Responsi Kalkulus I D 2023/2024

Departemen Matematika Universitas Brawijaya

Dosen Pengampu:

Corina Karim, S.Si., M.Si., Ph.D

Asisten:

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Limit Fungsi

Ringkasan

Modul ini akan membahas **secara ringkas** tentang limit fungsi: definisi dan pengertian, limit-limit sepihak, eksistensi limit, dan sifat-sifat limit. Selain itu, akan dibahas limit pada fungsi polinomial, fungsi rasional, fungsi trigonometri, dan limit fungsi yang nilainya menuju tak hingga. Perlu diingat bahwa modul ini **jangan dijadikan patokan untuk belajar** karena hanya sebagai ringkasan. Lebih baik Anda membaca terlebih dahulu versi lengkapnya pada referensi tertentu, seperti buku oleh cak Purcell atau cak Thomas. Sebagai latihan tambahan, contoh soal dapat dicoba terlebih dahulu hingga benar-benar menyerah (atau sudah selesai). Jika tidak berhasil menyelesaikannya, maka ikuti alurnya dan **jangan sekedar dibaca**, namun sambil menulis seakan dikerjakan sendiri.

§1. Review Dulu

Diberikan suatu fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ di mana I menyatakan gabungan beberapa interval dan $c \in I$. Secara intuitif (tidak formal), $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, berarti saat x sedekat mungkin dengan c (namun $x \neq c$) maka $f(x)$ akan sedekat mungkin dengan L. Sebagai contoh, penjelasan tentang $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{3}$ di mana $f(x) = \frac{x}{x+2}$ dapat diamati dari tabel berikut.

x	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$1,1$	$1,01$	$1,001$
$f(x)$	$0,310345$	$0,331104$	$0,333111$	$0,354839$	$0,335548$	$0,333555$

Pada tabel di atas dapat diperbanyak sedemikian sehingga nilai x sangat dekat dengan 1 dan dapat diamati bahwa nilai $f(x)$ akan semakin menuju ke $\frac{1}{3} = 0,3333\cdots$. Tentu limit memiliki definisi formal yang matematis.

Definisi 1.1 (Limit)**.** Misalkan $f : I \to \mathbb{R}$ di mana I menyatakan gabungan beberapa interval dan $c \in I$. Maka $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ apabila untuk setiap $\epsilon > 0$ maka terdapat $\delta > 0$ yang memenuhi $0 < |x - c| < \delta$ sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \epsilon$.

Untuk saat ini, **Definisi 1.1** hanya pengenalan saja dan akan dibahas lebih lanjut di mata kuliah analisis real. **Definisi 1.1** tidak akan dikeluarkan di UTS maupun UAS Kalkulus I.

§1.1. Limit Sepihak

Perhatikan kembali tabel penjelasan $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{3}$ di mana $f(x) = \frac{x}{x+2}$. Pada tabel tersebut dilakukan beberapa uji untuk $x \in \left\{\frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1000}\right\}$ dan $x \in \left\{\frac{11}{10}, \frac{101}{100}, \frac{1001}{1000}\right\}$. Dari contoh tersebut, untuk menentukan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ dilakukan pendekatan dari arah kiri, yaitu pada $\left\{\frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \frac{999}{1000}\right\}$, dan dilakukan pendekatan dari kanan, yaitu $\left\{\frac{11}{10}, \frac{101}{100}, \frac{1001}{1000}\right\}$. Ternyata, baik pendekatan dari kiri maupun kanan, nilai dari $f(x) = \frac{x}{x+2}$ masing-masing akan semakin dekat dengan $\frac{1}{3}$.

Definisi 1.2 (Limit Kanan-Kiri)**.** Definisikan $\lim_{x\to c^+} f(x) = M$ sebagai nilai $f(x)$ akan semakin mendekati nilai M saat x dibuat sedekat mungkin dengan c di mana $x > c$. Di sisi lain, definisikan $\lim_{x\to c^-} f(x) = N$ sebagai nilai $f(x)$ akan semakin mendekati nilai N saat x dibuat sedekat mungkin dengan c di mana $x < c$.

