Responsi Kalkulus I D 2023/2024

Departemen Matematika Universitas Brawijaya

Dosen Pengampu:

Corina Karim, S.Si.,M.Si.,Ph.D

Asisten:

Wildan Bagus Wicaksono

Yehezkiel Gibrael Dativa Garin

Zahra Nazila Annisa

Pertidaksamaan

Ringkasan

Modul ini akan membahas **secara ringkas** tentang pertidaksamaan: pertidaksamaan linear, pertidaksamaan bilinear, pertidaksamaan kuadrat, pertidaksamaan polinom, pertidaksamaan nilai mutlak, dan pertidaksamaan campuran. Perlu diingat bahwa modul ini **jangan dijadikan patokan untuk belajar** karena hanya sebagai ringkasan. Lebih baik Anda membaca terlebih dahulu versi lengkapnya pada referensi tertentu, seperti buku oleh cak Purcell atau cak Thomas. Sebagai latihan tambahan, contoh soal dapat dicoba terlebih dahulu hingga benar-benar menyerah (atau sudah selesai). Jika tidak berhasil menyelesaikannya, maka ikuti alurnya dan **jangan sekedar dibaca**, namun sambil menulis seakan dikerjakan sendiri.

§1. Review Dulu

Sebelum ke bagian masing-masing pertidaksamaan, perlu diperhatikan beberapa sifat dalam pertidaksamaan di bilangan real, yakni sebagai berikut.

Teorema 1.1: Sifat Pertidaksamaan

Diberikan a, b, c, dan d bilangan real.

(a). Jika $a < b$, maka $a + c < b + c$ dan $a - c < b - c$.

(b). Jika $a < b$ dan $c < d$, maka $a + c < b + d$.

(c). Jika $a < b$ dan $c > 0$, maka $ac < bc$.

(d). Jika $a < b$ dan $c < 0$, maka $ac > bc$.

(e). Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $\frac{a}{b} > 0$.

(f). Jika $0 < a < b$, maka $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

(g). Jika $b < a < 0$, maka $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

(h). Jika $0 < b < a$, maka $b^2 < a^2$. Jika $a < b < 0$, maka $b^2 < a^2$.

Tanda $<$ dapat diganti dengan $\leq$ kecuali sifat (f) dan (g).

§1.1. Pertidaksamaan Linear

Pertidaksamaan linear memiliki bentuk umum

$$ax + b \geq p, \quad ax + b > p, \quad ax + b \leq p, \quad ax + b < p$$

di mana a, b, dan p merupakan suatu konstan di mana $a \neq 0$. Pertidaksamaan jenis ini cukup mudah untuk diselesaikan menggunakan sifat-sifat di pada **Teorema 1.1**.

Contoh 1.2

Tentukan himpunan penyelesaian x yang memenuhi $2 + 3x \geq -13$, kemudian tuliskan juga penyelesaiannya dalam bentuk interval.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
2 + 3x &\geq -13 \\
3x &\geq -13 - 2 && \text{(kurangkan kedua ruas dengan 2)} \\
3x &\geq -15 \\
x &\geq \frac{-15}{3} && \text{(bagi kedua ruas dengan 3, ingat bahwa } 3 > 0\text{)} \\
x &\geq -5.
\end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesainnya adalah $\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}}$, dan apabila dituliskan dalam bentuk interval penyelesaiannya adalah $\boxed{x \in [-5, \infty)}$. ▼

Contoh 1.3

Tentukan himpunan penyelesaian x yang memenuhi $2 + x < 2 + 6x \leq 20$ dan tuliskan juga penyelesaiannya dalam bentuk interval.

Solusi. Pertidaksamaan tersebut harus memenuhi dua syarat, yaitu $2 + x < 2 + 6x$ dan $2 + 6x \leq 20$.

