Responsi Kalkulus I D 2023/2024

Departemen Matematika Universitas Brawijaya

Dosen Pengampu:

Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D

Asisten:

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Turunan

Ringkasan

Modul ini akan membahas **secara ringkas** tentang turunan: definisi turunan, turunan sepihak dan eksistensinya, sifat-sifat, turunan fungsi trigonometri, turunan tingkat tinggi, aturan rantai, dan turunan fungsi implisit. Perlu diingat bahwa modul ini **jangan dijadikan patokan untuk belajar** karena hanya sebagai ringkasan. Lebih baik Anda membaca terlebih dahulu versi lengkapnya pada referensi tertentu, seperti buku oleh cak Purcell atau cak Thomas. Sebagai latihan tambahan, contoh soal dapat dicoba terlebih dahulu hingga benar-benar menyerah (atau sudah selesai). Jika tidak berhasil menyelesaikannya, maka ikuti alurnya dan **jangan sekedar dibaca**, namun sambil menulis seakan dikerjakan sendiri.

§1. Review Dulu

§1.1. Definisi

Definisi 1.1 (Turunan)**.** Turunan dari fungsi f di $x = c$, dinotasikan sebagai $f'(c)$, didefinisikan sebagai

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}. \tag{$*$}$$

Fungsi $f(x)$ **terdiferensial** di $x = c$ apabila nilai limit dari $(*)$ ada.

Menggunakan definisi di atas diperoleh fakta pada teorema berikut.

Teorema 1.2

Jika $f(x)$ terdiferensial di $x = c$, maka $f(x)$ kontinu di $x = c$.

Selanjutnya, turunan dari $f(x)$ dituliskan juga sebagai $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{dx}$.

§1.2. Turunan Sepihak dan Eksistensinya

Sebagaimana dalam limit sepihak dan eksistensinya, demikian juga turunan sepihak dan eksistensinya.

Definisi 1.3 (Turunan Kanan-Kiri)**.** Diberikan fungsi $f(x)$ yang terdefinisi di interval (a, b) dan $c \in (a, b)$. Turunan sisi kiri dari $f(x)$ di $x = c$ didefinisikan sebagai

$$f'\left(c^-\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Sedangkan, turunan sisi kanan dari $f(x)$ di $x = c$ didefinisikan sebagai

$$f'\left(c^+\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Dalam modul ini, akan didefinisikan pula

$$f'\left(x^+\right) = \frac{df}{dx}\left(x^+\right) = \frac{df^+}{dx} \quad \text{dan} \quad f'\left(x^-\right) = \frac{df}{dx}\left(x^-\right) = \frac{df^-}{dx}.$$

Sebagai saran, notasi $\frac{df^+}{dx}$ dan $\frac{df^-}{dx}$ perlu dituliskan apabila diperlukan.

Dengan membandingkan **Definisi 1.1** dan **Definisi 1.3**, eksistensi dari turunan dapat diperoleh dengan menunjukkan hal berikut.

Eksistensi Turunan

Untuk memeriksa apakah $f(x)$ terdiferensial di $x = c$, perlu ditunjukkan bahwa:

(a). $f(c)$ ada.

(b). $f'\left(c^+\right)$ dan $f'\left(c^-\right)$ masing-masing ada.

(c). $f'\left(c^+\right) = f'\left(c^-\right)$.

Soal-soal yang dihadapi yang mempertanyakan eksistensi turunan biasanya pada soal bertipe fungsi bercabang (*piecewise function*).

Contoh 1.4

Periksa apakah f terdiferensial di $x = 0$ di mana

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x \geq 0 \\ 2023, & x < 0 \end{cases}.$$

Solusi. Perhatikan bahwa

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(h^2-3) - (0^2-3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} = -\infty$$

yang mana limitnya tidak ada. Karena $f'\left(0^-\right)$ tidak ada, hal ini telah menyangkal kondisi yang harus dipenuhi agar terdiferensial. Jadi, f $\boxed{\text{tidak terdiferensial}}$ di $x = 0$. ▼

Contoh 1.5

Periksa apakah fungsi f terdiferensial di $x = 1$ di mana

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ -x^2 + 2, & x < 1 \end{cases}.$$

Solusi. Perhatikan bahwa

$$f'\left(1^+\right) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} (h+2) = 0+2 = 2.$$

Di sisi lain,

$$f'\left(1^-\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(1+h)^2 + 2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2 - 2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-h-2) = -2.$$

Karena $f'\left(1^+\right) \neq f'\left(1^-\right)$, ini berarti f $\boxed{\text{tidak terdiferensial}}$ di $x = 1$. ▼

Menggunakan definisi dan meninjau eksistensi turunan dapat dibuktikan pernyataan berikut.

