

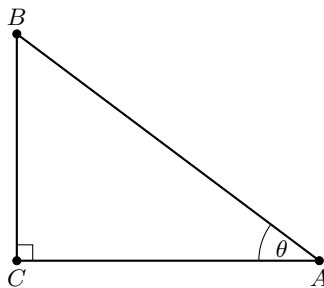
∞ BAB 6 ∞

Aturan Sinus dan Aturan Cosinus

Pada Bagian I, telah dibahas bagaimana menentukan suatu panjang sisi melalui kesebangunan atau kekongruenan dua segitiga. Selain itu, berdasarkan Lema 2.10 dan Lema 2.11 telah disinggung bagaimana rasio sisi-sisi segitiga dengan sudut-sudut 45° - 45° - 90° dan 30° - 60° - 90° . Pada bab ini, akan dibahas lebih dalam mengenai hubungan panjang sisi segitiga dengan suatu sudut yang besarnya lebih beragam.

6.1 Fungsi Trigonometri

Definisi 6.1 (Fungsi Trigonometri). Diberikan segitiga siku-siku ABC yang memenuhi $\angle ACB = 90^\circ$ dan $\angle BAC = \theta$.



Gambar 6.1A Hubungan segitiga siku-siku dengan fungsi trigonometri

Didefinisikan fungsi sin dan cos sebagai

$$\sin \theta = \frac{BC}{AB} \quad \text{dan} \quad \cos \theta = \frac{AC}{AB}.$$

Didefinisikan pula fungsi $\tan$ (dibaca “tangent”), $\cot$ (dibaca “cotangent”), $\sec$ (dibaca “secant”), dan $\csc$ atau cosec (dibaca “cosecant”) sebagai

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}.$$

Pada segitiga siku-siku ABC , pendefinisian $\sin$ dan $\cos$ dapat dengan mudah ditingkat sebagai

$$\sin = \frac{\text{depan}}{\text{miring}} \quad \text{dan} \quad \cos = \frac{\text{samping}}{\text{miring}}.$$

Perhatikan Gambar 6.1A. Sisi miring $\triangle ABC$ adalah AB . Sisi yang berada di depan dan di samping dari $\angle BAC = \theta$ berturut-turut BC dan AC . Jadi,

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{BC}{AB}, \quad \cos \theta = \frac{AC}{AB}, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{BC}{AC}, \\ \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} = \frac{AB}{AC}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{AB}{BC}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{AC}{BC}. \end{aligned}$$

Sekarang, misalkan $\theta = 45^\circ$. Kita punya $\angle ABC = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$. Dari Lema 2.10, berlaku perbandingan $BC : CA : AB = 1 : 1 : \sqrt{2}$. Kita dapatkan

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{dan} \quad \cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Selain itu, kita juga punya

$$\begin{aligned} \tan 45^\circ &= \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1, \quad \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}, \\ \csc 45^\circ &= \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}, \quad \cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1. \end{aligned}$$

Sekarang, misalkan $\theta = 30^\circ$. Kita punya $\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Dari Lema 2.11, kita punya perbandingan $BC : CA : AB = 1 : \sqrt{3} : 2$. Dari sini diperoleh

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Dari sini kita bisa menemukan nilai fungsi $\tan$, $\cot$, $\sec$, dan $\csc$ menggunakan nilai-nilai di atas. Tinjau $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ dan $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$. Apakah sebuah kebetulan $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ dan $\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$? Cobalah untuk menjawab pertanyaan ini menggunakan Definisi 6.1.

Latihan Akhir Subbab

Latihan 6.2. Berdasarkan Gambar 6.1A, buktikan bahwa

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta, \quad \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta.$$

6.2 Jumlahan Sudut pada Fungsi Trigonometri

Pada bagian sebelumnya kita telah melihat nilai-nilai fungsi trigonometri pada sudut 30° , 45° , dan 60° . Tabel 6.2A merupakan beberapa nilai dari $\sin \theta$, $\cos \theta$, dan $\tan \theta$ yang perlu diingat. Nilai-nilai θ pada tabel tersebut dapat digunakan untuk menemukan $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ untuk θ selain yang tercantum pada tabel menggunakan identitas-identitas yang akan dijelaskan pada bagian selanjutnya. Nilai $\tan \theta$ tidak perlu dihafalkan, cukup mengingat nilai $\sin \theta$ dan $\cos \theta$ karena nilai $\tan \theta$ dapat ditentukan dengan $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Tidak terdefinisi	0	Tidak terdefinisi	0

Tabel 6.2A Nilai sudut-sudut istimewa pada fungsi trigonometri $\sin$, $\cos$, dan $\tan$

Bagaimana untuk mengetahui nilai-nilai $\sin 120^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\cos 75^\circ$, dan lain-lain? Kita akan memerlukan sifat-sifat berikut.

Teorema 6.3 (Jumlah-Kurang Fungsi Trigonometri). *Jika x dan y bilangan real, berlaku*

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}.$$

Menggunakan ini kita dapat menjawab tiga pertanyaan sebelumnya.

Contoh 6.4. Pilih $x = 90^\circ$ dan $y = 30^\circ$, diperoleh

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ &= \sin(90^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin(90^\circ) \cos(30^\circ) + \cos(90^\circ) \sin(30^\circ) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Contoh 6.5. Pilih $x = 180^\circ$ dan $y = 30^\circ$, diperoleh

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(180^\circ) \cos(30^\circ) + \sin(180^\circ) \sin(30^\circ) \\
&= (-1) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\
&= -\frac{1}{2} \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Contoh 6.6. Pilih $x = 45^\circ$ dan $y = 30^\circ$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\tan 75^\circ &= \tan(45^\circ + 30^\circ) \\
&= \frac{\tan(45^\circ) + \tan(30^\circ)}{1 - \tan(45^\circ) \tan(30^\circ)} \\
&= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \\
&= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \\
&= 2 + \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Menggunakan Teorema 6.3, kita dapat menurunkan banyak sekali sifat-sifat pada trigonometri. Sifat-sifat ini dapat dilihat pada Proposisi 6.7, Latihan 6.8, dan Latihan 6.9.

Proposisi 6.7. Jika x bilangan real, berlaku

$$\sin(90^\circ \pm x) = \cos(x), \quad \cos(90^\circ \pm x) = \mp \sin(x).$$

Bukti. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\sin(90^\circ \pm x) &= \sin(90^\circ) \cos(x) \pm \cos(90^\circ) \sin(x) \\
&= 1 \cdot \cos(x) \pm 0 \cdot \sin(x) \\
&= \cos(x).
\end{aligned}$$

Selain itu, diperoleh

$$\begin{aligned}
\cos(90^\circ \pm x) &= \cos(90^\circ) \cos(x) \mp \sin(90^\circ) \sin(x) \\
&= 0 \cdot \cos(x) \mp 1 \cdot \sin(x) \\
&= \mp \sin(x)
\end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan. □

Latihan Akhir Subbab

Gunakan Teorema 6.3 untuk mengecek kebenaran sifat-sifat berikut. Sifat-sifat ini akan sering digunakan nantinya.

Latihan 6.8. Misalkan x bilangan real. Buktikan bahwa:

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ \pm x) &= \mp \sin(x), & \cos(180^\circ \pm x) &= -\cos(x), \\ \sin(360^\circ \pm x) &= \pm \sin(x), & \cos(360^\circ \pm x) &= \cos(x), \\ \tan(90^\circ \pm x) &= \mp \cot(x), & \tan(180^\circ \pm x) &= \pm \tan(x).\end{aligned}$$

Latihan 6.9. Misalkan x bilangan real. Buktikan bahwa

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x), \quad \tan(-x) = -\tan(x).$$

6.3 Kuadran dan Kesamaan Fungsi Trigonometri

Berdasarkan Proposisi 6.7 dan Latihan 6.8, kita bisa melihat bahwa ada cara untuk mengaitkan antara fungsi sin dan cos. Ada cara lain yang dapat kita gunakan untuk mengaitkan sin dan cos.

Teorema 6.10 (Jumlah Kuadrat Fungsi Sin dan Cos). *Jika x bilangan real, berlaku*

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Bukti. Jika x tidak memenuhi $0^\circ < x < 90^\circ$, kita dapat memanfaatkan sifat

$$\sin(90^\circ \pm x) = \cos(x) \quad \text{dan} \quad \cos(90^\circ \pm x) = \mp \sin(x)$$

sehingga berakibat

$$\sin^2(90^\circ \pm x) + \cos^2(90^\circ \pm x) = \sin^2(x) + \cos^2(x).$$

Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $0^\circ < x < 90^\circ$. Konstruksi segitiga siku-siku ABC dengan $\angle C = 90^\circ$ dan $\angle A = x$. Dari Teorema Pythagoras berlaku $AB^2 = BC^2 + AC^2$. Diperoleh

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

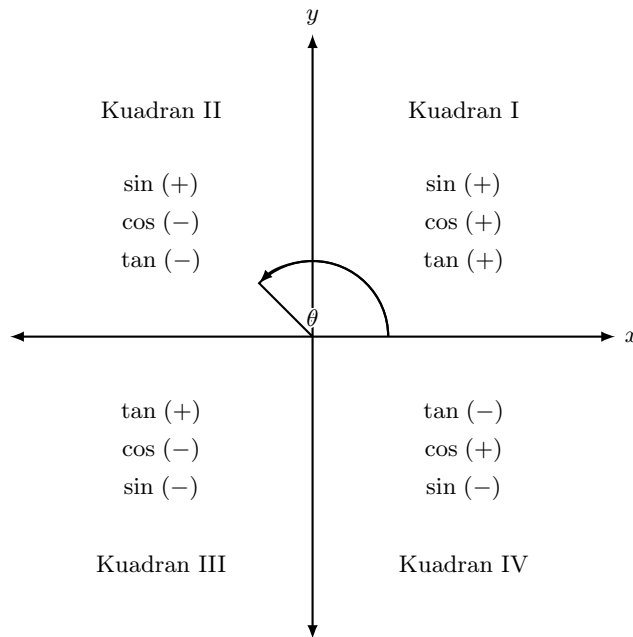
seperti yang ingin dibuktikan. □

Dari Contoh 6.5, kita punya $\cos 150^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Menggunakan ini,

$$1 = \sin^2(150^\circ) + \cos^2(150^\circ) = \sin^2(150^\circ) + \frac{3}{4} \implies \sin^2(150^\circ) = \frac{1}{4}.$$

Jadi, $\sin 150^\circ = \pm \frac{1}{2}$. Namun, manakah yang menjadi nilai dari $\sin 150^\circ$, $\frac{1}{2}$ atau $-\frac{1}{2}$? Di sini kita harus memahami kapan fungsi trigonometri bernilai positif atau negatif bergantung pada besar sudutnya.