- Akan diselesaikan $2 + x < 2 + 6x$.

$$\begin{aligned}
2 + x &< 2 + 6x && \text{(kurangkan kedua ruas dengan } 2 + x\text{)} \\
0 &< 5x \\
0 &< x. && \text{(bagi kedua ruas dengan 5)}
\end{aligned}$$

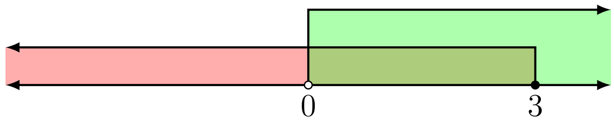
  Jadi, syarat pertama yang harus dipenuhi adalah $x > 0$.

- Akan diselesaikan $2 + 6x \leq 20$.

$$\begin{aligned}
2 + 6x &\leq 20 \\
6x &\leq 20 - 2 && \text{(kurangkan kedua ruas dengan 2)} \\
6x &\leq 18 \\
x &\leq 3. && \text{(bagi kedua ruas dengan 6)}
\end{aligned}$$

  Jadi, syarat kedua yang harus dipenuhi adalah $x \leq 3$.

Jadi, ada dua syarat yang harus dipenuhi, yaitu $x > 0$ dan $x \leq 3$. Dengan membuat garis bilangan dan plot penyelesaian pertidaksamaan, diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah $\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 3\}}$, sedangkan penyelesaian dalam bentuk interval berupa $\boxed{x \in (0, 3]}$.



§1.2. Pertidaksamaan Bilinear

Pertidaksamaan bilinear memiliki bentuk umum

$$\frac{ax+b}{cx+d} \geq p, \quad \frac{ax+b}{cx+d} > p, \quad \frac{ax+b}{cx+d} \leq p, \quad \frac{ax+b}{cx+d} < p$$

dengan syarat $cx+d \neq 0$. Berbeda dengan sebelumnya, untuk menyelesaikan pertidaksamaan bilinear harus menggunakan garis bilangan dengan menentukan titik pemecahnya terlebih dahulu.

Menyelesaikan Pertidaksamaan Bilinear

Misalkan dalam soal diberikan pertidaksamaan $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq p$. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Jadikan dalam satu ruas dengan meninjau $\dfrac{ax+b}{cx+d} - p \geq 0$ dan jadikan dalam bentuk $\dfrac{mx+n}{cx+d} \geq 0$. **Dilarang keras untuk mengalikan kedua ruas dengan $\boldsymbol{cx+d}$.** Hal ini dikarenakan $cx+d$ dapat bernilai positif atau negatif yang mana jika mengalikan kedua ruas pertidaksamaan dengan $cx+d$ tanda pertidaksamaan dapat tetap atau berubah.

2. Tentukan titik pemecah interval dalam pertidaksamaan, yaitu dengan meninjau saat $mx+n=0$ dan $cx+d=0$. Diperoleh $x_1 = -\dfrac{n}{m}$ dan $x_2 = -\dfrac{d}{c}$.

3. Plot garis bilangan dengan titik pemecah x_1 dan x_2. Kemudian, tentukan positif-negatif masing-masing daerah yang terbagi oleh titik-titik pemecah tersebut.

4. Tentukan daerah yang sesuai dengan yang diminta pada soal (tanda $\geq$ dapat diganti dengan $>$, $\leq$, atau $<$).

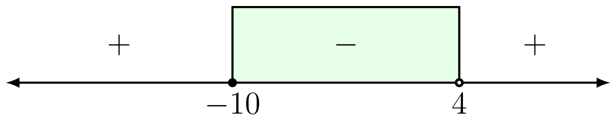
Contoh 1.4

Tentukan himpunan penyelesaian x yang memenuhi $\dfrac{2+3x}{x-4} \leq 2$ dan tuliskan juga penyelesaiannya dalam bentuk interval.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$0 \geq \frac{2+3x}{x-4} - 2 = \frac{2+3x-2(x-4)}{x-4} = \frac{2+3x-2x+8}{x-4} = \frac{x+10}{x-4} \implies \frac{x+10}{x-4} \leq 0.$$

Perhatikan bahwa titik pemecahnya adalah $x + 10 = 0 \implies x = -10$ dan $x - 4 = 0 \implies x = 4$. Kemudian, plot dalam garis bilangan dan diperoleh penyelesaiannya adalah $\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid -10 \leq x < 4\}}$, dapat dituliskan juga sebagai $\boxed{x \in [-10, 4)}$.