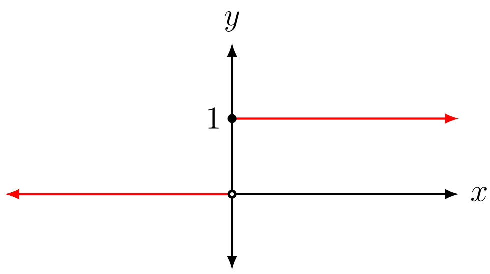
Contoh 1.3

Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan ketentuan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika} \quad x < 0 \\ 1 & \text{jika} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Tentukan $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ dan $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

Solusi. Akan ditentukan $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Ini berarti akan ditentukan pendekatan $f(x)$ ke suatu nilai tertentu, asalkan x sedekat mungkin dengan 0 dari **arah kiri**. Ini berarti didekati dengan aturan saat $x < 0$. Berdasarkan soal, $f(x) = 0$ untuk $x < 0$ yang berarti $\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0}$.
Akan ditentukan $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Ini berarti akan ditentukan pendekatan $f(x)$ ke suatu nilai tertentu, asalkan x sedekat mungkin dengan 0 dari **arah kanan**. Ini berarti didekati dengan aturan saat $x > 0$. Berdasarkan soal, $f(x) = 1$ untuk $x > 0$ yang berarti $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1}$.



▼

Teorema 1.4: Eksistensi Limit

Diberikan fungsi $f(x)$, jika $\lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x)$, maka $\lim_{x\to c} f(x)$ ada dan $\lim_{x\to c} f(x) = L$. Sebaliknya, jika $\lim_{x\to c} f(x) = L$ maka $\lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x)$.

Dari **Teorema 1.3** apabila $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$, ini menunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} f(x)$ tidak ada.

Contoh 1.5

Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan ketentuan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika} \quad x < 0 \\ 1 & \text{jika} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Periksa apakah $\lim_{x\to 0} f(x)$ ada, jika ada maka tentukan nilainya.

Solusi. Dari **Contoh 1.3** diperoleh $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ dan $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ yang menunjukkan $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Jadi, $\lim_{x\to 0} f(x)$ $\boxed{\text{tidak ada}}$. ▼

§1.2. Sifat-Sifat Limit

Teorema 1.6: Teorema Utama pada Limit

Misalkan n bilangan asli, k suatu konstan, serta f dan g **memiliki limit** di c, misalkan $\lim_{x\to c} f(x) = A$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = B$. Maka:

(a). $\lim_{x\to c} k = k$.

(b). $\lim_{x\to c} x = c$.

(c). $\lim_{x\to c} kf(x) = k \lim_{x\to c} f(x) = kA$.

(d). $\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = A + B$.

(e). $\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = A - B$.

(f). $\lim_{x\to c} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim_{x\to c} g(x)\right) = AB$.

(g). $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ asalkan $B \neq 0$.

(h). $\lim_{x\to c} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n = A^n$.

(i). $\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)} = \sqrt[n]{A}$ asalkan $A > 0$ saat n bilangan genap.

Definisi 1.7 (Fungsi Polinomial)**.** Fungsi polinomial memiliki bentuk umum

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

di mana $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ suatu konstanta.

Definisi 1.8 (Fungsi Rasional)**.** Fungsi rasional memiliki bentuk umum

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

di mana $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \cdots, b_1, b_0$ merupakan suatu konstanta.

Teorema 1.9: Teorema Substitusi

Diketahui f merupakan suatu fungsi polinomial atau fungsi rasional dan c suatu konstan. Jika $f(c)$ terdefinisi, maka $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Contoh 1.10

Tentukan masing-masing limit berikut.

(a). $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x-1+\dfrac{2x+10}{x-4}\right)$.

(b). $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x-1\right)^2(3-x)$.

(c). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

(d). $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}\right)$.

Solusi.

(a). Perhatikan bahwa $2x-1$ merupakan fungsi polinomial dan $\dfrac{2x+10}{x-4}$ merupakan fungsi rasional yang terdefinisi saat $x=1$. Jadi, $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=2(1)-1=1$ dan $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+10}{x-4}=\dfrac{2+10}{1-5}=\dfrac{12}{-4}=-3$. Karena $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)$ dan $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+10}{x-4}$ masing-masing ada, maka syarat pada **Teorema 1.6** telah terpenuhi. Dari **Teorema 1.6 (d)** berlaku

$$\lim_{x\to 1}\left(2x-1+\frac{2x+10}{x-4}\right)=\lim_{x\to 1}(2x-1)+\lim_{x\to 1}\frac{2x+10}{x-4}=1+(-3)=\boxed{-2}.$$

(b). Perhatikan bahwa x^2+2x-1 dan $3-x$ masing-masing merupakan fungsi polinomial yang terdefinisi di $x=2$. Jadi, $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x-1\right)$ dan $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)$ masing-maing ada di mana $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x-1\right)=2^2+2(2)-1=7$ dan $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)=1$. Ini berarti syarat pada **Teorema 1.6** telah terpenuhi, kemudian dari **Teorema (f), (h)** berlaku