Pembagian daerah pada koordinat Kartesius dua dimensi disebut dengan **kuadr-an**. Kuadran terdiri dari empat daerah: Kuadran I, Kuadran II, Kuadran III, dan Kuadran IV seperti pada Gambar 6.3A. Kuadran I melibatkan sumbu- x positif dan sumbu- y positif, Kuadran II melibatkan sumbu- x negatif dan sumbu- y positif, Kuadran III melibatkan sumbu- x negatif dan sumbu- y negatif, dan Kuadran IV melibatkan sumbu- x positif dan sumbu- y negatif. Sudut θ diukur dari sumbu- x positif.



Gambar 6.3A Menentukan tanda untuk sin, cos, dan tan

Nilai θ apabila dikaitkan dengan keempat kuadran dideskripsikan sebagai berikut:

- (a) Kuadran I untuk $0^\circ < \theta < 90^\circ$.
- (b) Kuadran II untuk $90^\circ < \theta < 180^\circ$.
- (c) Kuadran III untuk $180^\circ < \theta < 270^\circ$.
- (d) Kuadran IV untuk $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

Perhatikan bahwa $90^\circ < 150^\circ < 180^\circ$ yang artinya $\theta = 150^\circ$ berada di Kuadran II. Oleh karena itu, $\sin 150^\circ$ bernilai positif yang berarti $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$.

Misalkan kita ingin menentukan semua nilai x yang memenuhi $\sin(x) = \frac{1}{2}$. Perhatikan bahwa $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ sehingga $x = 30^\circ$ merupakan penyelesaian. Selain itu, $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ sehingga $x = 150^\circ$ juga penyelesaian. Masih ada banyak penyelesaian

lainnya. Namun, bagaimana untuk menyelesaikan permasalahan ini? Jawabannya ada pada teorema berikut.

Teorema 6.11 (Kesamaan Fungsi Trigonometri). *Misalkan x dan y bilangan real.*

(a) $\sin x = \sin y$ jika dan hanya jika

$$x = y + 360^\circ \cdot k \quad \text{atau} \quad x = (180^\circ - y) + 360^\circ \cdot k$$

di mana k bilangan bulat.

(b) $\cos x = \cos y$ jika dan hanya jika

$$x = y + 360^\circ \cdot k \quad \text{atau} \quad x = -y + 360^\circ \cdot k$$

di mana k bilangan bulat.

(c) $\tan x = \tan y$ jika dan hanya jika

$$x = y + 180^\circ \cdot k$$

di mana k bilangan bulat.

Contoh 6.12. Akan ditentukan penyelesaian $\sin x = \frac{1}{2}$. Ingat bahwa $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, maka dapat kita tulis ulang sebagai $\sin x = \sin 30^\circ$. Diperoleh semua penyelesaiannya adalah

$$x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \quad \text{atau} \quad x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k$$

di mana k bilangan bulat. Jika dipilih x yang memenuhi $0^\circ < x < 180^\circ$, maka diperoleh $x = 30^\circ$ atau $x = 150^\circ$.

Latihan Akhir Subbab

Latihan 6.13. Jika $\sin x = \frac{3}{5}$ dan $0^\circ < x < 90^\circ$, tentukan $\cos x$.

Latihan 6.14. Jika $\cos x = -\frac{2}{3}$ dan $90^\circ < x < 180^\circ$, tentukan $\tan x$.

Latihan 6.15. Tentukan semua nilai x yang memenuhi $\sin(x + 90^\circ) = -\frac{1}{2}$ dengan syarat $0^\circ < x < 180^\circ$.

6.4 Penurunan Sifat Fungsi Trigonometri

Masih banyak lagi sifat-sifat yang ada pada fungsi trigonometri. Semua sifat ini dapat kita turunkan menggunakan sifat-sifat yang telah dijelaskan pada Subbab 6.2

dan Subbab 6.3. Saat saya belajar tentang trigonometri, sebagai orang yang malas menghafal, saya hanya menghafal Teorema 6.3, Teorema 6.10, dan positif-negatif fungsi trigonometri pada empat kuadran. Sifat-sifat berikutnya dapat diturunkan menggunakan sifat-sifat yang telah dijelaskan sebelumnya sehingga tidak perlu dihafal jika paham bagaimana menurunkannya. Waktu demi waktu, jika semakin terbiasa, kita akan hafal dengan sendirinya.

Proposisi 6.16. *Jika x dan y bilangan real, berlaku*

$$\begin{aligned}\sin(x + y) + \sin(x - y) &= 2 \sin(x) \cos(y), \\ \sin(x + y) - \sin(x - y) &= 2 \cos(x) \sin(y), \\ \cos(x + y) + \cos(x - y) &= 2 \cos(x) \cos(y), \\ \cos(x + y) - \cos(x - y) &= -2 \sin(x) \sin(y).\end{aligned}$$

Bukti. Bukti sifat ini langsung dapat diselesaikan menggunakan Teorema 6.3. Sebagai contoh,

$$\begin{aligned}\sin(x + y) + \sin(x - y) &= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y) \\ &= 2 \sin(x) \cos(y).\end{aligned}$$

Persamaan lainnya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. □

Proposisi 6.17. *Jika x dan y bilangan real, berlaku*

$$\begin{aligned}\sin(x) + \sin(y) &= 2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right), \\ \sin(x) - \sin(y) &= 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \sin\left(\frac{x - y}{2}\right), \\ \cos(x) + \cos(y) &= 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right), \\ \cos(x) - \cos(y) &= -2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \sin\left(\frac{x - y}{2}\right).\end{aligned}$$

Bukti. Substitusi $x = \alpha + \beta$ dan $y = \alpha - \beta$, menurut Proposisi 6.16 berlaku

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin(\alpha) \cos(\beta). \quad (6.1)$$

Dengan menjumlahkan persamaan $x = \alpha + \beta$ dan $y = \alpha - \beta$, diperoleh $x + y = 2\alpha$ sehingga $\alpha = \frac{x+y}{2}$. Substitusikan ke $x = \alpha + \beta$, maka $\beta = x - \alpha = \frac{x-y}{2}$. Jadi, persamaan (6.1) menjadi

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$$

seperti yang ingin dibuktikan. Untuk persamaan lainnya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. $\square$

Proposisi 6.18. *Jika x bilangan real, berlaku $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 6.10, kita punya $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Perhatikan bahwa

$$\tan^2(x) + 1 = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + 1 = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

seperti yang ingin dibuktikan. $\square$

Proposisi 6.19 (Dua Kali Sudut). *Misalkan x bilangan real. Maka berlaku*

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x), \quad \tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

Selain itu, berlaku pula

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x).$$

Bukti. Cukup pilih $y = x$ pada Teorema 6.3. Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= \sin(x + x) \\ &= \sin(x) \cos(x) + \cos(x) \sin(x) \\ &= 2 \sin(x) \cos(x), \\ \tan(2x) &= \tan(x + x) \\ &= \frac{\tan(x) + \tan(x)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(x)} \\ &= \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}, \\ \cos(2x) &= \cos(x + x) \\ &= \cos(x) \cos(x) - \sin(x) \sin(x) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x). \end{aligned}$$

Menggunakan sifat $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (Teorema 6.10), berlaku

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

seperti yang ingin dibuktikan. $\square$

Proposisi 6.20 (Setengah Sudut). Jika x bilangan real, berlaku

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}, \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}.$$

Selain itu, berlaku pula

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}.$$

Tanda “+” dan “-” bergantung pada kuadran $\frac{x}{2}$ berada.

Bukti. Akan digunakan Proposisi 6.19. Perhatikan bahwa

$$\cos x = \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$$

dan kita peroleh $\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$. Hampir serupa,

$$\cos x = \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - 1 \quad (6.2)$$

dan kita peroleh $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$. Menggunakan dua formula yang telah diperoleh ini, dapat kita peroleh

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}.$$

Dari Proposisi 6.19, kita punya

$$\sin x = \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right) \implies \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{\sin(x)}{2}.$$

Dari persamaan (6.2) kita juga dapat tulis sebagai $\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$. Dari sini diperoleh

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{\frac{1}{2} \sin(x)}{\frac{1 + \cos(x)}{2}} = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}.$$

Hampir serupa,

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{\frac{1 - \cos(x)}{2}}{\frac{1}{2} \sin(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

seperti yang ingin dibuktikan. □

Kita sudah melihat banyak hasil yang dapat diperoleh menggunakan sifat-sifat dasar trigonometri yang disampaikan pada Subbab 6.2 dan Subbab 6.3. Masih banyak lagi sifat-sifat trigonometri yang tidak disampaikan di sini sehingga kamu yang berhak menemukan atau menurunkan.

Sebagai penutup subbab ini, akan diberikan sebuah hasil yang sangat penting. Sangat disarankan untuk mencoba Latihan 6.23 terlebih dahulu.

Proposisi 6.21. $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Bukti. Misalkan $x = 18^\circ$. Dari Proposisi 6.7, maka $\cos 36^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \sin 54^\circ$ sehingga $\cos(2x) = \sin(3x)$. Menggunakan Proposisi 6.19 dan Latihan 6.23, kita punya

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \sin(3x) \\ 1 - 2\sin^2(x) &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \\ 4\sin^3(x) - 2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Misalkan $y = \sin(x)$, untuk memfaktorkan* $4y^3 - 2y^2 - 3y + 1$, kita misalkan

$$4y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = (4y^2 + ay - 1)(y - 1).$$

Dari sini kita peroleh

$$(4y^2 + ay - 1)(y - 1) = 4y^3 + (-4 + a)y^2 + (-a - 1)y + 1$$

sehingga haruslah $-4 + a = -2$ dan $-a - 1 = -3$ yang memberikan $a = 2$. Jadi, $0 = (4y^2 + 2y - 1)(y - 1)$. Karena $y = \sin 18^\circ \neq 1$, maka $0 = 4y^2 + 2y - 1$ sehingga diperoleh $y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Mengingat $y = \sin 18^\circ > 0$, ini berarti $y = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ seperti yang ingin dibuktikan. $\square$

Latihan Akhir Subbab

Latihan 6.22. Lengkapi bukti Proposisi 6.16 dan Proposisi 6.17.

Latihan 6.23. Jika x bilangan real, buktikan bahwa

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \quad \text{dan} \quad \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).$$

6.5 Luas Segitiga dengan Trigonometri

Kita lihat hasil yang lebih sederhana menggunakan sinus. Sebagai pengingat, pada segitiga ABC akan dimisalkan panjang sisinya sebagai $BC = a$, $CA = b$, dan $AB = c$.