§1.3. Pertidaksamaan Kuadrat

Pertidaksamaan kuadrat memiliki bentuk umum

$$ax^2 + bx + c \geq d, \quad ax^2 + bx + c > d, \quad ax^2 + bx + c \leq d, \quad ax^2 + bx + c < d$$

di mana a, b, c, dan d bilangan real. Terkadang, pertidaksamaan yang diberikan dapat berupa

$$ax^2 + bx + c \geq d, \quad ax^2 + bx + c \geq dx + e, \quad ax^2 + bx + c \geq dx^2 + ex + f,$$

namun metode untuk menyelesaikannya sama saja. Metode untuk menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat tidak jauh berbeda dengan menyelesaikan menyelesaikan pertidaksamaan bilinear.

Menyelesaikan Pertidaksamaan Kuadrat

Misalkan dalam soal diberikan pertidaksamaan $ax^2 + bx + c \geq dx^2 + ex + f$. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Jadikan dalam satu ruas dengan meninjau $ax^2 + bx + c - dx^2 - ex - f \geq 0$, misalkan dapat disederhanakan menjadi $px^2 + qx + r \geq 0$.

2. Tentukan titik pemecah interval dalam pertidaksamaan, yaitu dengan meninjau penyelesaian $px^2 + qx + r = 0$. Penyelesaian dari persamaan tersebut dapat ditentukan dengan metode pemfaktoran, melengkapkan kuadrat, atau formula kuadratik ABC.

3. Misalkan penyelesaian x_1 dan x_2. Apabila x_1 dan x_2 merupakan bilangan real, masukkan titik pemecah pada plot dalam garis bilangan. Apabila x_1 dan x_2 bukan bilangan real, maka x_1 dan x_2 **tidak perlu (tidak dapat)** dimasukkan dalam titik pemecah garis bilangan.

4. Tentukan daerah positif-negatif berdasarkan titik pemecahnya.

5. Tentukan daerah yang sesuai dengan yang diminta pada soal (tanda $\geq$ dapat diganti dengan $>$, $\leq$, atau $<$).

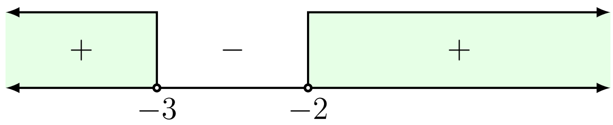
Contoh 1.5

Tentukan himpunan penyelesaian x yang memenuhi $x^2 + 9x + 7 > 4x + 1$ dan tuliskan penyelesaian dalam bentuk interval.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$0 < x^2 + 9x + 7 - (4x + 1) = x^2 + 9x + 7 - 4x - 1 = x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).$$

Jadi, $(x + 2)(x + 3) > 0$ yang berarti titik pemecahnya adalah $x + 2 = 0 \implies x = -2$ dan $x+3 = 0 \implies x = -3$. Plot titik pemecah dalam garis bilangan dan diperoleh penyelesaiannya adalah $\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \vee x > -2\}}$ yang dapat dituliskan sebagai $\boxed{x \in (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)}$.



▼

§1.4. Pertidaksamaan Polinomial

Pertidaksamaan polinomial merupakan kasus yang lebih umum dari pertidaksamaan kuadrat. Pada pertidaksamaan kuadrat merupakan pertidaksamaan polinomial yang berderajat 2. Sedangkan, pada bagian ini merupakan pertidaksamaan polinomial yang berderajat lebih tinggi. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan sama persis dengan pertidaksamaan kuadrat, perbedaannya hanya terletak pada banyak titik pemecahnya. Untuk menentukan titik pemecahnya dapat menggunakan metode pemfaktoran atau metode horner.

Contoh 1.6

Tentukan himpunan penyelesaian x yang memenuhi $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \leq 3x + 9$ dan tuliskan penyelesaian dalam bentuk interval.