Teorema 1.6

(a). Fungsi polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots + a_1 x + a_0$ terdiferensialkan di mana-mana (selalu terdiferensialkan di $x = c$ di mana c sebarang bilangan real).

(b). Misalkan $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ dan $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, tulis

$$g(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}.$$

Fungsi $g(x)$ terdiferensialkan di sebarang $x = c$ asalkan $q(c) \neq 0$.

§1.3. Sifat-Sifat Turunan

Menggunakan **Definisi 1.1** dapat diturunkan sifat-sifat berikut.

Teorema 1.7: Turunan Beberapa Fungsi

(a). $\dfrac{d}{dx}c = 0$ di mana c konstanta.

(b). $\dfrac{d}{dx}x^a = nx^{n-1}$ di mana n bilangan real.

(c). $\dfrac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$.

(d). $\dfrac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$.

Selanjutnya, dapat diturunkan sifat-sifat lainnya dengan menggunakan **Definisi 1.1**.

Teorema 1.8: Sifat-Sifat Turunan

Diberikan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ yang terdiferensial.

(a). $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$ di mana k suatu konstan.

(b). $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ dan $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

(c). $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

(d). $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ asalkan $g(x) \neq 0$.

Contoh 1.9

Jika $f(x) = 3x^2 + 10x - 9$, tentukan $f'(x)$ dan $f'(1)$.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^2 + 10x - 9\right) = \frac{d}{dx}3x^2 + \frac{d}{dx}10x - \frac{d}{dx}9.$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{d}{dx}3x^2 = 3 \cdot 2x = 6x, \quad \frac{d}{dx}10x = 10 \cdot 1 = 10, \quad \frac{d}{dx}9 = 0.$$

Dari sini diperoleh $\boxed{f'(x) = 6x + 10}$ dan $f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = \boxed{16}$. ▼

Contoh 1.10

Tentukan $\dfrac{d}{dx}(x+2)\left(x^2 + 3x + 10\right)$.

Solusi. Misalkan $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = x^2 + 3x + 10$. Akan ditentukan

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Di sisi lain, $f'(x) = 1 + 0 = 1$ dan $g'(x) = 2x + 3 \cdot 1 + 0 = 2x + 3$. Maka diperoleh

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = 1 \cdot \left(x^2 + 3x + 10\right) + (x+2)(2x+3) = x^2 + 3x + 10 + \left(2x^2 + 7x + 6\right)$$

yang berarti $\dfrac{d}{dx}(x+2)\left(x^2 + 3x + 10\right) = \boxed{3x^2 + 10x + 16}$. ▼

Contoh 1.11

Tentukan $\dfrac{d}{dx}\tan(x)$.

Solusi. Perlu diingat bahwa $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, misalkan $f(x) = \sin(x)$ dan $g(x) = \cos(x)$. Maka akan ditentukan

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Di sisi lain, $f'(x) = \cos(x)$ dan $g'(x) = -\sin(x)$. Ini berarti

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).$$

Jadi, $\dfrac{d}{dx}\tan(x) = \boxed{\sec^2(x)}$. ▼

§1.4. Turunan Tingkat Tinggi

Pada contoh-contoh sebelumnya telah disajikan turunan pertama dari beberapa fungsi $f(x)$, yang ditulis berupa $\frac{df}{dx}$ atau $f'(x)$. Turunan kedua dari $f(x)$ dinotasikan sebagai turunan dari $f'(x)$, dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx} f'(x) = f''(x).$$

Dengan penjelasan yang sama, turunan ketiga dari $f(x)$ adalah

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx} f''(x) = f'''(x).$$

Begitu pula turunan keempat dari $f(x)$ adalah $f''''(x)$ dan seterusnya. Penulisan notasi $f'(x), f''(x)$, $f'''(x), f''''(x)$ dan seterusnya dirasa kurang efisien apabila menuliskan turunan ke-n dari $f(x)$ sebagai $f'''\cdots'(x)$ di mana tanda petik $(')$ sebanyak n. Dalam hal ini, akan dituliskan sebagai

$$\frac{df}{dx} = f^{(1)}(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = f^{(2)}(x), \quad \frac{d^3 f}{dx^3} = f^{(3)}(x), \quad \frac{d^4 f}{dx^4} = f^{(4)}(x), \quad \frac{d^5 f}{dx^5} = f^{(5)}(x),$$

dan seterusnya.

