

∞ BAB 1 ∞

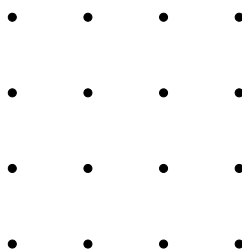
Sudut di Poligon

Dalam bab ini, kita akan mempelajari masalah sudut-sudut pada bangun datar. Masalah sudut dan bangun datar akan sangat berkaitan karena kita mencari beberapa sudut menggunakan sifat-sifat pada bangun datar.

1.1 Objek Dasar Geometri

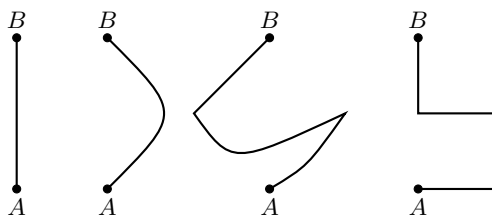
Saya rasa kamu sudah tidak asing dengan istilah “titik”, bahkan kamu dapat menemukan titik di akhir kalimat ini. Adapun definisi dari titik adalah sebagai berikut.

Definisi 1.1 (Titik). *Titik* merupakan elemen dasar dari geometri yang tidak memiliki panjang, lebar, dan tinggi.



Gambar 1.1A Kumpulan titik-titik

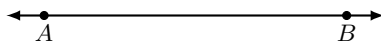
Untuk memberikan nama pada sebuah titik, kita dapat menggunakan huruf kapital, seperti A , B , dan seterusnya. Jika kita diberikan dua titik A dan B , ada banyak sekali cara kita menghubungkan dua titik tersebut. Kita dapat membuat “jalan” yang menghubungkan kedua titik, baik lurus maupun berbelok-belok.



Gambar 1.1B Berbagai cara membuat “jalan” dari dua titik

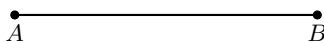
Secara khusus, apabila “jalan” yang kita buat lurus, kita akan mengenal garis, sinar, dan ruas garis.

Definisi 1.2 (Garis). *Garis* merupakan himpunan titik-titik yang tersusun lurus dan memanjang tanpa batas ke dua arah. Garis yang melalui titik A dan titik B dinotasikan dengan $\overleftrightarrow{AB}$, atau disebut sebagai garis AB .



Gambar 1.1C Selalu ingat bahwa garis AB memanjang dua arah!

Definisi 1.3 (Ruas Garis). *Ruas garis* (disebut juga *segmen*) adalah bagian dari sebuah garis yang memiliki titik awal dan akhir serta panjangnya terbatas. Ruas garis AB dinotasikan sebagai $\overline{AB}$.



Gambar 1.1D Ruas garis AB

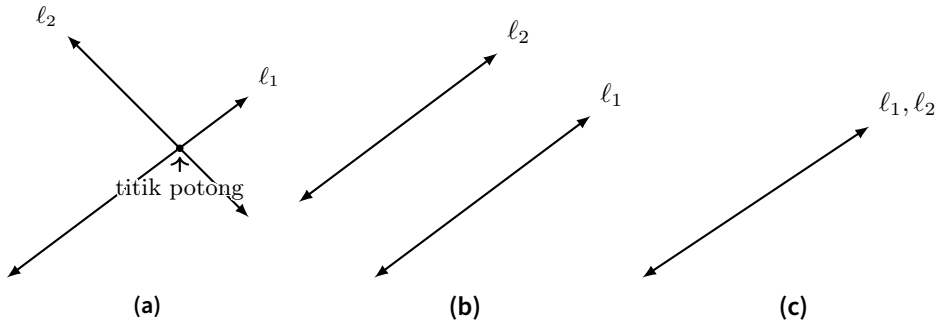
Definisi 1.4 (Sinar). *Sinar* adalah perpanjangan ruas garis ke satu arah dan panjangnya tak berhingga. Sinar AB (dimulai dari A dan memanjang ke B hingga seterusnya) dinotasikan sebagai $\overrightarrow{AB}$.