Teorema 6.24 (Luas Segitiga). *Luas $\triangle ABC$ dapat dinyatakan sebagai*

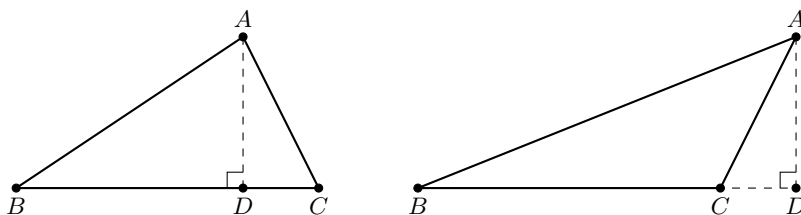
$$[ABC] = \frac{bc}{2} \sin A = \frac{ca}{2} \sin B = \frac{ab}{2} \sin C.$$

*Alternatif lainnya menggunakan metode Horner.

Bukti. Buat garis tinggi dari A ke BC , misalkan panjang $AD = t_A$. Ini berarti $[ABC] = \frac{at_A}{2}$. Perhatikan $\triangle ADB$, diperoleh $\sin \angle B = \frac{AD}{AB} = \frac{t_A}{c}$ sehingga $t_A = c \sin B$. Oleh karena itu,

$$[ABC] = \frac{at_A}{2} = \frac{a \cdot c \sin B}{2} = \frac{ac}{2} \sin \angle B.$$

Dengan cara yang sama, dapat diperoleh $[ABC] = \frac{bc}{2} \sin A$ dan $[ABC] = \frac{ab}{2} \sin C$. $\square$



Gambar 6.5A Penentuan luas segitiga dengan trigonometri

Contoh 6.25. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $AB = 5$, $BC = 2$, dan $\angle ABC = 45^\circ$. Dalam hal ini, $a = 2$ dan $c = 5$. Luas dari segitiga ABC adalah

$$[ABC] = \frac{ca}{2} \sin \angle B = \frac{5 \cdot 2}{2} \sin 45^\circ = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Contoh 6.26 (Latihan 2.12). Diberikan segitiga sama sisi ABC dengan panjang sisi x . Kita punya $\angle ABC = 60^\circ$ dan $a = b = c = x$. Luas segitiga ABC adalah

$$[ABC] = \frac{ca}{2} \sin \angle ABC = \frac{x \cdot x}{2} \sin 60^\circ = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2}{4} \sqrt{3}.$$

6.6 Aturan Sinus dan Cosinus Segitiga

Sekarang, kita sudah mulai masuk ke penerapan trigonometri ke geometri, yaitu aturan sinus dan cosinus pada segitiga. Kita mulai dari aturan sinus pada segitiga. Dari hasil ini, kita juga akan mendapatkan formula panjang jari-jari lingkaran luar segitiga ABC .

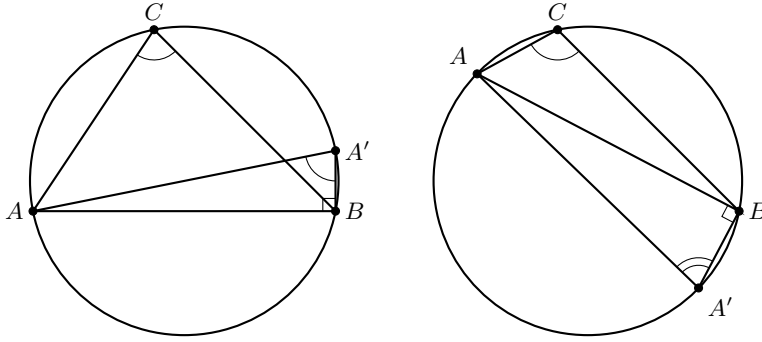
Teorema 6.27 (Aturan Sinus). Diberikan $\triangle ABC$ dan R merupakan panjang jari-jari (ABC). Berlaku hubungan

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Selain itu, panjang jari-jari (ABC) adalah

$$R = \frac{abc}{4[ABC]}.$$

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $\frac{c}{\sin C} = 2R$. Buat titik A' pada (ABC) sedemikian sehingga $\overline{AA'}$ merupakan diameter lingkaran tersebut. Dari sifat segiempat tali busur (Proposisi 5.21), kita punya $\angle AA'B = \angle ACB$ atau $\angle AA'B = 180^\circ - \angle ACB$.



Gambar 6.6A Ilustrasi pembuktian untuk Teorema 6.27

Karena $\overline{AA'}$ diameter (ABC) , dari Lema 3.13 berlaku $\angle ABA' = 90^\circ$. Mengingat $\sin(180^\circ - x) = \sin(x)$, masing-masing kasus memberikan $\sin \angle AA'B = \sin \angle ACB$. Ini berarti

$$\sin C = \sin \angle ACB = \sin \angle AA'B = \frac{AB}{AA'} = \frac{c}{2R}$$

sehingga $2R = \frac{c}{\sin C}$. Dengan cara yang sama, dapat diperoleh $2R = \frac{a}{\sin A}$ dan $2R = \frac{b}{\sin B}$.

Sekarang, akan dibuktikan $R = \frac{abc}{4[ABC]}$. Dari Teorema 6.24, dapat diperoleh $[ABC] = \frac{bc}{2} \sin A$ sehingga

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\frac{2[ABC]}{bc}} = \frac{abc}{2[ABC]}.$$

Ini berarti $R = \frac{abc}{4[ABC]}$ seperti yang ingin dibuktikan. □

Contoh 6.28. Diberikan $\triangle ABC$ di mana panjang $AB = 1$, $\angle BAC = 45^\circ$, dan $\angle ACB = 30^\circ$. Dari aturan sinus berlaku

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \implies \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin 30^\circ}$$

sehingga diperoleh

$$a = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Selain itu, panjang jari-jari lingkaran luarnya adalah

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Di sini kita bisa melihat bahwa aturan sinus memerlukan panjang sisi, sinus suatu sudut, dan panjang jari-jari lingkaran luar segitiga. Dalam penerapannya, kita akan banyak menggunakan hubungan

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{atau} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

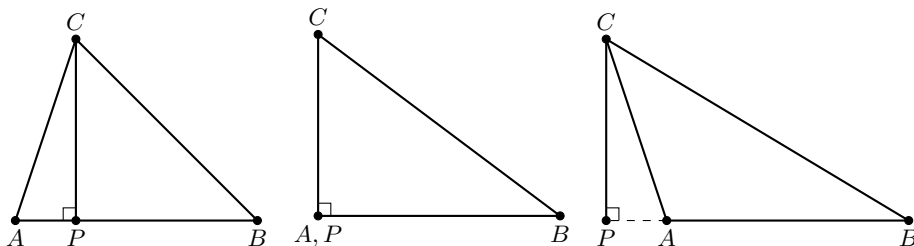
Teorema 6.29 (Aturan Cosinus). *Diberikan segitiga ABC . Maka berlaku*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. Misalkan titik P pada garis AB sedemikian sehingga $CP \perp AB$. Ada tiga kemungkinan letak titik P , yaitu pada $\overline{AB}$, berhimpit dengan A atau B , atau perpanjangan AB . Di sini, hanya akan dibuktikan saat P di $\overline{AB}$.



Gambar 6.6B Tiga kemungkinan posisi P

Misalkan $\angle ACP = \alpha$, $\angle BCP = \beta$, $AP = c_1$, dan $BP = c_2$, maka $c = c_1 + c_2$. Misalkan pula panjang $CP = t$. Dari segitiga ACP dan BCP , kita punya

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{CP}{CA} = \frac{t}{b}, & \sin(\alpha) &= \frac{AP}{AC} = \frac{c_1}{b} \\ \cos(\beta) &= \frac{CP}{CB} = \frac{t}{a}, & \sin(\beta) &= \frac{BP}{BC} = \frac{c_2}{a}. \end{aligned}$$

Menggunakan jumlah sudut fungsi cosinus (Teorema 6.3), maka

$$\cos C = \cos(\alpha + \beta) = \frac{t}{b} \cdot \frac{t}{a} - \frac{c_1}{b} \cdot \frac{c_2}{a} = \frac{t^2}{ab} - \frac{c_1 c_2}{ab} = \frac{t^2 - c_1 c_2}{ab}$$

yang ekuivalen dengan $c_1 c_2 = t^2 - ab \cos C$. Dari Teorema Pythagoras $\triangle APC$ dan $\triangle BPC$, maka $c_1^2 = b^2 - t^2$ dan $c_2^2 = a^2 - t^2$. Perhatikan bahwa

$$c^2 = (c_1 + c_2)^2$$

$$\begin{aligned}
&= c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2 \\
&= (b^2 - t^2) + (a^2 - t^2) + 2(t^2 - ab \cos C) \\
&= a^2 + b^2 - 2t^2 + 2t^2 - 2ab \cos C \\
&= a^2 + b^2 - 2ab \cos C
\end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan. $\square$

Contoh 6.30. Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$, dan $CA = 2$. Ini berarti

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + 1 - 3}{2 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$$

Menurut Teorema 6.11, $\angle A = 60^\circ + 360^\circ k$ atau $\angle A = -60^\circ + 360^\circ k$ di mana k bilangan bulat. Karena $0^\circ < \angle A < 180^\circ$, diperoleh $\angle A = 60^\circ$.

Contoh 6.31. Jika $\triangle ABC$ memenuhi $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (atau $c^2 + a^2 = b^2$), maka

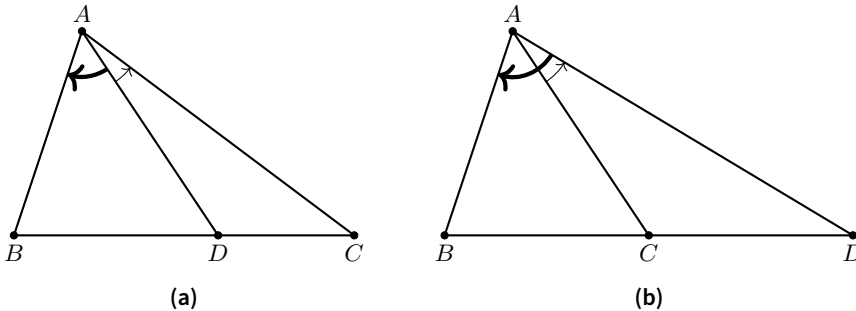
$$\cos \angle B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 0 = \cos 90^\circ.$$

Menurut Teorema 6.11, $\angle B = 90^\circ + 360^\circ k$ atau $\angle B = -90^\circ + 360^\circ k$. Karena $0^\circ < \angle B < 180^\circ$, diperoleh $\angle B = 90^\circ$. Jadi, jika segitiga ABC memenuhi hubungan $AB^2 + BC^2 = AC^2$, berarti segitiga tersebut siku-siku di B .