Contoh 1.12

Tentukan turunan kedua dari $f(x) = x^3 + 5x + \frac{1}{x}$.

Solusi. Perhatikan bahwa $f(x) = x^3 + 5x + x^{-1}$, tulis

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 + 5x + x^{-1}\right) = 3x^2 + 5 \cdot 1 + (-1)x^{-2} = 3x^2 + 5 - x^{-2}.$$

Diperoleh turunan kedua dari $f(x)$ adalah

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^2 + 5 - x^{-2}\right) = 3 \cdot 2x + 0 - (-2)x^{-3} = 6x + 2x^{-3} = \boxed{6x + \frac{2}{x^3}}.$$

▼

§1.5. Aturan Rantai

Aturan rantai melibatkan komposisi dari dua fungsi yang terdiferensialkan.

Teorema 1.13: Aturan Rantai

Misalkan f fungsi yang terdiferensialkan di $x = c$ dan g fungsi yang terdiferensialkan di $x = f(c)$. Maka $h = g \circ f$ terdiferensialkan di $x = c$ di mana

$$\frac{dh}{dx}(x) = \frac{d\,g(f)}{df}\,\frac{df}{dx} = g'\left(f(x)\right) f'(x).$$

Aturan rantai ini dapat diperumum menjadi lebih banyak fungsi komposisi. Sebagai contoh, untuk $a = f \circ g \circ h$, maka

$$\frac{da}{dx} = \frac{d\,f(g(h))}{d\,g(h)}\frac{d\,g(h)}{dh}\frac{dh}{dx} = f'\Big(g\big(h(x)\big)\Big)g'\big(h(x)\big)h'(x).$$

Contoh 1.14

Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ di mana $y = \left(x^2 + 3x - 1\right)^{10}$.

Solusi. Tentunya ini akan sulit diselesaikan apabila harus mengekspansikan bentuk $\left(x^2+3x-1\right)^{10}$. Misalkan $f(x) = x^{10}$ dan $g(x) = x^2 + 3x - 1$, dari sini diperoleh $\left(x^2 + 3x - 1\right)^{10} = f(g(x))$. Dengan aturan rantai diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(g)}{dx} = \frac{d\,f(g)}{dg}\frac{dg}{dx} = f'\big(g(x)\big)g'(x).$$

Perhatikan bahwa $f'(x) = 10x^9$ dan $g'(x) = 2x + 3$, dari sini diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = f'\left(g(x)\right)g'(x) = 10(g(x))^9(2x+3) = \boxed{10\left(x^2+3x-1\right)^9(2x+3)}.$$

▼

Contoh 1.15

Tentukan $\dfrac{d}{dx}\sin(\cos(x))$.

Solusi. Misalkan $f(x) = \sin(x)$ dan $g(x) = \cos(x)$, dari sini diperoleh $\sin(\cos(x)) = f(g(x))$. Dengan aturan rantai diperoleh

$$\frac{d}{dx}\sin(\cos(x)) = \frac{d\,f(g)}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg}{dx} = f'\Big(g(x)\Big)g'(x).$$

Karena $f'(x) = \cos(x)$ dan $g'(x) = -\sin(x)$, maka

$$\frac{d}{dx}\sin(\cos(x)) = f'\Big(g(x)\Big)g'(x) = \cos(g(x))(-\sin(x)) = \boxed{-\cos(\cos(x))\sin(x)}.$$

▼

Contoh 1.16: UTS 2019

Tentukan $f'(x)$ di mana $f(x) = x\sqrt{2x+1}$.

