 16}.$$

Kita tinjau grafik $f(x) = \frac{24}{x^2 - 16}$.

(a). **Menentukan asimtot.** Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 4}\frac{24}{x^2-16}=\pm\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to -4}\frac{24}{x^2-16}=\pm\infty$$

sehingga $x=-4$ dan $x=4$ adalah dua asimtot tegak dari $f(x)$. Selanjutnya,

$$\lim_{x\to \infty}\frac{24}{x^2-16}=0 \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{24}{x^2-16}=0$$

sehingga $y=0$ merupakan asimtot datar dari $f(x)$. Tinjau bahwa $f(x)$ tidak memiliki asimtot miring karena derajat pembilang lebih kecil dari derajat penyebut.

(b). **Menentukan interval naik-turun.** Perhatikan bahwa

$$f(x)=24\left(x^2-16\right)^{-1} \implies f'(x)=24\cdot(-1)\left(x^2-16\right)^{-2}\cdot(2x)=(-48)\cdot\frac{x}{\left(x^2-16\right)^2}.$$

Perhatikan bahwa $\left(x^2-16\right)^2>0$ untuk setiap $x\notin\{-4,4\}$. Perhatikan bahwa

$$f'(x)<0\ \forall x\in(0,4)\cup(4,\infty) \quad \text{dan} \quad f'(x)>0\ \forall\ x\in(-\infty,-4)\cup(-4,0).$$

Sehingga $f(x)$ merupakan fungsi naik di interval $(-\infty,-4)\cup(-4,0)$ dan fungsi turun di interval $(0,4)\cup(4,\infty)$.

(c). **Menentukan interval terbuka ke bawah-ke atas.** Perhatikan bahwa

$$f''(x)=(-48)\cdot\frac{1\cdot\left(x^2-16\right)^2-x\cdot 2\left(x^2-16\right)(2x)}{\left(x^2-16\right)^4}=(-48)\cdot\frac{x^2-16-4x^2}{\left(x^2-16\right)^3}=48\cdot\frac{3x^2+16}{\left(x^2-16\right)^3}.$$

Perhatikan bahwa $3x^2+16\geq 0+16>0$ untuk setiap $x\in\mathbb{R}$ dan $48>0$. Tinjau bahwa

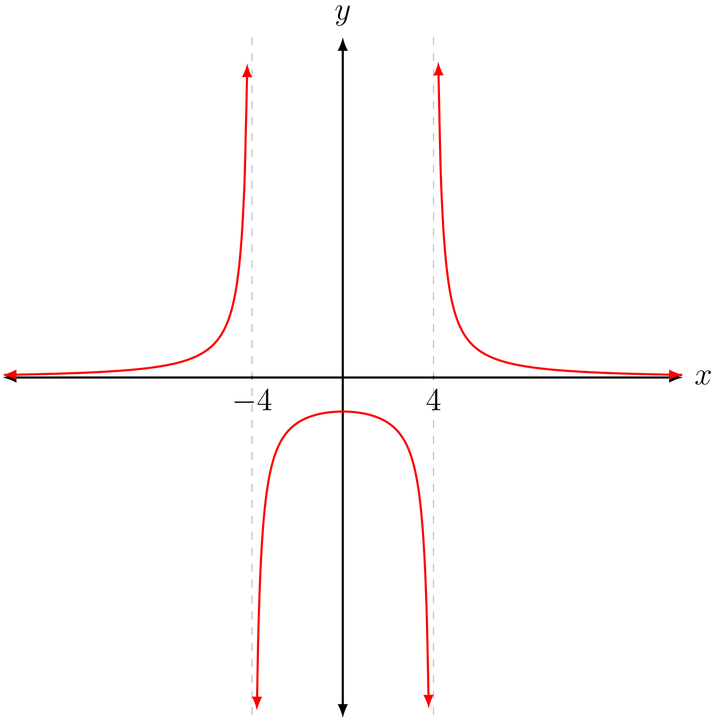
$$\begin{aligned}\left(x^2-16\right)^3>0 &\iff x^2-16>0 \iff x\in(-\infty,-4)\cup(4,\infty)\\ \left(x^2-16\right)^3<0 &\iff x^2-16<0 \iff x\in(-4,4).\end{aligned}$$