Di sini kita bisa melihat bahwa aturan cosinus memerlukan tiga sisi untuk menentukan cosinus suatu sudut segitiga, atau dua sisi dan satu sudut yang diapitnya untuk menentukan panjang sisi yang lain. Selanjutnya, kita akan melihat beberapa penerapan aturan sinus dan cosinus.

Lema 6.32 (Cross Ratio). Diberikan $\triangle ABC$. Jika titik D pada garis BC , berlaku

$$\frac{DB}{AB} \cdot \frac{AC}{DC} = \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle DAC}.$$



Gambar 6.6C Dua kasus letak titik D (a) Sisi BC , (b) Perpanjangan sisi BC

Bukti. Jika D berada di sisi BC kita punya $\angle ADB = 180^\circ - \angle ADC$, sedangkan jika berada di perpanjangan BC berlaku $\angle ADB = \angle ADC$. Kedua kemungkinan ini memberikan $\sin \angle ADB = \sin \angle ADC$. Dari aturan sinus $\triangle ADB$,

$$\frac{DB}{\sin \angle DAB} = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle ADB}.$$

Dari aturan sinus $\triangle ACD$,

$$\frac{DC}{\sin \angle DAC} = \frac{AC}{\sin \angle ADC} \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle DAC}.$$

Kalikan kedua persamaan yang telah didapatkan,

$$\frac{DB}{AB} \cdot \frac{AC}{DC} = \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle ADB} \cdot \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle DAC} = \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle DAC}$$

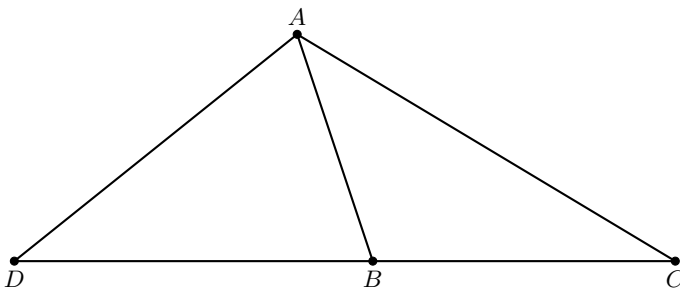
seperti yang ingin dibuktikan. $\square$

Kita bisa melihat bahwa Lema Cross-Ratio (Lema 6.32) tidak lain merupakan dua langkah aturan sinus yang diringkas. Hal ini dapat membantu kita mempersingkat proses aturan sinus yang melibatkan rasio sinus dua sudut.

Contoh 6.33 (Garis Bagi Dalam). Misalkan titik D pada $\overline{BC}$ memenuhi AD garis bagi $\angle BAC$, ini berarti $\angle DAB = \angle DAC$. Dari Lema Cross-Ratio (Lema 6.32) pada $\angle BAC$ dengan AD , diperoleh

$$\frac{DB}{AB} \cdot \frac{AC}{DC} = \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle DAC} = 1 \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Contoh 6.34 (Garis Bagi Luar). Misalkan D pada perpanjangan BC sehingga AD garis bagi luar $\angle BAC$ sebagaimana Gambar 6.6D.



Gambar 6.6D Pembuktian rasio garis bagi luar dengan Lema Cross-Ratio

Misalkan $\angle BAC = 2x$, dapat diperoleh $\angle DAB = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 90^\circ - x$. Dari Lema Cross-Ratio (Lema 6.32) pada $\angle BAC$ dengan AD , diperoleh

$$\frac{DB}{AB} \cdot \frac{AC}{DC} = \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle DAC} = \frac{\sin(90^\circ - x)}{\sin(90^\circ - x + 2x)} = \frac{\sin(90^\circ - x)}{\sin(90^\circ + x)}.$$

Karena $\sin(90^\circ \pm x) = \cos(x)$, ini berarti

$$\frac{DB}{AB} \cdot \frac{AC}{DC} = \frac{\sin(90^\circ - x)}{\sin(90^\circ + x)} = 1 \implies \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

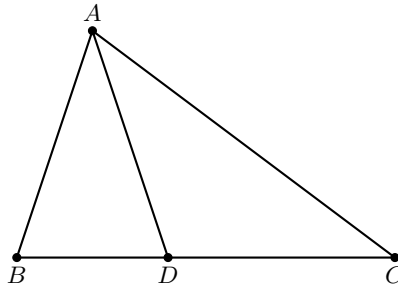
Dengan trigonometri, kita dapat membuktikan Teorema Garis Bagi hanya dengan menerapkan aturan sinus tanpa menggunakan titik bantu baru. Keren, bukan? Penggunaan trigonometri dapat memungkinkan kita menyelesaikan soal tanpa menggunakan titik bantu sama sekali.

6.7 Teorema Stewart

Misalkan kita memiliki masalah sebagai berikut. Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang $AB = 4$, $BC = 6$, dan $CA = 8$. Kemudian, titik D pada BC memenuhi panjang $BD = 1$. Bagaimana caranya kita menentukan panjang AD ?

Salah satu ide yang sudah kita pelajari pada Bagian I adalah membuat garis tinggi dari A ke BC , misalkan $\overline{AK}$. Lalu, kita dapat menggunakan luas segitiga untuk menentukan AK , lalu menentukan AD menggunakan Teorema Pythagoras.

Sekali lagi, trigonometri dapat membantu kita menyelesaikan masalah ini tanpa mengonstruksikan garis tinggi $\overline{AK}$. Secara umum, permasalahan ini dapat diselesaikan dengan Teorema Stewart.



Gambar 6.7A Ilustrasi untuk Teorema 6.35, Teorema Stewart

Teorema 6.35 (Stewart). Diberikan $\triangle ABC$. Jika titik D terletak pada sisi BC , berlaku

$$AD^2 \cdot BC = AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD - BD \cdot CD \cdot BC.$$

Bukti. Misalkan panjang $BD = a_1$ dan $DC = a_2$, kita punya $a = BC = a_1 + a_2$. Menurut aturan cosinus $\triangle ABC$, maka

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}.$$

Menurut aturan cosinus $\triangle ABD$, maka

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos \angle B \\ &= c^2 + a_1^2 - 2 \cdot c \cdot a_1 \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ &= c^2 + a_1^2 - \frac{a_1 c^2 + a_1 a^2 - a_1 b^2}{a} \end{aligned}$$

Kalikan kedua ruas dengan a ,

$$\begin{aligned} AD^2 \cdot a &= c^2 a + a_1^2 a - a_1 c^2 - a_1 a^2 + a_1 b^2 \\ &= c^2(a - a_1) + a a_1(a_1 - a) + a_1 b^2 \\ &= c^2 a_2 + a a_1(-a_2) + a_1 b^2 \\ &= b^2 a_1 + c^2 a_2 - a_1 a_2 a \\ AD^2 \cdot BC &= AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD - BD \cdot CD \cdot BC \end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan. □

Catatan. Pada Teorema Stewart (Teorema 6.35), titik D harus terletak pada $\overline{BC}$. Tidak dibenarkan menerapkan teorema tersebut ketika D berada di perpanjangan sisi BC .

Contoh 6.36. Diberikan $\triangle ABC$ di mana $AB = 4$, $BC = 6$, dan $CA = 8$. Lalu, titik D pada AB sehingga panjang $DA = 1$ dan $DB = 3$. Kita punya

$$CD^2 \cdot 4 = 8^2 \cdot 3 + 6^2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 4 = 216$$

sehingga $CD = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

Menggunakan Teorema 6.35, kita dapatkan bagaimana menentukan panjang suatu garis bagi dan garis berat dari segitiga ABC .

Teorema 6.37 (Garis Berat). Diberikan $\triangle ABC$. Diketahui D, E, F berturut-turut titik tengah sisi BC, CA, AB . Berlaku hubungan

$$\begin{aligned} AD^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \\ BE^2 &= \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}, \\ CF^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}. \end{aligned}$$

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $AD^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$. Perhatikan bahwa $DB = DC = \frac{a}{2}$. Dari Teorema Stewart (Teorema 6.35), berlaku

$$AD^2 \cdot a = b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{b^2 + c^2}{2} a - \frac{a^3}{4}.$$

Bagi kedua ruas dengan a , diperoleh $AD^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ seperti yang ingin dibuktikan. Dengan cara yang sama, diperoleh $BE^2 = \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ dan $CF^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$. $\square$

Teorema 6.38 (Garis Bagi Dalam). *Diberikan segitiga ABC . Diketahui D pada $\overline{BC}$ sehingga AD garis bagi $\angle BAC$. Berlaku hubungan*

$$AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC.$$

Bukti. Dari Teorema Garis Bagi (Teorema 2.21), kita punya $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$. Karena $DB + DC = BC = a$, maka

$$DB = \frac{c}{b+c} \cdot BC = \frac{ac}{b+c}, \quad DC = \frac{b}{b+c} \cdot BC = \frac{ab}{b+c}.$$

Dari Teorema Stewart (Teorema 6.35), kita punya

$$\begin{aligned} AD^2 \cdot a &= b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} + c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} - \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot a \\ &= \frac{abc(b+c)}{b+c} - DB \cdot DC \cdot a \\ &= abc - DB \cdot DC \cdot a. \end{aligned}$$

Bagi kedua ruas dengan a , diperoleh $AD^2 = bc - DB \cdot DC = AB \cdot AC - DB \cdot DC$ seperti yang ingin dibuktikan. $\square$

Contoh 6.39. Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang $BC = 7$, $CA = 8$, dan $AB = 6$. Misalkan titik D pada $\overline{BC}$ memenuhi AD garis bagi $\angle BAC$, akan ditentukan panjang AD . Dari Teorema Garis Bagi (Teorema 2.21), diperoleh $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$. Karena $DB + DC = BC = 7$, diperoleh $DB = 3$ dan $DC = 4$. Dari Teorema Stewart Garis Bagi (Teorema 6.38), berlaku

$$AD = \sqrt{AB \cdot AC - DB \cdot DC} = \sqrt{8 \cdot 6 - 3 \cdot 4} = 6.$$

Latihan Akhir Subbab

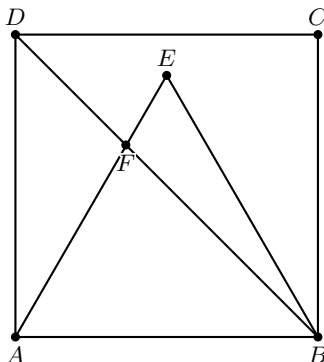
Latihan 6.40. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle ACB = 90^\circ$ dan M titik tengah $\overline{AB}$. Menggunakan Teorema Garis Berat (Teorema 6.37), buktikan bahwa $CM = \frac{AB}{2}$.