Solusi. Misalkan $g(x) = x$ dan $h(x) = \sqrt{2x+1}$, maka $f(x) = g(x)h(x)$. Ini berarti $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$. Mudah diperoleh bahwa $g'(x) = 1$. Akan ditentukan $h'(x)$, menerapkan aturan rantai berlaku

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{2x+1} = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\frac{d}{dx}(2x+1) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$$

Diperoleh

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2x+1+x}{\sqrt{2x+1}} = \boxed{\frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}}.$$

▼

Contoh 1.17: UTS 2019

Tentukan $f'(x)$ di mana $f(x) = \sqrt{\cos\left(x^3+2x^2-3x\right)^{99}}$.

Solusi. Dari aturan rantai berlaku

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\cos\left(x^3+2x^2-3x\right)^{99}} = \frac{1}{2\sqrt{\cos\left(x^3+2x^2-3x\right)^{99}}}\,\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2-3x\right)^{99}.$$

Menerapkan aturan rantai sekali lagi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2-3x\right)^{99} &= 99\left(x^3+2x^2-3x\right)^{98}\,\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2-3x\right)\\ &= 99\left(x^2+2x^2-3x\right)^{98}\left(3x^2+4x-3\right).\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{\cos\left(x^2+2x^2-3x\right)^{99}} &= \frac{1}{2\sqrt{\cos\left(x^3+2x^2-3x\right)^{99}}}\cdot 99\left(x^3+2x^2-3x\right)^{98}\left(3x^2+4x-3\right)\\ &= \boxed{\frac{99\left(x^3+2x^2-3x\right)^{98}\left(3x^2+4x-3\right)}{2\sqrt{\cos\left(x^3+2x^2-3x\right)^{99}}}}.\end{aligned}$$

▼

§1.6. Turunan Fungsi Implisit

Turunan fungsi implisit akan memanfaatkan aturan rantai dan sifat-sifat turunan sebagaimana pada **Teorema 1.7** dan **Teorema 1.8**. Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 1.18

Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ apabila $\left(x^2-1\right)y = 2x+3$.

Solusi. Turunkan kedua ruas terhadap x, yaitu

$$\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)y = \frac{d}{dx}(2x+3).$$

Mudah diperoleh $\dfrac{d}{dx}(2x+3) = 2\cdot 1 + 0 = 2$. Di sisi lain,

$$\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)y = \frac{d\left(x^2-1\right)}{dx}\cdot y + \left(x^2-1\right)\cdot\frac{dy}{dx} = (2x-0)y + \left(x^2-1\right)\cdot\frac{dy}{dx} = 2xy + \left(x^2-1\right)\frac{dy}{dx}.$$

Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right) &= \frac{d}{dx}(2x+3)\\ 2xy+\left(x^2-1\right)\frac{dy}{dx} &= 2\\ \left(x^2-1\right)\frac{dy}{dx} &= 2-2xy\\ \frac{dy}{dx} &= \boxed{\frac{2-2xy}{x^2-1}}.\end{aligned} \tag{1}$$

Apabila bentuk dari y masih dapat mudah diolah, dalam hal ini $y=\frac{2x+3}{x^2-1}$, disarankan untuk disubstitusikan pada (1), yaitu

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2x\cdot\frac{2x+3}{x^2-1}}{x^2-1}=\frac{2\left(x^2-1\right)-2x(2x+3)}{\left(x^2-1\right)^2}=\boxed{\frac{-2x^2-6x-2}{\left(x^2-1\right)^2}}.$$

Hal ini dapat diverivikasi kebenarannya pula dengan

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{x^2-1}\right)=\frac{(2\cdot 1+0)\left(x^2-1\right)-(2x+3)(2x-0)}{\left(x^2-1\right)^2}=\boxed{\frac{-2x^2-6x-2}{\left(x^2-1\right)^2}}.$$

▼

Contoh soal di atas masih mudah untuk memperoleh y dalam bentuk x sehingga menentukan $\frac{dy}{dx}$ dapat dilakukan seperti contoh-contoh sebelumnya. Sekarang, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.19: UTS 2022 Kalkulus I (dipermudah)

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui $2x^2y-4y^3=4$.

Solusi. Perhatikan bahwa $2x^2y-4y^3=4 \iff x^2y-2y^3=2$. Turunkan kedua ruas terhadap variabel x, maka

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^2y-2y^3\right) &= \frac{d}{dx}2\\ 2xy+x^2\frac{dy}{dx}-6y^2\frac{dy}{dx} &= 0\\ \left(6y^2-x^2\right)\frac{dy}{dx} &= 2xy\\ \frac{dy}{dx} &= \boxed{\frac{2xy}{6y^2-x^2}}.\end{aligned}$$

Bentuk di atas dapat diabaikan saja karena menentukan y dalam variabel x akan sulit ditemukan. ▼

Contoh 1.20: UTS 2021

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + x^2y^3$.