Gambar 1.1E Perbedaan sinar AB dan sinar BA

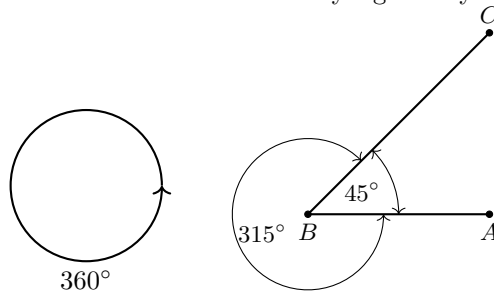
Diberikan garis ℓ_1 dan ℓ_2 . Jika garis ℓ_1 dan ℓ_2 melalui tepat satu titik yang sama, disebut *titik persekutuan* atau *titik potong*, kedua garis ini disebut *berpotongan*. Titik potong kedua garis ini akan dinotasikan sebagai $\ell_1 \cap \ell_2$. Jika garis ℓ_1 dan ℓ_2 melalui tak berhingga banyaknya titik persekutuan, kedua garis ini disebut *berhimpit* (dengan

kata lain $\ell_1 = \ell_2$). Jika garis ℓ_1 dan ℓ_2 tidak memiliki titik potong, kedua garis ini disebut *sejajar* (dinotasikan $\ell_1 \parallel \ell_2$).



Gambar 1.1F (a) Berpotongan, (b) Sejajar, (c) Berhimpit

Dua garis yang berpotongan membentuk *sudut* dan besar sudut tersebut dapat kita ukur dalam satuan derajat atau radian (dalam hal ini, $\pi \text{ rad} = 180^\circ$). Besar sudut satu putaran penuh adalah 360° . Besar sudut disimbolkan dengan " $\angle$ " atau " $m\angle$ ". Pada Gambar 1.1G, dapat ditulis $\angle ABC = 45^\circ$ atau $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$ dalam satuan radian. Tenang, mungkin kamu berpikir mengapa $\angle ABC$ bukan 315° . Di sini, kita akan menotasikan besar sudut $\angle ABC$ yang nilainya dari 0° hingga 180° .



Gambar 1.1G Kamu juga bisa mengukurnya dengan busur derajat!

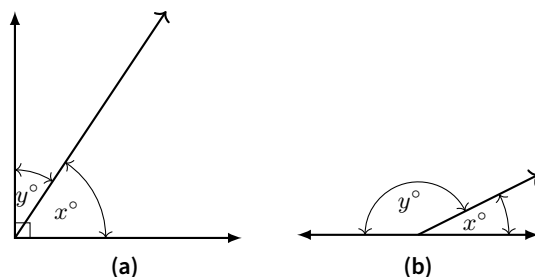
Empat jenis sudut yang akan sering digunakan dalam buku ini adalah sudut lancip, siku-siku, tumpul, dan refleks.

Definisi 1.5 (Jenis-Jenis Sudut). Misalkan suatu sudut berukuran x° . Jika memenuhi $0^\circ < x^\circ < 90^\circ$, sudut tersebut disebut *sudut lancip*. Jika $x^\circ = 90^\circ$, sudut tersebut disebut *sudut siku-siku*. Jika $90^\circ < x^\circ < 180^\circ$, sudut tersebut disebut *sudut tumpul*. Jika $180^\circ < x^\circ < 360^\circ$, sudut tersebut disebut *sudut refleks*.

Untuk kebutuhan tertentu nantinya, kita notasikan $\text{ref} \angle ABC$ sebagai besar sudut refleksi dari $\angle ABC$. Pada Gambar 1.1G, $\text{ref} \angle ABC = 315^\circ$.

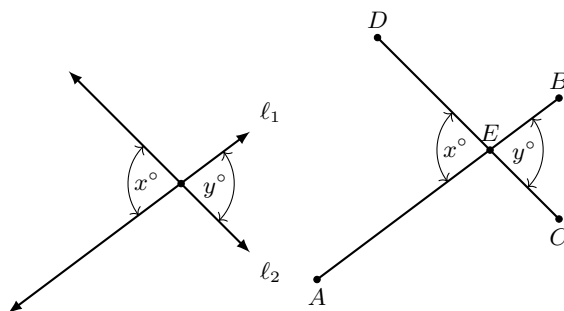
Dua sudut memiliki beberapa hubungan, yaitu *berpenyiku*, *berpelurus*, dan *bertolak belakang*.

Definisi 1.6 (Sudut Berpenyiku dan Sudut Berpelurus). Dua sudut dikatakan *berpenyiku* apabila jumlah kedua sudut tersebut adalah 90° . Sedangkan, dua sudut dikatakan *berpelurus* apabila jumlah kedua sudut tersebut adalah 180° .



Gambar 1.1H (a) Sudut Berpenyiku, (b) Sudut Berpelurus

Sudut bertolak belakang dibentuk oleh dua garis yang berpotongan. Perhatikan Gambar 1.1I, sudut yang memiliki besar x° dan y° merupakan sepasang sudut yang bertolak belakang. Jika sudut yang dibentuk oleh dua garis tersebut adalah 90° , dua garis tersebut disebut *tegak lurus*, dinotasikan sebagai $\ell_1 \perp \ell_2$.



