Responsi Kalkulus I D 2023/2024

Departemen Matematika Universitas Brawijaya

Dosen Pengampu:

Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D

Asisten:

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Aplikasi Limit

Ringkasan

Modul ini akan membahas **secara ringkas** tentang aplikasi limit: kekontinuan, asimtot, dan teorema nilai antara. Perlu diingat bahwa modul ini **jangan dijadikan patokan untuk belajar** karena hanya sebagai ringkasan. Lebih baik Anda membaca terlebih dahulu versi lengkapnya pada referensi tertentu, seperti buku oleh cak Purcell atau cak Thomas. Sebagai latihan tambahan, contoh soal dapat dicoba terlebih dahulu hingga benar-benar menyerah (atau sudah selesai). Jika tidak berhasil menyelesaikannya, maka ikuti alurnya dan **jangan sekedar dibaca**, namun sambil menulis seakan dikerjakan sendiri.

§1. Review Dulu

§1.1. Kekontinuan

Secara kasar, suatu fungsi f kontinu di $[a, b]$ jika grafik $y = f(x)$ di interval $[a, b]$ dapat digambar tanpa mengangkat bolpoin. Secara matematis dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1 (Kekontinuan di Titik)**.** Misalkan fungsi f terdefinisi di interval terbuka yang mengandung c. Maka f **kontinu di** $x = c$ apabika $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Dari definisi tersebut dapat diperoleh sebagai berikut.

Memerika Kekontinuan di Suatu Titik

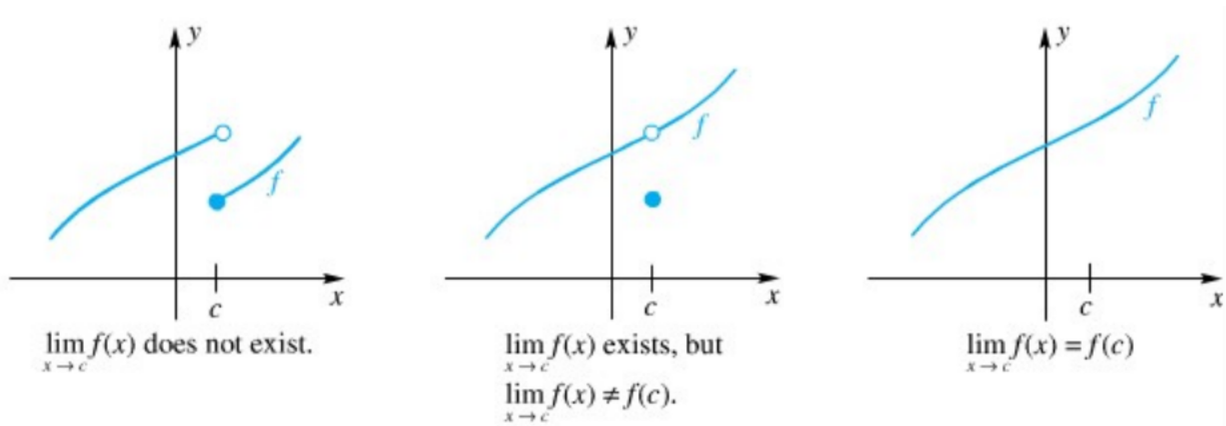
Untuk memeriksa f kontinu di $x = c$, maka harus dipenuhi ketiga syarat berikut:

(a). $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ada,

(b). $f(c)$ ada, dan

(c). $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Apabila salah satu syarat tidak terpenuhi, maka f disebut fungsi **diskontinu**.



Contoh 1.2: Kekontinuan Fungsi Polinomial dan Fungsi Rasional

Fungsi polinomial kontinu di sebarang titik. Sedangkan, fungsi rasional juga kontinu di sebarang titik selain saat penyebutnya bernilai 0.

Contoh 1.3: Kekontinuan di Fungsi Trigonometri

Fungsi $\sin(x)$ dan $\cos(x)$ kontinu di sebarang titik. Fungsi $\tan(x), \cot(x), \sec(x)$, dan $\operatorname{cosec}(x)$ juga kontinu di sebarang titik yang di domainnya.