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x-1\right)^2(3-x) &= \left(\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x-1\right)^2\right)\left(\lim_{x\to 2}(3-x)\right) && \text{(sifat f)}\\
&= \left(\lim_{x\to 2}\left(x^2+2x-1\right)\right)^2\left(\lim_{x\to 2}(3-x)\right) && \text{(sifat h)}\\
&= (7)^2(1)\\
&= \boxed{49}.
\end{aligned}$$

(c). Perhatikan bahwa x^2-4 dan $x-2$ masing-masing merupakan fungsi polinomial, namun tidak terdefinisi di $x=2$ karena $\dfrac{2^2-4}{2-2}=\dfrac{0}{0}$. Oleh karena itu, perlu dilakukan manipulasi aljabar. Memanfaatkan sifat $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, diperoleh

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{x^2-2^2}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2.$$

Jadi, dalam hal ini $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)$. Karena $x+2$ merupakan fungsi polinomial yang terdefinisi di $x=2$, maka $\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=\boxed{4}$.

(d). Salah satu kesalahan yang umum dilakukan dalam mengerjakan soal ini adalah sebagai berikut.

Metode Sesat

Perhatikan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-2} = -1$ dan $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$. Maka

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-2} + \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = -1 + \infty = \infty.$$

Perhatikan bahwa sifat $\lim\limits_{x \to 1} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) + \lim\limits_{x \to 1} g(x)$ jika $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ masing-masing ada nilainya (lihat syarat **Teorema 1.6**).

Perhatikan bahwa

$$p(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)+(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}.$$

Akan ditentukan $\lim\limits_{x \to 1^-} p(x)$ dan $\lim\limits_{x \to 1^+} p(x)$. Pertama, akan diperlihatkan terlebih dahulu untuk $\lim\limits_{x \to 1^-} p(x)$. Perhatikan bahwa untuk x sedekat mungkin dengan 1 dan $x < 1$, maka $2x - 3 < 0$, $x - 2 < 0$, dan $x - 1 < 0$. Ini berarti $\lim\limits_{x \to 1^-} p(x) = -\infty$. Karena $\lim\limits_{x \to 1^-} p(x)$ tidak ada, dari sini dapat disimpulkan bahwa $\lim\limits_{x \to 1} p(x)$ $\boxed{\text{tidak ada}}$.

▼

Teorema 1.11: Limit Fungsi Trigonometri

Jika c suatu bilangan real asalkan c berada di domain masing-masing fungsi berikut, maka

(a). $\lim\limits_{x \to c} \sin(x) = \sin(c)$.

(b). $\lim\limits_{x \to c} \cos(x) = \cos(c)$.

(c). $\lim\limits_{x \to c} \tan(x) = \tan(c)$.

(d). $\lim\limits_{x \to c} \cot(x) = \cot(c)$.

(e). $\lim\limits_{x \to c} \sec(x) = \sec(c)$.

(f). $\lim\limits_{x \to c} \operatorname{cosec}(x) = \operatorname{cosec}(c)$.

Contoh 1.12

Tentukan nilai dari masing-masing limit berikut.

(a). $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x)$.

(b). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2(x)}{1 + \sin(x)}$.

Solusi.

(a). Perhatikan bahwa $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dan $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Karena $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin(x)$ dan $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos(x)$ masing-masing ada, menurut **Teorema 1.6 (f)** berlaku

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x) = \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin(x) \right) \left(\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos(x) \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(b). Perhatikan bahwa $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$, $\lim_{x\to 0}\sin(x) = 0$, dan $\lim_{x\to 0} 1 = 1$. Dari **Teorema 1.6 (d)** berlaku $\lim_{x\to 0}(1+\sin(x)) = \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0}\sin(x) = 1 + 0 = 1$. Dari **Teorema 1.6 (g), (h)**, maka

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)}{1+\sin(x)} = \frac{\lim_{x\to 0}\cos^2(x)}{\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))} = \frac{(\lim_{x\to 0}\cos(x))^2}{1} = \frac{1^2}{1} = \boxed{1}.$$

▼

Teorema 1.13: Teorema Apit

Diketahui f, g, dan h suatu fungsi yang memenuhi $f(x) \le g(x) \le h(x)$ untuk setiap x yang dekat dengan c, namun berbeda dengan c. Jika $\lim_{x\to c} f(x) = L = \lim_{x\to c} h(x)$, maka $\lim_{x\to c} g(x) = L$.

Teorema apit biasanya digunakan untuk fungsi-fungsi yang terbatas, seperti fungsi trigonometri sin dan cos mengingat $-1 \le \sin(x), \cos(x) \le 1$.