Solusi. Turunkan kedua ruas terhadap x, dengan menerapkan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(1 + x^2y^3\right) \\
\cos\left(\frac{y}{x}\right)\ \frac{d}{dx}\frac{y}{x} &= 0 + 2xy^3 + x^2\ \frac{d}{dx}y^3 \\
\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\frac{dy}{dx}\cdot x - y\cdot 1}{x^2} &= 2xy^3 + x^2\left(3y^2\cdot\frac{dy}{dx}\right) \\
\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{x\ \frac{dy}{dx} - y}{x^2} &= 2xy^3 + 3x^2y^2\ \frac{dy}{dx}.
\end{aligned}$$

Untuk mempermudah penulisan, misalkan $A = \frac{dy}{dx}$, akan ditentukan A. Maka

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{Ax - y}{x^2} &= 2xy^3 + 3x^2y^2A \\
\cos\left(\frac{y}{x}\right)(Ax - y) &= 2x^3y^3 + 3x^4y^2A \\
Ax\cos\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right) &= 2x^3y^3 + 3x^4y^2A \\
Ax\cos\left(\frac{y}{x}\right) - 3x^4y^2A &= 2x^3y^3 + y\cos\left(\frac{y}{x}\right) \\
A\left(x\cos\left(\frac{y}{x}\right) - 3x^4y^2\right) &= 2x^3y^3 + y\cos\left(\frac{y}{x}\right) \\
A &= \frac{2x^3y^3 + y\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right) - 3x^4y^2}.
\end{aligned}$$

Jadi, $\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{2x^3y^3 + y\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right) - 3x^4y^2}}$. ▼

§2. Latihan Soal

1. Periksa apakah $f(x) = |x|$ terdiferensial di $x = 0$ atau tidak.

2. Periksa apakah f terdiferensial di $x = 0$ atau tidak di mana

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x < 0, & x < 0 \end{cases}.$$

3. Tentukan $\frac{df}{dx}$ di mana

(a). $f(x) = 2x^2 + 3 + \sin(x)$.

(b). $f(x) = -3x + \sqrt{x}$.

(c). $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$.

(d). $f(x) = \sec(x)$.

(e). $f(x) = \sin(x)\tan(x)$.

(f). $f(x) = 2\left(x^2 - 10\right) + \dfrac{10}{\sqrt[3]{x}}$.

4. (a). Tentukan $\dfrac{d}{dx}(\sin(x)+1)^{99}$.

   (b). Tentukan $\dfrac{d}{dx}\sin(10x)$.

   (c). Tentukan $\dfrac{d}{dx}\tan^2(x)$.

   (d). Jika $f(x) = \left(x^2+1\right)^3\left(x^{99} - x^{90} + 1\right)$, tentukan $f'(x)$ dan $f'(1)$.

   (e). TEntukan $\dfrac{d}{dx}\cos\left(\dfrac{3x^2}{x+2}\right)$.

   (f). Tentukan $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{3t-2}{t+5}\right)^3$.

5. (a). Tentukan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ dan $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ dari $y = (3x+5)^3$.

   (b). Tentukan $\dfrac{d^2}{dx^2}\sin\left(x^3\right)$.

   (c). Jika $f(x) = x\left(1-x^2\right)^3$, tentukan nilai dari $f''(2)$.

   (d). Tentukan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ di mana $y = \dfrac{1}{\cos^2(\pi x)}$.

   (e). Tentukan $\dfrac{d^2}{dx^2}x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.

   (f). Tentukan $\dfrac{d^{2023}}{dx^{2023}}\sin(x)$.

6. (a) Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ di mana $y^3 + 7y = x^3$.

   (b) Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ apabila $4x^2y - 3y = x^3 - 1$.

   (c) Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ dari $xy\left(x^2+y^2\right) = 30$.

   (d) Tentukan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ apabila $x^3 - 4y^2 + 3 = 0$.

   (e) Tentukan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ apabila $2x^2y - 4y^3 = 4$.

   (f) Tentukan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ di mana $\sin(xy) = y$.