Teorema 6.41 (Garis Bagi Luar). *Diberikan segitiga ABC dan titik D pada perpanjangan sisi BC yang memenuhi AD merupakan garis bagi luar $\angle BAC$. Buktikan bahwa*

$$AD^2 = DB \cdot DC - AB \cdot AC.$$

6.8 Contoh Soal

Contoh 6.42 (OSK 2009). Titik E terletak di dalam persegi $ABCD$ sedemikian rupa sehingga ABE adalah segitiga sama sisi. Jika panjang $AB = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ dan F titik potong diagonal BD dengan AE , tentukan luas segitiga ABF .



Gambar 6.8A Ilustrasi untuk Contoh 6.42, OSK 2009

Walkthrough. Misalkan $x = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$. Karena ABE segitiga sama sisi, kita punya $\angle ABE = \angle EAB = 60^\circ$. Kita ingin menentukan $[ABF]$. Kita memiliki sudut-sudut pada $\triangle ABF$, salah satunya $\angle FAB = 60^\circ$. Menjadi alasan yang cukup bagus bahwa kita tentukan $[ABF]$ dengan

$$[ABF] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AF \cdot \sin \angle FAB = \frac{x \cdot AF}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{x \cdot AF}{4} \sqrt{3}.$$

Jadi, untuk menyelesaikan soal ini kita cukup menentukan panjang AF . Bagaimana kita dapat menentukan ini? Kita coba perhatikan $\triangle AFB$ sekali lagi. Karena $ABCD$ persegi, kita punya $\angle ABD = 45^\circ$ sehingga

$$\angle AFB = 180^\circ - \angle FAB - \angle FBA = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

Kita memiliki semua besaran sudut $\triangle ABF$ dan satu panjang sisinya, yaitu AB . Hal ini memberikan intuisi untuk menggunakan aturan sinus. Kita tidak mungkin menggunakan aturan cosinus karena dalam formulanya lebih memerlukan dua sisi dan satu sudut yang diapit. Perhatikan bahwa

$$\frac{AB}{\sin \angle AFB} = \frac{AF}{\sin \angle ABF} \implies \frac{x}{\sin 75^\circ} = \frac{AF}{\sin 45^\circ}.$$

Dari sini, kita pasti dapat menyelesaikan soal tersebut.

Solusi. Misalkan $x = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$. Karena $ABCD$ persegi dan $\triangle ABE$ segitiga sama sisi, maka $\angle ABF = 45^\circ$ dan $\angle BAF = 60^\circ$ sehingga $\angle AFB = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$. Dari aturan sinus $\triangle AFB$, maka

$$\frac{AF}{\sin \angle ABF} = \frac{AB}{\sin \angle AFB} \implies AF = \frac{x}{\sin 75^\circ} \cdot \sin 45^\circ = \frac{x\sqrt{2}}{2 \sin 75^\circ}.$$

Menggunakan jumlah-kurang sudut trigonometri, kita punya

$$\sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin(30^\circ) \cos(45^\circ) + \cos(30^\circ) \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}.$$

Diperoleh

$$AF = \frac{x\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}} = \frac{2x}{\sqrt{3} + 1} = x(\sqrt{3} - 1).$$

Jadi, luas dari $\triangle ABF$ adalah

$$\begin{aligned} [ABF] &= \frac{AB \cdot AF}{2} \cdot \sin \angle BAF \\ &= \frac{x \cdot x(\sqrt{3} - 1)}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2 (\sqrt{3} - 1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

▼

Contoh 6.43 (OMO 2014). Diberikan segitiga ABC . Di dalam segitiga tersebut terdapat sebuah setengah lingkaran yang berpusat pada $\overline{BC}$ serta menyinggung $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$. Diketahui E dan F pada $\overline{BC}$ sehingga $\overline{EF}$ diameter setengah lingkaran tersebut. Jika panjang $BE = 1$, $EF = 24$, dan $FC = 3$, tentukan keliling $\triangle ABC$.

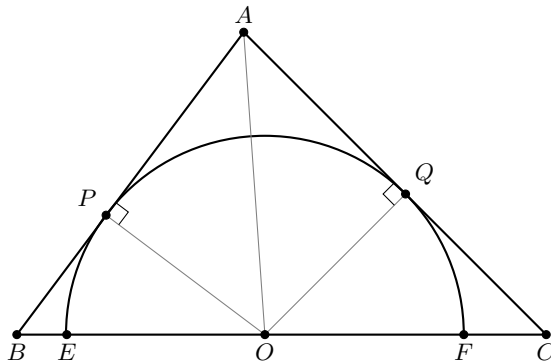
Walkthrough. Ingat kembali sifat-sifat lingkaran yang berkaitan dengan garis singgung. Sebagaimana yang telah dibahas pada Bab 3, kita konstruksikan titik pusat setengah lingkaran dan dihubungkan ke titik singgungnya. Misalkan O pusat setengah lingkaran, yaitu titik tengah $\overline{EF}$, serta menyinggung $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$ berturut-turut di P dan Q . Ini berarti $\angle APO = \angle AQO = 90^\circ$.

Perhatikan bahwa $OP = OQ = OE = OF = \frac{EF}{2} = 12$. Dari Teorema Pythagoras $\triangle OPB$ kita peroleh $PB = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, sedangkan dari $\triangle OQC$ dapat diperoleh $QC = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Kemudian, ingat kondisi menyinggung $\overline{AP}$ dan $\overline{AQ}$ memberikan $AP = AQ = x$ (Lema 3.9). Dari Teorema Pythagoras $\triangle APO$, diperoleh $AO = \sqrt{x^2 + 12^2} = \sqrt{x^2 + 144}$.

Sekarang, kita memiliki semua panjang

$$AB = x + 5, \quad AC = x + 9, \quad OB = 13, \quad OC = 15, \quad AO = \sqrt{x^2 + 144}.$$

Kondisi ini sangat bersesuaian dengan Teorema Stewart (Teorema 6.35) pada garis AO . Dari sini, kita dapat menemukan nilai x dan menemukan kelilingnya.



Gambar 6.8B Ilustrasi untuk Contoh 6.43, OMO 2014

Solusi. Misalkan O titik tengah $\overline{EF}$, kemudian P dan Q berturut-turut titik singgung setengah lingkaran dengan $\overline{AB}$ dan $\overline{AC}$. Tinjau $OP = OQ = OE = OF = \frac{EF}{2} = 12$. Dari Teorema Pythagoras $\triangle OPB$ dan $\triangle OQC$ berturut-turut memberikan

$$PB = \sqrt{OB^2 - OP^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5, \quad QC = \sqrt{OC^2 - OQ^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

Karena $\overline{AP}$ dan $\overline{AQ}$ menyinggung setengah lingkaran, maka $AP = AQ = x$. Dari Teorema Pythagoras $\triangle APO$, $AO = \sqrt{AP^2 + OP^2} = \sqrt{x^2 + 144}$. Dari Teorema Stewart,

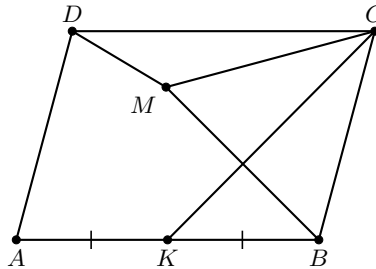
$$\begin{aligned} AO^2 \cdot BC &= AB^2 \cdot CO + AC^2 \cdot BO - CO \cdot BO \cdot BC \\ (x^2 + 144) \cdot 28 &= (x + 5)^2 \cdot 15 + (x + 9)^2 \cdot 13 - 15 \cdot 13 \cdot 28 \\ 28x^2 + 4032 &= 15x^2 + 150x + 375 + 13x^2 + 234x + 1053 - 5460 \\ 4032 - 375 - 1053 + 5460 &= 150x + 234x \\ 8064 &= 384x \\ x &= 21. \end{aligned}$$

Jadi, keliling segitiga ABC adalah $28 + (21 + 9) + (21 + 5) = \boxed{84}$. ▼

Alternatif solusi untuk Contoh 6.43 adalah dengan menyadari AO garis bagi $\angle BAC$ berdasarkan Lema 3.9, kemudian menerapkan Teorema Garis Bagi (Teorema 2.21).

Pada Bagian I, kita menyelesaikan permasalahan geometri memanfaatkan titik-titik bantu, kemudian menemukan yang sebangun, kongruen, atau segiempat tali busur. Menggunakan trigonometri, kita dapat menyelesaikannya tanpa memanfaatkan titik bantu. Masalah utama yang akan kita temukan berupa kemampuan manipulasi aljabar dan memanfaatkan sifat-sifat trigonometri.

Contoh 6.44 (OSK 2019). Diberikan jajar genjang $ABCD$ memenuhi $\angle ABC = 105^\circ$. Titik M berada di dalam jajar genjang sehingga BMC segitiga sama sisi dan memenuhi $\angle CMD = 135^\circ$. Jika K pertengahan sisi AB , tentukan besar $\angle BKC$ dalam satuan derajat.



Gambar 6.8C Ilustrasi Contoh 6.44, OSK 2019

Walkthrough. Kita ingin menentukan $\angle BKC$. Beberapa pendekatan awal yang mungkin dilakukan adalah sebagai berikut.

- Menggunakan aturan sinus $\triangle BKC$. Di sini akan memerlukan sudut lain dan panjang sisi yang berhadapan, seperti $\angle KBC$ dengan KC atau $\angle KCB$ dengan KB . Karena kita sudah mengetahui $\angle KBC = 105^\circ$, bisa jadi aturan sinus $\frac{KC}{\sin \angle KBC} = \frac{BC}{\sin \angle BKC}$ menjadi pilihan yang bagus.
- Menentukan $\angle BKC$ menggunakan aturan cosinus $\triangle BKC$. Di sini memerlukan KB , KC , dan BC . Mengingat $\angle KBC = 105^\circ$ dan jika kita dapat menemukan KB , maka KC juga otomatis ditemukan dari aturan cosinus $\triangle KBC$.

Dari kedua intuisi tersebut, kita bisa memulai dengan memisalkan $BC = x$. Alasan ini menjadi langkah awal pilihan saya karena $\triangle BMC$ merupakan segitiga sama sisi sehingga akan diperoleh $MB = MC = x$. Di sini kita akan mencari panjang KB yang dapat diperoleh dengan menemukan panjang AB atau CD .