Solusi. Perhatikan bahwa

$$0 \geq x^3 + 6x^2 + 11x + 6 - 3x - 9 = x^3 + 6x^2 + 8x - 3 \implies 0 \geq x^3 + 6x^2 + 8x - 3.$$

Untuk memfaktorkannya dapat menggunakan metode horner, diperoleh

$$0 \geq x^3 + 6x^2 + 8x - 3 = (x + 3)\left(x^2 + 3x - 1\right) \implies 0 \geq (x + 3)\left(x^2 + 3x - 1\right).$$

Diperoleh titik pemecah pertamanya adalah $x + 3 = 0 \implies x = -3$. Titik pemecah lainnya diperoleh dari penyelesaian $x^2 + 3x - 1 = 0$, dengan formula kuadratik ABC diperoleh

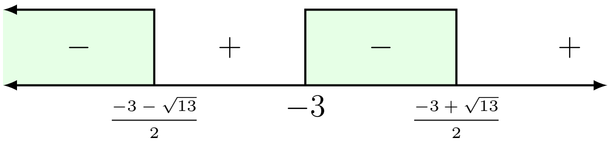
$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \implies x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \quad x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}.$$

Plot titik pemecah dalam garis bilangan

$$\boxed{\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \, x \leq \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \vee -3 \leq x \leq \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right\}}$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$\boxed{x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[-3, \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right]}.$$



§1.5. Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Sebeumnya, perlu diingat bahwa **nilai mutlak dari x**, yaitu $|x|$, didefinisikan sebagai

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{jika} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Sebelum memasuki tentang sifat pertidaksamaan nilai mutlak, perlu dibahas tentang sifat-sifat nilai mutlak.

Teorema 1.7: Sifat-Sifat Nilai Mutlak

Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku:

(a). $|x| = |-x|$.

(b). $|x|^2 = x^2$ dan $\sqrt{x^2} = |x|$.

(c). $|xy| = |x||y|$.

(d). $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ asalkan $y \neq 0$.

Pertidaksamaan nilai mutlak secara sederhana memiliki bentuk

$$a|x| + b \geq c, \quad a|x| + b > c, \quad a|x| + b \leq c, \quad a|x| + b < c$$

di mana a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$. Ada beberapa sifat dalam pertidaksamaan mutlak, diantaranya sebagai berikut.

Teorema 1.8: Sifat Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Diberikan a dan b bilangan real di mana $b \geq 0$.

(a). $|a| \geq 0$.

(b). Jika $|a| \leq b$, maka $-b \leq a \leq b$. Jika $|a| < b$, maka $-b < a < b$.

(c). Jika $|a| \geq b$, maka $a \geq b$ atau $a \leq -b$. Jika $|a| > b$, maka $a > b$ atau $a < -b$.

(d). Jika $|a| \geq |b|$, maka $a^2 \geq b^2$. Jika $|a| > |b|$, maka $a^2 > b^2$.

Namun, pertidaksamaan nilai mutlak cukup banyak model soal yang dapat disajikan. Oleh karena itu, permasalahan pertidaksamaan nilai mutlak bisa lebih mudah diselesaikan dengan memahami definisinya saja dan tidak direkomendasikan dengan menghafalkan **Teorema 1.3** saja.

Contoh 1.9

Tentukan penyelesaian masing-masing pertidaksamaan mutlak berikut.

1. $2|x| + 5 \leq 7$.
2. $|x+5|^2 - |x+5| - 2 \geq 0$.
3. $|x+2| \geq |2x-1|$.
4. $|2x-1| + |x+1| \geq 2$.

Solusi. Akan diselesaikan untuk masing-masing soal.

1. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2|x| + 5 &\leq 7 \\ 2|x| &\leq 2 && \text{(kurangkan kedua ruas dengan 5)} \\ |x| &\leq 1. && \text{(bagi kedua ruas dengan 2)} \end{aligned}$$

   Dari **Teorema 1.8**, diperoleh $\boxed{-1 \leq x \leq 1}$ atau $\boxed{x \in (-1, 1)}$.