Contoh 1.14

Tentukan $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solusi. Perhatikan bahwa $-1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$. Karena $x^2 \ge 0$, maka $-x^2 \le \lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$. Karena $\lim_{x\to 0}\left(-x^2\right) = 0 = \lim_{x\to 0} x^2$, berdasarkan **Teorema 1.11** berlaku $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{0}$.
▼

Teorema 1.15

Memanfaatkan **Teorema 1.13**, berlaku $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Teorema 1.16: Keunikan Nilai Limit

Jika $\lim_{x\to c} f(x)$ ada serta berlaku $\lim_{x\to c} f(x) = A$ dan $\lim_{x\to c} f(x) = B$, maka $A = B$.

§1.3. Limit Tak Hingga

Teorema 1.17

Untuk setiap bilangan rasional positif k berlaku $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^k} = 0$.

Contoh 1.18

Tentukan $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^3+1}$, dan $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}$.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}.$$

Karena $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1+0-0 = 1$ dan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1-0 = 1$. Ini berarti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1} = \boxed{1}.$$

Dengan cara yang sama,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}.$$

Mengingat $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) = 0-0 = 0$ dan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right) = 1+0 = 1$. Ini berarti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{0}{1} = \boxed{0}.$$

Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

Karena $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1+0 = 1$ dan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 0$, ini berarti $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \infty$ yang berarti nilai limitnya $\boxed{\text{tidak ada}}$. ▼

Contoh 1.19

Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$.

Solusi. Akan digunakan sifat $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x+1} &= \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x+1}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x+1}} \\
&= \frac{(x^2+2x)-(x^2-3x+1)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x+1}} \\
&= \frac{x^2+2x-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x+1}} \\
&= \frac{5x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x+1}} \\
&= \frac{5-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}.
\end{aligned}$$

Karena

$$\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x}\right) = 5-0 = 5,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = 1+0 = 1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 1-0+0 = 1,$$

dari sini diperoleh

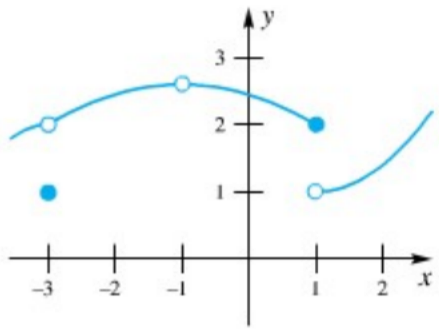
$$\lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{5}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \boxed{\frac{5}{2}}.$$

▼

§2. Latihan Soal

Standar

1. Grafik dari fungsi $y = f(x)$ tertera sebagaimana gambar berikut.



Tentukan manakah limit atau fungsi berikut yang memiliki nilai. Jika ada, tentukan nilainya.

(a). $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

(b). $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

(c). $f(0)$.

(d). $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

(e). $f(1)$.

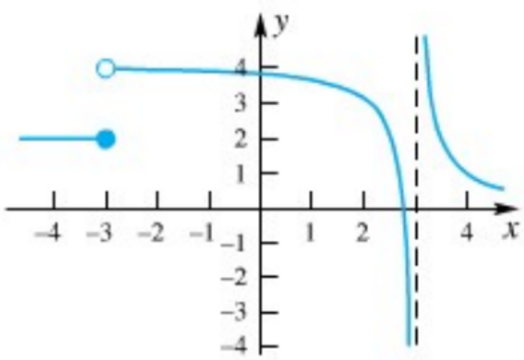
(f). $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

(g). $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

(h). $f(-1)$.

(i). $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

2. Grafik dari fungsi $y = f(x)$ tertera sebagaimana gambar berikut.



Tentukan manakah limit atau fungsi berikut yang memiliki nilai. Jika ada, tentukan nilainya.

(a). $f(-2)$.

(b). $f(-3)$.

(c). $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

(d). $f(3)$.

(e). $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

(f). $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$.

(g). $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

(h). $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

(i). $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

3. Diberikan
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{jika} \quad x < 0 \\ x & \text{jika} \quad 0 \le x < 1 \\ 1+x & \text{jika} \quad x \ge 1 \end{cases}.$$
Tentukan manakah nilai limit atau fungsi berikut yang memiliki nilai.
   (a) $f(0)$.
   (b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
   (c) $f(3)$.
   (d) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.
   (e) $\lim_{x\to 1} f(x)$.
   (f) $\lim_{x\to 0} f(x)$.
   (g) $\lim_{x\to -1} f(x)$.
   (h) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

4. Definisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x di mana x bilangan real. Sebagai contoh, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 5,23 \rfloor = 5$, dan $\lfloor -\pi \rfloor = -4$. Periksa apakah $\lim_{x\to 0} \lfloor x \rfloor$ dan $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \lfloor x \rfloor$ memiliki nilai limit atau tidak.