Karena $ABCD$ jajar genjang, maka $\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$. Dari sini diperoleh $\angle MCD = 75^\circ - \angle MCB = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$. Jadi, dapat diperoleh $\angle MDC = 180^\circ - 135^\circ - 15^\circ = 30^\circ$. Semua sudut di $\triangle MDC$ kita temukan dan salah

satu panjang sisinya kita punya. Di sini jelas kita dapat menemukan semua panjang sisi $\triangle MCD$. Dari aturan sinus $\triangle MDC$ (Teorema 6.27),

$$\frac{CD}{\sin \angle CMD} = \frac{MC}{\sin \angle MDC} \implies \frac{CD}{\sin 135^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ}$$

dan diperoleh $CD = \frac{x}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 135^\circ = \frac{x}{1/2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2}$. Jadi, $AB = CD = x\sqrt{2}$ sehingga $KB = KA = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Sekarang, kita sudah menemukan $KB = \frac{x}{2}\sqrt{2}$ dan $BC = x$. Untuk menemukan $\angle BKC$, dengan aturan sinus kita akan memerlukan $\angle KCB$. Misalkan $\angle BKC = \theta$, maka $\angle KCB = 75^\circ - \theta$ dan kita peroleh

$$\frac{BC}{\sin \angle BKC} = \frac{KB}{\sin \angle BCK} \implies \frac{x}{\sin \theta} = \frac{\frac{x}{2}\sqrt{2}}{\sin(75^\circ - \theta)}$$

sehingga $\sin(75^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta$. Sekarang, kemampuan dalam menyelesaikan persamaan trigonometri dibutuhkan di sini yang terkadang *tricky*. Kita jabarkan:

$$\sin(75^\circ) \cos(\theta) - \cos(75^\circ) \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\theta).$$

Menggunakan $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$ dan jumlah-kurang sudut (Teorema 6.3), diperoleh

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{dan} \quad \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Jadi, persamaannya menjadi

$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cos(\theta) - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\theta).$$

Bagi kedua ruas dengan $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta$, persamaan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \cot(\theta) - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} &= 1 \\ \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \cot(\theta) &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \cot(\theta) &= 1 \end{aligned}$$

atau setara dengan $\tan \theta = 1 = \tan 45^\circ$. Mengingat $0^\circ < \theta < 180^\circ$, kita akan mendapatkan jawabannya.

Kamu dapat mencobanya menggunakan aturan cosinus dengan mendapatkan KC . Selanjutnya, kamu dapat menggunakan aturan sinus yang melibatkan KC atau menggunakan aturan cosinus secara langsung pada $\angle BKC$. Kamu bisa membandingkan mana langkah-langkah yang terasa lebih mudah.

Solusi. Misalkan panjang $BC = CM = MB = x$. Karena $ABCD$ jajar genjang, maka $\angle DCB = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$ sehingga $\angle DCM = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$. Jadi, $\angle CDM = 180^\circ - 135^\circ - 15^\circ = 30^\circ$. Aturan sinus $\triangle CDM$ memberikan

$$\frac{CD}{\sin 135^\circ} = \frac{CM}{\sin 30^\circ} \implies CD = \frac{x}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = x\sqrt{2}.$$

Karena panjang $AB = CD = x\sqrt{2}$, maka $KB = \frac{x}{2}\sqrt{2}$. Misalkan $\angle BKC = \theta$, maka $\angle KCB = 75^\circ - \theta$. Aturan sinus $\triangle KBC$ memberikan

$$\frac{x}{\sin \theta} = \frac{\frac{x}{2}\sqrt{2}}{\sin(75^\circ - \theta)} \implies \sin(75^\circ - \theta) = \frac{\sin \theta}{2} \sqrt{2}.$$

Dengan $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$, maka

$$\sin 75^\circ = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Ini berarti persamaannya menjadi

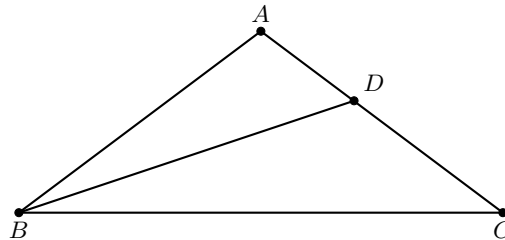
$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cos(\theta) - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\theta).$$

Bagi kedua ruas dengan $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\theta)$, kita punya

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \cot(\theta) - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 1 \implies \cot(\theta) = 1.$$

Jadi, $\tan \theta = 1 = \tan 45^\circ$ sehingga $\theta = 45^\circ + 180^\circ k$ di mana k bilangan bulat. Karena $0^\circ < \theta < 180^\circ$, maka $\theta = \boxed{45^\circ}$. ▼

Contoh 6.45 (OSP 2011, Soal 2.58). Diberikan segitiga sama kaki dengan $AB = AC$. Misalkan garis bagi $\angle ABC$ memotong AC di titik D dan berlaku $BC = BD + AD$. Tentukan besar $\angle CAB$.



Gambar 6.8D Ilustrasi untuk Contoh 6.45, OSP 2011

Walkthrough. Misalkan $\angle ABD = \angle CBD = \alpha$, dapat diperoleh $\angle ACB = 2\alpha$ dan $\angle BAC = 180^\circ - 4\alpha$. Untuk menyelesaikan masalah ini, kita bisa misalkan salah satu panjang ruas garis dan mengarahkannya ke persamaan $BC = BD + AD$. Untuk pemilihannya bebas, tapi kita ambil permissalannya dari salah satu BC, BD, AD .

Misalkan $AD = x$. Untuk mendapatkan BD , kita dapat menerapkan aturan sinus pada $\triangle ABD$ dengan

$$\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AD}{\sin \angle ABD} \implies BD = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ABD} \cdot AD = \frac{\sin(180^\circ - 4\alpha)}{\sin \alpha} x.$$

Menggunakan fakta $\sin(180^\circ - x) = \sin(x)$, diperoleh $BD = \frac{\sin(4\alpha)}{\sin \alpha} x$. Sekarang, bagaimana untuk menentukan BC ? Ada banyak alternatif yang mungkin untuk mendapatkannya. Salah satunya dapat kita peroleh dari aturan sinus $\triangle BDC$, yaitu

$$\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin \angle DCB} \implies BC = \frac{\sin \angle BDC}{\sin \angle DCB} \cdot BD.$$

Dari $\triangle BDC$, kita peroleh $\angle BDC = 180^\circ - \alpha - 2\alpha = 180^\circ - 3\alpha$. Jadi,

$$BC = \frac{\sin(180^\circ - 3\alpha)}{\sin(2\alpha)} \cdot \frac{\sin(4\alpha)}{\sin \alpha} x = \frac{\sin(3\alpha) \sin(4\alpha)}{\sin(2\alpha) \sin \alpha} x$$

memanfaatkan $\sin(180^\circ - 3\alpha) = \sin(3\alpha)$.

Jika kita substitusikan ke persamaan $BC = BD + AD$ dan membagi kedua ruas dengan x , permasalahannya menjadi

$$\frac{\sin(3\alpha) \sin(4\alpha)}{\sin(2\alpha) \sin \alpha} = \frac{\sin(4\alpha)}{\sin \alpha} + 1.$$

Ini yang menjadi masalah utama kita sekarang dan mengandalkan kemampuan manipulasi aljabar. Kita kalikan kedua ruas dengan $\sin(2\alpha) \sin \alpha$ sehingga persamaan menjadi

$$\sin(3\alpha) \sin(4\alpha) = \sin(4\alpha) \sin(2\alpha) + \sin(2\alpha) \sin \alpha.$$

Lalu, bagaimana sekarang? Apakah kita mengubah $\sin(4\alpha)$, $\sin(3\alpha)$, dan $\sin(2\alpha)$ ke bentuk $\sin \alpha$? Itu bisa menjadi salah satu ide, namun menurut saya ini akan menjadi bentuk yang “jelek” karena ada beberapa bentuk perkalian fungsi trigonometri (se-kadar intuisi). Ingat kembali formula bentuk $\sin(x) \sin(y)$ dapat kita ubah menjadi bentuk jumlahan-pengurangan fungsi trigonometri pada Proposisi 6.16. Ini berarti

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) \sin(4\alpha) &= -\frac{\cos(3\alpha + 4\alpha) - \cos(3\alpha - 4\alpha)}{2} = -\frac{\cos(7\alpha) - \cos(-\alpha)}{2}, \\ \sin(4\alpha) \sin(2\alpha) &= -\frac{\cos(4\alpha + 2\alpha) - \cos(4\alpha - 2\alpha)}{2} = -\frac{\cos(6\alpha) - \cos(2\alpha)}{2}, \\ \sin(2\alpha) \sin \alpha &= -\frac{\cos(2\alpha + \alpha) - \cos(2\alpha - \alpha)}{2} = -\frac{\cos(3\alpha) - \cos \alpha}{2}. \end{aligned}$$

Memanfaatkan $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, kemudian mengalikan kedua ruas dengan -2 kita dapat memperoleh

$$\begin{aligned}\cos(7\alpha) - \cos(\alpha) &= \cos(6\alpha) - \cos(2\alpha) + \cos(3\alpha) - \cos(\alpha) \\ \cos(7\alpha) &= \cos(6\alpha) + \cos(3\alpha) - \cos(2\alpha).\end{aligned}$$

Apa sekarang? Ada bentuk yang bagus untuk disadari, yaitu $7\alpha + 2\alpha = 6\alpha + 3\alpha$ sehingga kita coba tulis ulang

$$\cos(7\alpha) + \cos(2\alpha) = \cos(6\alpha) + \cos(3\alpha).$$

Kita memanfaatkan Proposisi 6.16 sekali lagi dan menjadi

$$\begin{aligned}2 \cos\left(\frac{7\alpha + 2\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{7\alpha - 2\alpha}{2}\right) &= 2 \cos\left(\frac{6\alpha + 3\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{6\alpha - 3\alpha}{2}\right) \\ 2 \cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) &= 2 \cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right).\end{aligned}$$

Hati-hati dalam menyelesaikan persamaan, terutama dalam “mencoret” bentuk di kedua ruas persamaan. Sebelum kita membagi kedua ruas dengan $\cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right)$, kita harus memastikan dulu kasus

$$\cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right) = 0 = \cos 90^\circ \implies \frac{9\alpha}{2} = \pm 90^\circ + 360^\circ k$$

di mana k bilangan bulat. Dari sini kita peroleh $\alpha = \pm 20^\circ + 80^\circ k$. Untuk mendapatkan semua nilai α yang mungkin, kita harus mengetahui batasan nilai untuk α . Ada beberapa cara untuk melihat ini, salah satunya dengan menyadari sudut-sudut segitiga ABC adalah 2α dan $180^\circ - 4\alpha$. Ini harus memenuhi

$$0^\circ < 2\alpha < 180^\circ, \quad 0^\circ < 180^\circ - 4\alpha < 180^\circ \implies 0^\circ < \alpha < 90^\circ, \quad 0^\circ < \alpha < 45^\circ$$

sehingga dari kedua syarat ini dapat disimpulkan $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

- Untuk $\alpha = 20^\circ + 80^\circ k$, kondisi $0^\circ < 20^\circ + 80^\circ k < 45^\circ$ sehingga

$$\frac{0^\circ - 20^\circ}{80^\circ} < k < \frac{45^\circ - 20^\circ}{80^\circ} \implies -\frac{1}{4} < k < \frac{5}{16} \implies k = 0.$$

Jadi, $\alpha = 20^\circ$.