2. Misalkan $k = |x+5|$, maka pertidaksamaan menjadi $0 \leq k^2 - k - 2 = (k-2)(k+1) \implies (k-2)(k+1) \geq 0$. Sebagaimana sebelumnya, dapat diperoleh penyelesaiannya adalah $k \leq -1$ atau $k \geq 2$. Jadi, $|x+5| \leq -1$ atau $|x+5| \geq 2$. Perhatikan bahwa $|x+5| \leq -1$ tidak mungkin karena berdasarkan **Teorema 1.8 (a)** berlaku $|x+5| \geq 0$. Sedangkan, untuk $|x+5| \geq 2$ diperoleh $x+5 \geq 2$ atau $x+5 \leq -2$ yang berarti $\boxed{x \leq -7 \vee x \geq -3}$ atau $\boxed{x \in (-\infty, -7] \cup [-3, \infty)}$.

3. Berdasarkan **Teorema 1.8 (d)**, maka $|x+2|^2 \geq |2x-1|^2 \implies (x+2)^2 \geq (2x-1)^2$.

Maka

$$0 \geq (2x-1)^2 - (x+2)^2 = \left(4x^2 - 4x + 1\right) - \left(x^2 + 4x + 4\right) = 3x^2 - 8x + 3$$

atau $0 \geq (3x+1)(x-3)$. Sebagaimana sebelumnya, diperoleh $\boxed{-\frac{1}{3} \leq x \leq 3}$ atau $\boxed{x \in \left[-\frac{1}{3}, 3\right]}$.

Tips. Untuk mempermudah pemfaktoran sebenarnya dapat menggunakan sifat $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

4. Tipe soal ini berbeda dengan sebelumnya dan akan diselesaikan dengan cara yang berbeda pula dengan contoh-contoh sebelumnya. Pada soal ini akan ditunjukkan metode menyelesaikan pertidaksamaan nilai mutlak menggunakan definisinya saja. Perhatikan bahwa

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{jika} \quad 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1) & \text{jika} \quad 2x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 & \text{jika} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ -2x+1 & \text{jika} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}, \tag{1.9.1}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{jika} \quad x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{jika} \quad x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{jika} \quad x \geq -1 \\ -x-1 & \text{jika} \quad x < -1 \end{cases}. \tag{1.9.2}$$

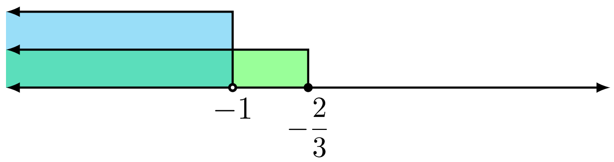
Plot $x = -1$ dan $x = \frac{1}{2}$ dalam garis bilangan, maka akan terbagi dalam interval (selang)

$$(-\infty, -1], \quad \left[-1, \frac{1}{2}\right), \quad \left[\frac{1}{2}, \infty\right).$$

- Jika $x < -1$, ini berarti $x < \frac{1}{2}$. Dari (1.9.1) dan (1.9.2), maka $|x+1| = -x-1$ dan $|2x-1| = -2x+1$. Substitusikan,

$$2 \leq |2x-1| + |x+1| = (-2x+1) + (-x-1) = -2x+1-x-1 = -3x \implies 2 \leq -3x.$$

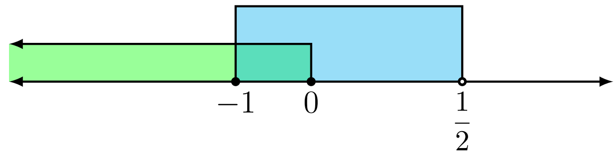
Maka $x \leq -\frac{2}{3}$. Jadi, syarat yang harus terpenuhi adalah $x < -1$ dan $x \leq -\frac{2}{3}$ yang dapat disimpulkan sebagai $x < -1$.