Sehingga kita simpulkan bahwa

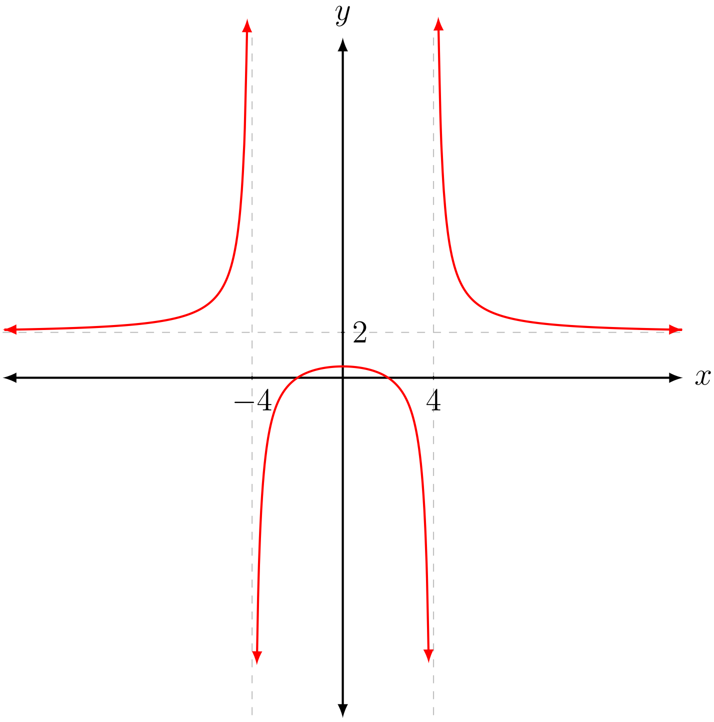
$$f''(x)>0\ \forall x\in(-\infty,4)\cup(4,\infty) \quad \text{dan} \quad f''(x)<0\ \forall x\in(-4,4).$$

Artinya, $y=f(x)$ terbuka ke atas di interval $(-\infty,4)\cup(4,\infty)$ dan terbuka ke bawah di interval $(-4,4)$.

Dari poin (a), (b), dan (c) kita peroleh sketsa grafik $y=\dfrac{24}{x^2-16}$ sebagai berikut.



Grafik $y = 2 + \dfrac{24}{x^2 - 16}$ diperoleh dari menggeser grafik $y = \dfrac{24}{x^2 - 16}$ sejauh dua satuan ke atas, yaitu sebagai berikut.



▼

§1.6. Teorema L'Hopital

Teorema L'Hopital dapat menjadi jalan pintas daripada melakukan manipulasi aljabar dalam mengerjakan sebuah soal limit. Sebelumnya, perlu diketahui bahwa beberapa bentuk tentu yang perlu diketahui:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0 \times \pm\infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad \infty - \infty.$$

Dalam menggunakan L'Hopital akan berhadapan dengan bentuk tak tentu di atas. Dalam modul ini hanya akan dijelaskan apabila dihadapkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Teorema 1.19: Aturan L'Hopital

Diberikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ yang terdifirensial di interval terbuka I (bisa jadi di titik c di mana $c \in I$ berlaku $f(c)$ dan $g(c)$ tidak terdefinisi). Apabila

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{atau} \quad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

maka

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Contoh 1.20

Tentukan $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 6x - 7}$.

Solusi. Perhatikan bahwa $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 6x - 7} = \frac{1^2 - 2 + 1}{1 + 6 - 7} = \frac{0}{0}$ yang merupakan bentuk tak tentu. Menggunakan **Teorema 1.18** berlaku

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 6x - 7} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 2 + 0}{2x + 6 - 0} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 2}{2x + 6} = \frac{2(1) - 2}{2(1) + 6} = \frac{0}{8} = \boxed{0}.$$

▼

Contoh 1.21: UTS 2020

Tentukan $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(3t) + 4t}{t \sec(t)}$.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$\frac{\sin(3t) + 4t}{t \sec(t)} = \frac{\sin(3t) + 4t}{t \cdot \frac{1}{\cos(t)}} = \frac{\sin(3t)\cos(t) + 4t\cos(t)}{t}.$$

Apabila disubstitusikan $t = 0$ diperoleh

$$\frac{\sin(3t)\cos(t) + 4t\cos(t)}{t} = \frac{\sin(0)\cos(0) + 4(0)\cos(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

yang merupakan bentuk tak tentu. Menggunakan L'Hopital, yaitu diperoleh dengan menurunkan pembilan dan penyebut. Akan ditentukan terlebih dahulu turunan dari $\sin(3t)\cos(t) +$

$4t\cos(t)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\sin(3t)\cos(t)+4t\cos(t)) &= \frac{d}{dt}\sin(3t)\cos(t)+\frac{d}{dt}4t\cos(t)\\ &= [\cos(3t)\cdot 3\cdot\cos(t)+\sin(3t)(-\sin(t))]+[4\cos(t)+4t(-\sin(t))]\\ &= 3\cos(3t)\cos(t)-\sin(3t)\sin(t)+4\cos(t)-4t\sin(t).\end{aligned}$$

Ini berarti

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\sin(3t)\cos(t)+4t\cos(t)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{3\cos(3t)\cos(t)-\sin(3t)\sin(t)+4\cos(t)-4t\sin(t)}{1}\\ &= \frac{3\cos(0)\cos(0)-\sin(0)\sin(0)+4\cos(0)-4(0)\sin(0)}{1}\\ &= \frac{3\cdot 1\cdot 1-0\cdot 0+4\cdot 1-0}{1}\\ &= \boxed{7}.\end{aligned}$$

▼

§1.7. Teorema Rata-Rata

Teorema 1.22: Teorema Nilai Rata-Rata pada Turunan

Terdapat fungsi $f(x)$ yang kontinu pada selang $[a,b]$ dan $f(x)$ dapat diturunkan pada selang (a,b), maka terdapat $c\in(a,b)$ sedemikian sehingga

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Contoh 1.23

Dengan menggunakan teorema rata-rata, tentukan nilai c untuk $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ di mana $x\in[2,5]$ agar $f'(c)=0$.