- Untuk $\alpha = -20^\circ + 80^\circ k$, kita dapatkan juga

$$\frac{0^\circ + 20^\circ}{80^\circ} < k < \frac{45^\circ + 20^\circ}{80^\circ} \implies \frac{1}{4} < k < \frac{13}{16}$$

sehingga tidak ada solusi untuk k . Jadi, tidak ada α yang memenuhi.

Kita sudah dekat dengan jawaban akhir! Untuk kasus $\cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right) \neq 0$, maka

$$2 \cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \implies \cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right).$$

Dengan cara yang sama, kita dapat menyelesaikan dengan kesamaan fungsi trigonometri juga untuk mendapatkan α .

Solusi. Misalkan $\angle ABD = \angle CBD = \alpha$, maka dari kondisi $AB = AC$ diperoleh $\angle ACB = \angle ABC = 2\alpha$. Dari $\triangle ABC$ diperoleh $\angle BAD = 180^\circ - 4\alpha$. Dari segitiga ABD , diperoleh $\angle ADB = 3\alpha$ sehingga $\angle BDC = 180^\circ - 3\alpha$.

Misalkan $AD = x$. Perhatikan bahwa $\sin \angle BAD = \sin(180^\circ - 4\alpha) = \sin(4\alpha)$. Dari aturan sinus $\triangle ABD$ memberikan

$$\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AD}{\sin \angle ABD} \implies BD = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ABD} \cdot AD = \frac{\sin(4\alpha)}{\sin \alpha} x.$$

Perhatikan bahwa $\sin \angle BDC = \sin(180^\circ - 3\alpha) = \sin(3\alpha)$, dari aturan sinus $\triangle BDC$ memberikan

$$\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin \angle DCB} \implies BC = \frac{\sin \angle BDC}{\sin \angle DCB} \cdot BD = \frac{\sin(3\alpha) \sin(4\alpha)}{\sin(2\alpha) \sin \alpha} x.$$

Substitusikan ke $BC = BD + AD$, dengan mengalikan kedua ruas dengan $\frac{\sin(2\alpha) \sin \alpha}{x}$ dapat diperoleh persamaan

$$\sin(3\alpha) \sin(4\alpha) = \sin(4\alpha) \sin(2\alpha) + \sin(2\alpha) \sin \alpha.$$

Mengalikan kedua ruas dengan -2 dan memanfaatkan $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, diperoleh

$$\begin{aligned} -2 \sin(3\alpha) \sin(4\alpha) &= -2 \sin(4\alpha) \sin(2\alpha) - 2 \sin(2\alpha) \sin \alpha \\ \cos(7\alpha) - \cos(-\alpha) &= \cos(6\alpha) - \cos(2\alpha) + \cos(3\alpha) - \cos(\alpha) \\ \cos(7\alpha) + \cos(2\alpha) &= \cos(6\alpha) + \cos(3\alpha) \\ 2 \cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) &= 2 \cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

Karena $\angle BAC = 180^\circ - 4\alpha$, berarti $0^\circ < 180^\circ - 4\alpha < 180^\circ$ sehingga $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

Jika $\cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right) = 0$, ini berarti

$$\frac{9\alpha}{2} = \pm 90^\circ + 360^\circ k \implies \alpha = \pm 20^\circ + 80^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Untuk $\alpha = 20^\circ + 80^\circ k$, haruslah $k = 0$ sehingga $\alpha = 20^\circ$. Untuk $\alpha = -20^\circ + 80^\circ k$, tidak ada solusi untuk α .

Jika $\cos\left(\frac{9\alpha}{2}\right) \neq 0$, diperoleh

$$\cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \implies \frac{5\alpha}{2} = \pm \frac{3\alpha}{2} + 360^\circ l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Ini berarti $\alpha = 360^\circ l$ atau $\alpha = 90^\circ l$. Namun, dua bentuk ini tidak memberikan solusi untuk α .

Jadi, $\alpha = 20^\circ$ sehingga $\angle BAC = 180^\circ - 4\alpha = \boxed{100^\circ}$. ▼

Sekarang, kita beralih ke contoh soal aljabar yang sebenarnya bisa diinterpretasikan ke soal geometri.

Contoh 6.46 (OSK SMP 2024). Diketahui bilangan real positif p, q, r, s yang memenuhi

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= r^2 + s^2, \\ p^2 + s^2 - ps &= q^2 + r^2 + qr. \end{aligned}$$

Tentukan nilai dari $\frac{pq+rs}{ps+qr}$.

Walkthrough. Pandang segiempat $PQRS$ dengan panjang sisi $PQ = p$, $QR = q$, $RS = r$, dan $SP = s$. Kita atur bagaimana kondisi segiempat memenuhi kedua persamaan yang diberikan.

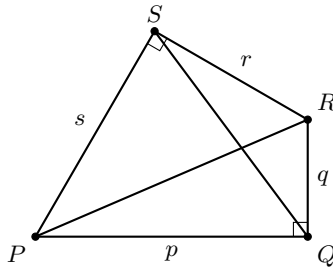
Pada persamaan pertama, kita bisa melihat bahwa $PQ^2 + QR^2 = RS^2 + SP^2$ yang sebenarnya bentuk ini mirip dengan Teorema Pythagoras dengan sisi miring $\overline{PR}$. Kita pilih $\angle PQR = 90^\circ$ dan $\angle RSP = 90^\circ$ yang mana kita dapatkan

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2 = RS^2 + SP^2$$

memenuhi persamaan. Pada persamaan kedua lebih *tricky*, yaitu menyadari

$$\begin{aligned} p^2 + s^2 - ps &= p^2 + s^2 - 2ps \cos 60^\circ, \\ q^2 + r^2 + qr &= q^2 + r^2 - 2qr \cos 120^\circ \end{aligned}$$

yang merupakan aturan cosinus $\triangle PQS$ dan $\triangle QRS$. Kita atur $\angle SPQ = 60^\circ$ dan $\angle QRS = 120^\circ$.



Gambar 6.8E Interpretasi sistem persamaan ke segiempat $PQRS$

Lalu, kondisi $\angle PQR + \angle PSR = 180^\circ$ menunjukkan bahwa $PQRS$ merupakan segiempat tali busur (Proposisi 5.21). Lalu, $\angle PQR = 90^\circ$ menunjukkan $\overline{PR}$ diameter ($PQRS$) dari Lema 3.13. Sekarang, apa yang merepresentasikan nilai dari $\frac{pq+rs}{ps+qr}$?

Ekspresi $pq + rs$ seperti merepresentasikan luas $\triangle PQR$ ditambah dengan luas $\triangle PSR$ mengingat sudutnya siku-siku. Ini menunjukkan bahwa

$$pq + rs = 2 \cdot \frac{pq}{2} + 2 \cdot \frac{rs}{2} = 2[PQR] + 2[PSR] = 2[PQRS].$$

Hal yang serupa dapat dicurigai pada bentuk $ps + qr$ sebenarnya juga merepresentasikan luas $\triangle PQS$ ditambah dengan luas $\triangle QRS$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} [PQRS] &= [PQS] + [QRS] \\ &= \frac{1}{2} \cdot ps \sin \angle QPS + \frac{1}{2} \cdot qr \sin \angle QRS \\ &= \frac{1}{2} \cdot ps \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot qr \sin 120^\circ \\ &= \frac{ps\sqrt{3} + qr\sqrt{3}}{4} \\ &= (ps + qr) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Membandingkan dengan persamaan sebelumnya yang kita peroleh, maka kita mendapatkan jawabannya. Oke, informasi $PQRS$ segiempat tali busur sepertinya tidak terpakai sama sekali, jadi kita abaikan saja.

Solusi. Misalkan $PQRS$ merupakan segiempat memenuhi $\angle PQR = \angle RSP = 90^\circ$, $\angle QRS = 120^\circ$, dan $\angle SPQ = 60^\circ$. Misalkan $PQ = p$, $QR = q$, $RS = r$, $SP = s$. Perhatikan bahwa dari Teorema Pythagoras $\triangle PQR$ dan $\triangle PSR$ memenuhi

$$p^2 + q^2 = PQ^2 + QR^2 = PR^2 = SP^2 + SR^2 = r^2 + s^2.$$

Sedangkan, aturan cosinus $\triangle PQS$ dan $\triangle SQR$ memberikan

$$p^2 + s^2 - 2ps \cos 60^\circ = SQ^2 = q^2 + r^2 - 2qr \cos 120^\circ$$

sehingga $p^2 + s^2 - ps = q^2 + r^2 + qr$. Jadi, panjang sisi-sisi segiempat $PQRS$ memenuhi sistem persamaan soal. Perhatikan bahwa

$$pq + rs = 2 \cdot \frac{pq}{2} + 2 \cdot \frac{rs}{2} = 2[PQR] + 2[PSR] = 2[PQRS].$$

Di sisi lain,

$$2[PQRS] = 2[PSQ] + 2[SRQ] = 2 \cdot \frac{ps}{2} \sin 60^\circ + 2 \cdot \frac{qr}{2} \sin 120^\circ = (ps + qr) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

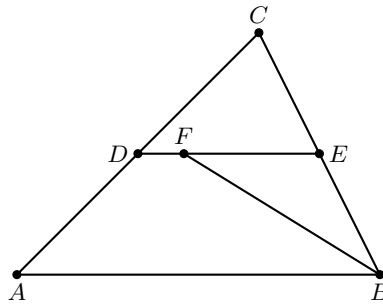
Jadi,

$$pq + rs = 2[PQRS] = (ps + qr) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \frac{pq + rs}{ps + qr} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}. \quad \blacktriangledown$$

6.9 Soal

Kamu dapat mengerjakan soal-soal pada Bagian I dengan trigonometri[†]. Kamu dituntut untuk mengumpulkan setidaknya 30♥.