Contoh 1.4: *Piecewise Function*

Perika apakah fungsi f dan g berikut kontinu di $x = 3$ atau tidak, di mana

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{jika} \quad x \neq 3 \\ 6 & \text{jika} \quad x = 3 \end{cases} \quad \text{dan} \quad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{jika} \quad \geq 3 \\ x+1 & \text{jika} \quad x < 3 \end{cases}.$$

Solusi. Perhatikan bahwa untuk $x \neq 3$ berlaku

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x^2-3^2}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3 \implies f(x) = x+3 \; \forall x \neq 3.$$

Akan dicek ketiga syarat untuk mengecek kekontinuan f di $x = 3$.

- Perhatikan bahwa $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x+3) = 3+3 = 6$ dan $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(x+3) = 3+3 = 6$. Karena $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 6 = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, ini artinya $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ada di mana $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$.
- Perhatikan bahwa $f(3) = 6$, ini artinya $f(3)$ ada.
- Perhatikan bahwa $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6 = f(3) \implies \lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

Karena ketiga syarat telah terpenuhi, jadi $\boxed{f \text{ kontinu}}$ di $x = 3$.
Akan dicek ketiga syarat untuk mengecek kekontinuan g di $x = 3$. Perhatikan bahwa $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x-1) = 3-1 = 2$ dan $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(x+1) = 3+1 = 4$. Karena $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$, ini artinya $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ tidak ada. Karena salah satu syarat tidak terpenuhi, hal ini menyimpulkan $\boxed{g \text{ tidak kontinu}}$ di $x = 3$. ▼

Teorema 1.5: Sifat-Sifat Kekontinuan

Jika fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ kontinu di titik $x = c$, maka

$$kf(x), \quad f(x)+g(x), \quad f(x)-g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \; (g(c) \neq 0),$$
$$(f(x))^n, \quad \sqrt[n]{f(x)} \; (f(c) > 0 \text{ jika } n \text{ genap})$$

masing-masing kontinu di $x = c$.

Contoh 1.6

Perhatikan bahwa fungsi $f(x) = x^2 - 3x + 1$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ masing-masing merupakan fungsi kontinu untuk setiap bilangan real positif x. Maka fungsi $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$ dan $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x}}$ masing-masing juga merupakan fungsi kontinu di sebarang real positif x.

Teorema 1.7: Kekontinuan di Fungsi Komposisi

Jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan f kontinu di L, maka

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L).$$

Dengan kata lain, jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$, maka $f \circ g$ kontinu di c.

Contoh 1.8

Diberikan fungsi $f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = \ln(x)$ yang mana masing-masing kontinu di sebarang real positif x. Maka

$$\lim_{x \to 2} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to 2} \ln(2x + 1) = \ln\left(\lim_{x \to 2} (2x + 1)\right) = \ln(5).$$

§1.2. Asimtot

Definisi 1.9 (Asimtot Grafik)**.** Asimtot dari suatu grafik merupakan sebuah garis sedemikian sehingga jarak garis dengan grafik tersebut semakin mendekati nol untuk nilai x atau y yang menuju tak hingga.

Terdapat tiga jenis asimtot: datar, tegak, dan miring yang dapat ditentukan sebagai berikut.

(a). Asimtot datar memiliki persamaan berupa $y = c$ di mana c suatu konstan. Garis $y = c$ merupakan asimtot datar dari $y = f(x)$ apabila

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c \quad \text{atau} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = c.$$

(b). Asimtot tegak memiliki persamaan berupa $x = c$ di mana c suatu konstan. Garis $x = c$ merupakan asimtot tegak dari $y = f(x)$ apabila

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty, \quad \text{atau} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty.$$

(c). Asimtot miring memiliki persamaan berupa $y = mx + n$ di mana m, n suatu konstan dan $m \neq 0$. Untuk menentukan asimtot miring perlu melakukan prosedur berikut secara bertahap:

(1). Menentukan nilai m dengan $m = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x}$ di mana a mewakili salah satu ∞ atau $-\infty$.