Solusi. Pertama,

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x-1}\right]=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

Dari Teorema Nilai Rata-Rata diperoleh

$$f'(c)=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{1}}{5-2}=\frac{-\frac{3}{4}}{3}=-\frac{1}{4}.$$

Karena $f'(c)=-\dfrac{1}{(c-1)^2}$, maka

$$-\frac{1}{(c-1)^2}=-\frac{1}{4}\implies (c-1)^2=4\implies c-1=\pm 2$$

sehingga $c=-1$ atau $c=3$. Karena $c=-1$ tidak berada di interval $[2,5]$, jadi $\boxed{c=3}$. ▼

Contoh 1.24

Jika a dan b adalah bilangan real di mana $0 \leq a \leq b \leq \frac{\pi}{4}$, buktikan bahwa

$$\tan(b) - \tan(a) \leq 2(b-a).$$

Solusi. Misalkan $f(x) = \tan(x)$ yang berarti f kontinu di $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ dan terdiferensial di $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Bentuk interval $[a, b]$, maka $f(x)$ juga kontinu di interval tersebut dan terdiferensial di (a, b). Perhatikan bahwa $f'(x) = \sec^2(x)$, menurut **Teorema 1.22** terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{\tan(b) - \tan(a)}{b-a} \implies \tan(b) - \tan(a) = (b-a)f'(c) = (b-a)\sec^2(c).$$

Misalkan $g(x) = \sec^2(x)$, dengan aturan rantai berlaku

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(\cos(x))^{-2} = -2(\cos(x))^{-3}(-\sin(x)) = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} \geq 0$$

di interval $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Ini berarti $g(x)$ merupakan fungsi naik yang berarti berlaku $g(x) \leq g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ untuk setiap $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Karena $c \leq \frac{\pi}{4}$, maka $g(c) \leq 2$ yang berarti $\sec^2(c) \leq 2$. Diperoleh

$$\tan(b) - \tan(a) = (b-a)\sec^2(c) \leq 2(b-a) \implies \tan(b) - \tan(a) \leq 2(b-a)$$

seperti yang ingin dibuktikan. ▼

§2. Latihan Soal

1. Tentukan gradien garis singgung dari $y = x^3 - 5x^2 + 1$ di titik:

   (a). $(0, 1)$.
   (b). $(1, -3)$.
   (c). $(-1, -5)$.
   (d). $(2, -11)$.
   (e). $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$.
   (f). $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right)$.

2. Tentukan persamaan garis singgung dari $y = x^2 + 3x - 5$ di titik:

   (a). $(1, -1)$.
   (b). $(0, -5)$.
   (c). $(2, 5)$.
   (d). $\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$.
   (e). $(-1, -7)$.
   (f). $\left(\frac{1}{3}, -\frac{35}{9}\right)$.

3. Gunakan aproksimasi linier untuk menentukan pendekatan nilai dari $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, dan $\sqrt{9,18}$.

4. Tentukan semua titik kritis dari $f(x)$, kemudian tentukan nilai maksimal dan minimum dari $f(x)$ di mana:

   (a). $f(x) = x^3 - 2x + 1$ di $(-\infty, \infty)$.

(b). $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ di $[-1, 5]$.

(c). $f(x) = 8x^3 + 81x^2 - 42x - 8$ di $[-2, 2]$.

(d). $f(x) = \dfrac{x+4}{2x^2+x+8}$ di $(\infty, 2]$.

5. (UTS 2019) Bila ada, tentukan titik potong sumbu-x dengan garis singgung kurva

$$x + \sin\left(x^2 y\right) + 3y^2 = 3$$

di titik $(0, 1)$.

6. Tentukan nilai dari limit berikut jika ada.

(a). $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 7x^2 + 10x}{x^2 + x - 6}$.

(b). $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$.

(c). $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 16}$.

(d). $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + 7x^2 - 2x}{x^2(x+1)^2}$.

7. Diberikan $y = f(x)$ di mana $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

(a). Tentukan asimtot datar, asimtot tegak, dan asimtot miring dari $y = f(x)$.

(b). Tentukan interval di mana fungsi $f(x)$ merupakan fungsi naik dan fungsi turun.

(c). Tentukan interval di mana fungsi $y = f(x)$ cekung ke atas dan cekung ke bawah.

(d). Gambarkan grafik dari $y = f(x)$.

8. Lakukan hal yang serupa seperti nomor 7 untuk menggambar grafik $y = f(x)$ di mana $y = \dfrac{2x^2 + 2}{x^2 - 1}$.