- [1♥] **Soal 6.47 (OSK 2016).** Pada segitiga ABC , titik M terletak pada $\overline{BC}$ sehingga $AB = 7$, $AM = 3$, $BM = 5$, dan $MC = 6$. Tentukan panjang AC . **Hints:** 442
- [1♥] **Soal 6.48.** Diberikan $\triangle ABC$ dengan $AB = 7$, $BC = 9$, dan $CA = 8$. Titik D dan E berturut-turut pada $\overline{AC}$ dan $\overline{AB}$ yang memenuhi $CD = 1$ dan $BE = 5$. Keliling segiempat $CDEB$ dapat dinyatakan sebagai $x\sqrt{y} + z$ di mana x, y, z bilangan asli serta y tidak habis dibagi bilangan kuadrat apa pun selain 1. Tentukan nilai dari $x + y + z$. **Hints:** 247 159
- [1♥] **Soal 6.49.** Diberikan jajar genjang $ABCD$ dengan luas $\sqrt{3} - 1$ dan $\angle ABC = 135^\circ$. Dibuat segitiga sama sisi ADX dan segitiga sama sisi DCY ke arah luar jajar genjang $ABCD$. Tentukan luas dari $\triangle XDY$. **Hints:** 97 361
- [1♥] **Soal 6.50.** Titik A terletak pada sebuah lingkaran dengan panjang jari-jari 1 yang berpusat di O . Titik B terletak di luar lingkaran sedemikian sehingga AB menyinggung lingkaran. Garis bagi dari $\angle ABO$ memotong $\overline{AO}$ di titik C . Jika $\sin \angle AOB = \sqrt{2} - 1$, tentukan nilai $100 \cdot OC^2$. **Hints:** 256 451
- [1♥] **Soal 6.51[‡]** Diberikan segiempat tali busur $ABCD$ dengan $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 5$, dan $DA = 6$. Tentukan panjang AC . **Hints:** 334 457 **Sol:** Hal. 409
- [2♥] **Soal 6.52 (PEMNAS 2024).** Diberikan segitiga ABC . Titik D dan E berturut-turut pada sisi $\overline{CA}$ dan $\overline{CB}$, lalu F berada di $\overline{DE}$. Jika $DA = DC = 5$, $EC = EB = 4$, $AB = 12$, dan $\angle ABF = \angle CBF$, tentukan BF . **Hints:** 217 391 358 **Sol:** Hal. 410



Gambar 6.9A Ilustrasi untuk Soal 6.52, PEMNAS 2024

[†]Soal yang direkomendasikan: Soal 2.50, Soal 2.51, Soal 2.55, Soal 2.60, Soal 2.61, Soal 3.48, Soal 3.51, Soal 3.52, Soal 4.35, Soal 5.48.

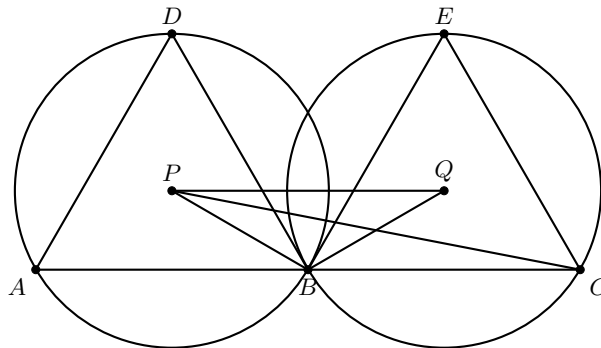
[‡]Terdapat catatan penting pada solusi soal ini, bisa dilihat setelah berhasil menyelesaikannya.

- [2♥] **Soal 6.53 (OSK 2024).** Diberikan segiempat $ABCD$ yang diagonalnya berpotongan di E , dengan luas segitiga AED sama dengan luas segitiga BEC . Jika $AB = 50$, $AE = 45$, dan $AC = 108$, tentukan CD . **Hints:** 263 50
- [2♥] **Soal 6.54 (OSP 2020).** Diketahui segiempat konveks $ABCD$ memenuhi $BC = AD = 5$, $\angle BAD = \angle BCD = 45^\circ$, dan BC tidak sejajar AD . Keliling segiempat tersebut dapat dituliskan sebagai $p + q\sqrt{r}$ dengan p, q, r bulat dan r bebas kuadrat (tidak memiliki faktor bilangan kuadrat selain 1). Tentukan nilai $p + q + r$. **Hints:** 242 367 479
- [3♥] **Soal 6.55 (Turkey 2014).** Segiempat konveks $ABCD$ memenuhi

$$\angle DAB = \angle CBD = 120^\circ, \quad AB = 2, \quad AD = 4, \quad BC = BD.$$

Garis yang melalui C dan sejajar dengan AB memotong AD di E . Tentukan panjang CE . **Hints:** 408 203 463 **Sol:** Hal. 411

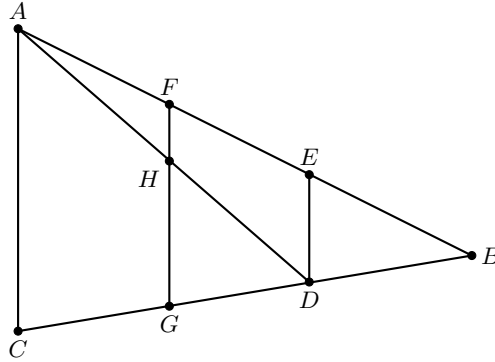
- [3♥] **Soal 6.56 (OSK 2025).** Perhatikan Gambar 6.9B. Diketahui dua segitiga sama sisi ABD dan BCE dengan panjang sisi yang sama dan titik A, B , dan C kolinear. Titik P dan Q berturut-turut adalah titik pusat lingkaran luar segitiga ABD dan titik pusat lingkaran luar segitiga BCE . Jika luas lingkaran luar segitiga BPC adalah 126, tentukan luas lingkaran luar segitiga BPQ . **Hints:** 384 20 175



Gambar 6.9B Ilustrasi untuk Soal 6.56, OSK 2025

- [3♥] **Soal 6.57 (IMO HKPSC 2016).** Pada segitiga ABC , diketahui $AB + BC = 2AC$ dan $\angle A = \angle C + 90^\circ$. Tentukan $\cos B$. **Hints:** 190 277 326 69 **Sol:** Hal. 412
- [3♥] **Soal 6.58 (OSK 2022).** Diberikan segitiga siku-siku sama kaki ABC dengan panjang $BC = AB$ dan L titik tengah BC . Titik P pada sisi AC sehingga BP tegak lurus AL . Jika panjang $CP = 30\sqrt{2}$, tentukan panjang AB . **Hints:** 435 53 269 43
- [4♥] **Soal 6.59 (CMIMC 2021).** Segiempat konveks $ABCD$ memenuhi $\angle ADC = 90^\circ + \angle BAC$. Jika $AB = BC = 17$ dan $CD = 16$, tentukan luas maksimum yang mungkin dari segiempat $ABCD$. **Hints:** 385 226 10 **Sol:** Hal. 413

- [3♥] **Soal 6.60 (PEMNAS SMP 2024).** Diberikan segitiga ABC yang memuat segitiga ACD kemudian ditarik garis ED dan FG yang sejajar dengan AC . Diketahui panjang $CA = CD$, $AH = BE$, $GH = 20$, dan $GC = 30$. Jika diketahui perbandingan panjang $BD : AC = 1 : 2$, tentukan panjang dari AB . **Hints:** 444 170 346 442



Gambar 6.9C Ilustrasi untuk Soal 6.60, PEMNAS SMP 2024

- [4♥] **Soal 6.61 (OSK 2024).** Pada $\triangle ABC$, titik D dan E terletak pada garis BC sehingga B, D, E, C terletak pada urutan tersebut. Diketahui $BD : DE : EC = 4 : 2 : 5$, serta garis-garis AD dan AE membagi $\angle BAC$ menjadi tiga sudut sama besar. Garis AD dan AE masing-masing memotong lingkaran luar ABC pada titik F dan G . Nilai dari $\frac{DF}{EG}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{\frac{p}{q}}$ untuk suatu bilangan bulat positif p dan q yang relatif prima, tentukan nilai dari $p + q$. **Hints:** 451 26 191
- [4♥] **Soal 6.62 (OSP 2024).** Diberikan segitiga ABC dengan sisi $AB = 15$, $AC = 13$, dan $BC = 4$. Diketahui bahwa terdapat sebuah segitiga sama sisi PQR dengan P, Q , dan R masing-masing terletak pada sisi BC, CA , dan AB sehingga PQ sejajar AB . Nilai $\frac{PQ}{AB}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$ dengan a, b, c , dan d bilangan bulat positif, d tidak habis dibagi bilangan kuadrat yang lebih besar dari 1 dan $\text{FPB}(a, b, c) = 1$. Tentukan nilai dari $a + b + c + d$. **Hints:** 475 299 3 143 **Sol:** Hal. 414
- [5♥] **Soal 6.63 (HMMT February 2017).** Diberikan segiempat konveks $ABCD$ di mana panjang $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 7$, dan $DA = 8$. Misalkan M, P, N, Q berturut-turut titik tengah AB, BC, CD, DA . Hitung $MN^2 - PQ^2$. **Hints:** 103 80 417 129
- [5♥] **Soal 6.64.** Diberikan segitiga ABC lancip dengan titik tinggi H dan titik pusat lingkaran luar O . Garis tinggi dari A pada segitiga ABC memotong (ABC) sekali lagi di titik D . Jika $AB = 6$, $DB = 2$, dan $[ABC] = 5[HBC]$, maka $OA^2 = \frac{m}{n}$ di mana m dan n dua bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai dari $m+n$. **Hints:** 150 249 153 15

[5♥] **Soal 6.65 (OSK 2022).** Diberikan bilangan real positif a, b, c, d . Jika $a > c$ dan $d > b$ memenuhi

$$4a^2 + 4b^2 = 4c^2 + 4d^2 = 5ac + 5bd,$$

tentukan nilai dari $20 \cdot \frac{ab+cd}{ad+bc}$. **Hints:** 57 401 470 **Sol:** Hal. 415

[6♥] **Soal 6.66.** Diberikan segiempat konveks $ABCD$ yang memenuhi

$$\angle ABD = 30^\circ, \quad \angle BCA = 75^\circ, \quad \angle ACD = 25^\circ, \quad CD = CB.$$

Tentukan besar $\angle CAD$. **Hints:** 238 37 115 310 **Sol:** Hal. 416