5. Periksa apakah $\lim_{x\to 1} \frac{|x|}{x}$ dan $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ ada atau tidak. Jika ada, tentukan nilainya.

6. Diketahui $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ dan $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$. Tentukan:
   (a). $\lim_{x\to 1}(f(x) + 2g(x))$.
   (b). $\lim_{x\to 1}(2f(x) - 3g(x))$.
   (c). $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}$.
   (d). $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}\right)$.

7. Tentukan nilai limit berikut (jika ada).
   (a). $\lim_{x\to 0} \left(x + \frac{1}{x}\right)$.
   (b). $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\right)^3$.
   (c). $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2} + \frac{x-3}{x^2-4}\right)$.
   (d). $\lim_{x\to 2} \frac{x+2x^2}{\sqrt{x}-2}$.
   (e). $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x^3+x^2+x-1}{2x-1}$.
   (f). $\lim_{x\to 1} \sqrt{1 + \frac{x^3-1}{x-1}}$.

8. Tentukan nilai limit berikut (jika ada).
   (a). $\lim_{x\to 0} \tan(x)$.
   (b). $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$.
   (c). $\lim_{x\to -\frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sqrt{\tan^2(x)+1}}$.
   (d). $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}$.
   (e). $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)+1}{\sec(x)+\sin(x)}$.
   (f). $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)}{\sin(x)}$.

9. Tentukan nilai limit berikut (jika ada).

(a). $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}$.

(b). $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(9x)}{x^2\cos(x)}$.

(c). $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\operatorname{cosec}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

(d). $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$.

(e). $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3(x)}$.

(f). $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{4x-\pi+4\sin(x)}$.

10. Tentukan nilai limit berikut (jika ada).

(a). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x+1}$.

(b). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-x^2+8x}{-5x^4+7}$.

(c). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}-7}$.

(d). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}$.

(e). $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^6+4x^2}{1-5x^3}$.

(f). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^2+x+8}{\sqrt{7x^4+x^2+6}}$.

11. Tentukan nilai limit berikut (jika ada).

(a). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+4x-1}\right)$.

(b). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-\sqrt{4x^2+1}\right)$.

(c). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{4x^2+6x-1}\right)$.

(d). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+3x^3-2x^2}-\sqrt{x^4+2x^2}}{x-1}$.

12. Tentukan nilai limit berikut (jika ada).

(a). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x-x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

(c). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\tan^2\left(\frac{2}{x}\right)\sec\left(\frac{1}{x}\right)$.

(d). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x\sin\left(\frac{3}{x}\right)}$.

13. Tentukan nilai limit berikut (jika ada).

(a). $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^4\cos\left(\frac{2}{x}\right)$.

(b). $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-\sin(3x)}{x^2+10}$.

(c). $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^3\cos\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$.

(d). $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin(x)}{x+\cos(x)}$.

14. Buktikan bahwa

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{px^2+qx+r}\right)=\begin{cases}\infty & \text{jika} \quad a>p\\ \dfrac{b-q}{2\sqrt{a}} & \text{jika} \quad a=p\\ -\infty & \text{jika} \quad a<p\end{cases}.$$

Sulit Dikit Ga Ngaruh

15. Jika a dan b menyatakan suatu bilangan real yang memenuhi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ax^2+bx-1}{x^2-1} = \dfrac{3}{2}$, tentukan nilai a dan b.

16. (SadharCaIL 2021) Jika limit fungsi $f(x)$ di bawah ini ada untuk $x = 0$ dan $x = 2$ di mana
$$f(x) = \begin{cases} 2b & \text{jika} \quad x < 0 \\ 0 & \text{jika} \quad x = 0 \\ bx^2 + c & \text{jika} \quad 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{x^3-8}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} & \text{jika} \quad x > 2 \end{cases}.$$
Tentukan nilai dari $b + c$.

17. (Mission 2022) Tentukan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left((2n+1)\pi\sqrt{2}\right) - \sin\left(\pi\sqrt{2}\right)}{2n\sin\left(\pi\sqrt{2}\right)}$.

18. Tentukan
$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+5x-1} - \sqrt[3]{x^3-5x^2+4x-1}\right).$$

19. (JEE) Tentukan $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi\cos^2(x))}{x^2}$.

20. (JEE) Definisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atam sana dengan x. Jika suatu bilangan real $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ memenuhi
$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{1-x+|x|}{\lambda - x + \lfloor x \rfloor} \right| = L$$
di mana L suatu bilangan real L, tentukan nilai L.