(2). Setelah ditemukan nilai m, nilai n dapat ditentukan dengan $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-mx)$ di mana a yang digunakan harus sama dengan yang digunakan di bagian (a).

Jika salah satu pada nomor (1) atau (2) nilai limit tidak ada, maka tidak ada asimtot miring.

Contoh 1.10

Tentukan asimtot miring dari $y = f(x)$ di mana

(a). $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+1}{x}$.

(b). $f(x) = \sin(x)$.

Solusi. Akan ditentukan asimtot miring dari $y = f(x)$, yaitu $y = mx + n$ (jika ada).

(a). Perhatikan bahwa

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 2+0+0 = 2.$$

Selanjutnya,

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x+1}{x} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right) = 3.$$

Jadi, asimtot miring dari $y = \dfrac{2x^2+3x+1}{x}$ adalah $\boxed{y = 2x+3}$ saat $x \to \infty$. Dengan cara yang sama, saat $x \to -\infty$ juga dapat diperoleh asimtot miringnya $y = 2x + 3$.

(b). Tulis $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$. Karena $-1 \le \sin(x) \le 1$, maka $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin(x)}{x} \le \dfrac{1}{x}$. Mengingat $\lim\limits_{x\to\infty} \pm\dfrac{1}{x} = 0$ yang menurut Teorema Apit berlaku $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x)}{x} = 0 \implies m = 0$. Ini berarti $y = f(x)$ $\boxed{\text{tidak memiliki asimtot miring}}$.

▼

§1.3. Teorema Nilai Antara

Teorema 1.11: Teorema Nilai Antara (*Intermediate Value Theorem*)

Diberikan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ yang kontinu di interval $[a,b]$. Untuk setiap $L \in \mathbb{R}$ di mana $f(a) < L < f(b)$, terdapat $c \in [a,b]$ sedemikian sehingga $f(c) = L$.

Contoh 1.12

Buktikan bahwa $x + \sin(x) = 0$ memiliki solusi di interval $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Solusi. Misalkan $f(x) = x + \sin(x)$. Karena $g(x) = x$ dan $h(x) = \sin(x)$ merupakan fungsi kontinu di interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, maka fungsi $f(x) = g(x) + h(x) = x + \sin(x)$ juga merupakan fungsi kontinu di $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Karena $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - 1 < 0$ dan $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1 > 0$ dan $0 \in \left(-\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2} + 1\right)$, ini berarti terdapat $c \in \left[-\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{2} + 1\right]$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$. Dengan kata lain, ini menunjukkan bahwa $x + \sin(x) = 0$ memiliki solusi di interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ seperti yang ingin dibuktikan. ▼

§2. Latihan Soal

1. Periksa apakah fungsi f kontinu di $x = 2$ atau tidak di mana

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{jika} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{jika} \quad x = 2 \end{cases}.$$

2. Periksa apakah fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$ dan fungsi $g(x) = \ln(x)$ kontinu di sebarang $x \in \mathbb{R}^+$ atau tidak.

3. Periksa apakah fungsi $f(x)$ kontinu di $x = 0$ dan di $x = 1$ di mana

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{jika} \quad x < 0 \\ x & \text{jika} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 + x & \text{jika} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

4. Periksa apakah fungsi f dan g kontinu di sebarang titik atau tidak di mana

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2 + 2x - 3} \quad \text{dan} \quad g(x) = \frac{(x^2 - x + 1)^2}{x^2 + 2x + 5}.$$

   Jika tidak, tentukan di titik mana f dan g diskontinu.

5. Buktikan bahwa fungsi polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

   kontinu di sebarang titik.

6. Tentukan asimtot datar, asimtot tegak, dan asimtot miring dari $y = f(x)$ jika ada.

   (a) $f(x) = \dfrac{2}{x(x-1)}$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

   (c) $f(x) = \sin(x)$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

   (d) $f(x) = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$.

7. Buktikan bahwa $x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$ memiliki penyelesaian bilangan real.

8. Buktikan bahwa terdapat bilangan real x yang memenuhi $\sin(x) + \cos(x) = \dfrac{2023}{2022}$.