- Jika $-1 \leq x < \frac{1}{2}$, ini berarti $x \geq -1$ dan $x < \frac{1}{2}$. Dari (1.9.1) dan (1.9.2) diperoleh $|2x-1| = -2x+1$ dan $|x+1| = x+1$. Substitusikan,

$$2 \leq |2x-1| + |x+1| = (-2x+1) + (x+1) = -2x+1+x+1 = -x+2 \implies 2 \leq -x+2$$

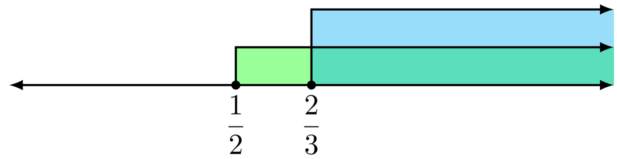
sehingga diperoleh $x \leq 0$. Jadi, syarat yang harus dipenuhi adalah $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ dan $x \leq 0$ yang dapat disimpulkan sebagai $-1 \leq x \leq 0$.



- Jika $x \geq \frac{1}{2}$, ini berarti $x \geq -1$. Dari (1.9.1) dan (1.9.2) diperoleh $|2x-1| = 2x-1$ dan $|x+1| = x+1$. Substitusikan,

$$2 \leq |2x-1| + |x+1| = 2x - 1 + x + 1 = 3x \implies 2 \leq 3x$$

sehingga $x \geq \frac{2}{3}$. Jadi, syarat yang harus dipenuhi adalah $x \geq \frac{1}{2}$ dan $x \geq \frac{2}{3}$ yang dapat disimpulkan sebagai $x \geq \frac{2}{3}$.



Dari ketiga kasus, dapat disimpulkan bahwa penyelesaiannya $x < -1 \vee -1 \leq x \leq 0 \vee x \geq \frac{2}{3}$ yang dapat dituliskan juga sebagai $\boxed{x \leq 0 \vee x \geq \frac{2}{3}}$ atau $\boxed{x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)}$.

§1.6. Pertidaksamaan Campuran

Pertidaksamaan campuran dapat melibatkan pertidaksamaan linear, bilinear, polinomial, dan nilai mutlak. Metode penyelesaiannya juga tidak berbeda sebagaimana yang dijelaskan sebelum-sebelumnya (cuman lebih brutal aja).

§2. Latihan Soal

Standar

Tentukan himpunan penyelesaian masing-masing pertidaksamaan berikut dan nyatakan juga penyelesaiannya dalam bentuk interval.

1. (a). $x - 7 < 2x - 5$.

   (b). $3x - 5 < 4x - 6$.

   (c). $\dfrac{x+4}{x-3} \leq 0$.

   (d). $x^2 - 5x - 6 > 0$.

   (e). $(x+2)(x-1)(x-3) > 0$.

   (f). $\dfrac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$.

2. (a). $\dfrac{3}{x+5} \geq 2$.

   (b). $\dfrac{x+2}{x} \leq \dfrac{x+3}{x-2}$.

(c). $\dfrac{x}{x+x^2} \geq \dfrac{x}{x^2-x}$.

(d). $\dfrac{3}{x} \leq \dfrac{3}{x+3}$.

(e). $\dfrac{x-1}{x+1} < 1$.

(f). $x \geq \sqrt{6-x}$.

(g). $\sqrt{x^2-4} \leq 3-x$.

(h). $\dfrac{x^2-2x-3}{x-2} < x+5$.

3. (a). $|2x-3| < 5$.

   (b). $|x-1| \geq 1$.

   (c). $2|x+3| - 1 > 4$.

   (d). $\left|\dfrac{x}{4} - 2\right| \geq 2$.

4. (a). $16 - x^2 \leq |x+4|$.

   (b). $\dfrac{|x+2|}{x-1} \geq 3$.

   (c). $\left|\dfrac{x^2}{4} - 10\right| < 6$.

   (d). $|2x+1| < 2 + |x+1|$.

   (e). $|x+1| < \dfrac{2}{x}$.

   (f). $|x-1| \leq 3 - |x|$.

   (g). $|x|^2 - 5|x| + 6 \leq 0$.

Sulit Dikit Ga Ngaruh

5. Tentukan selang interval saat grafik $y = x^3 + 11x^2 + 17x - 2$ terletak di atas grafik $y = 4x^2 + x - 14$.

6. Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 + |3x-1| \geq |x-1|$.