Gambar 1.1I Sudut bertolak belakang

Proposisi 1.7 (Sudut Bertolak Belakang). Sudut-sudut yang bertolak belakang memiliki besar yang sama. Dengan kata lain, dari Gambar 1.1I berlaku $x^\circ = y^\circ$.

Bukti. Buat titik-titik A dan B pada garis ℓ_1 , C dan D pada ℓ_2 , $E = \ell_1 \cap \ell_2$ sebagaimana Gambar 1.1I. Perhatikan bahwa $\angle AED$ dan $\angle BED$ berpelurus sehingga $\angle AED + \angle BED = 180^\circ$, maka diperoleh $\angle BED = 180^\circ - \angle AED = 180^\circ - x^\circ$. Lalu,

$\angle BED$ dan $\angle BEC$ juga berpelurus sehingga berlaku

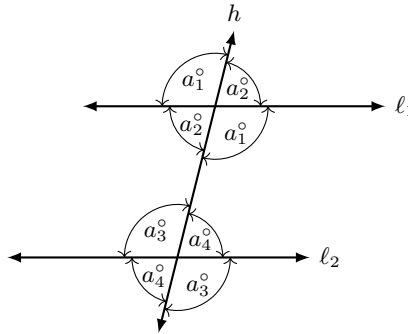
$$180^\circ = \angle BED + \angle BEC = (180^\circ - x^\circ) + y^\circ \implies x^\circ = y^\circ$$

seperti yang ingin dibuktikan. $\square$

Terakhir, akan diberikan kriteria dari dua garis sejajar.

Aksioma 1.8 (Garis Sejajar). Diberikan garis ℓ_1 dan ℓ_2 . Sebuah garis transversal h memotong kedua garis ℓ_1 dan ℓ_2 serta terbentuk besar sudut seperti pada Gambar 1.1J. Pernyataan berikut ekuivalen:

- (a) $\ell_1 \parallel \ell_2$. (c) $a_2^\circ = a_4^\circ$. (e) $a_2^\circ + a_3^\circ = 180^\circ$.
 (b) $a_1^\circ = a_3^\circ$. (d) $a_1^\circ + a_4^\circ = 180^\circ$.



Gambar 1.1J Hubungan antarsudut pada dua garis sejajar

1.2 Bangun Datar Segitiga

Diberikan tiga titik berbeda yang tidak segaris, misalkan A , B , dan C . Jika kita buat ruas garis AB , BC , dan CA , maka akan terbentuk sebuah bangun ABC yang disebut *segitiga*. Kamu mungkin sudah tahu fakta tentang jumlah sudut-sudut pada segitiga.

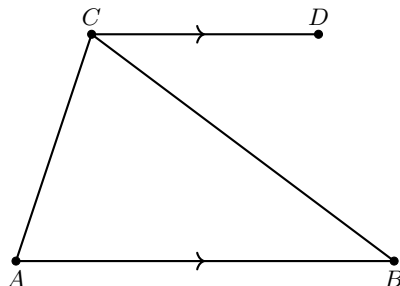
Proposisi 1.9. Jumlah besar sudut-sudut dari segitiga adalah 180° .

Bukti. Pada segitiga ABC , akan dibuktikan bahwa $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$. Buat titik D sedemikian sehingga $CD \parallel AB$ sebagaimana Gambar 1.2A. Memanfaatkan garis sejajar, berdasarkan Aksioma 1.8 berlaku $\angle ABC = \angle DCB$ dan

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle DCB + \angle BCA + \angle CAB$$

$$\begin{aligned}
 &= \angle DCA + \angle CAB \\
 &= 180^\circ
 \end{aligned}$$

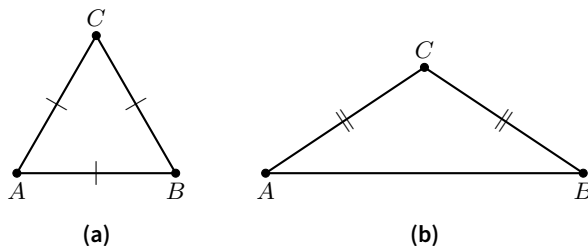
seperti yang ingin dibuktikan. □



Gambar 1.2A Membuktikan jumlah besar sudut segitiga

Beberapa segitiga memiliki kriteria khusus, yaitu kondisi sama panjang pada beberapa sisinya sebagaimana pada Gambar 1.2B. Jika panjang $CA = CB$, segitiga ABC disebut *segitiga sama kaki*. Jika panjang $AB = BC = CA$, segitiga ABC disebut *segitiga sama sisi*. Bukti proposisi berikut akan kita lewati.

Proposisi 1.10. Diberikan segitiga ABC . Panjang $CA = CB$ jika dan hanya jika $\angle CBA = \angle CAB$.

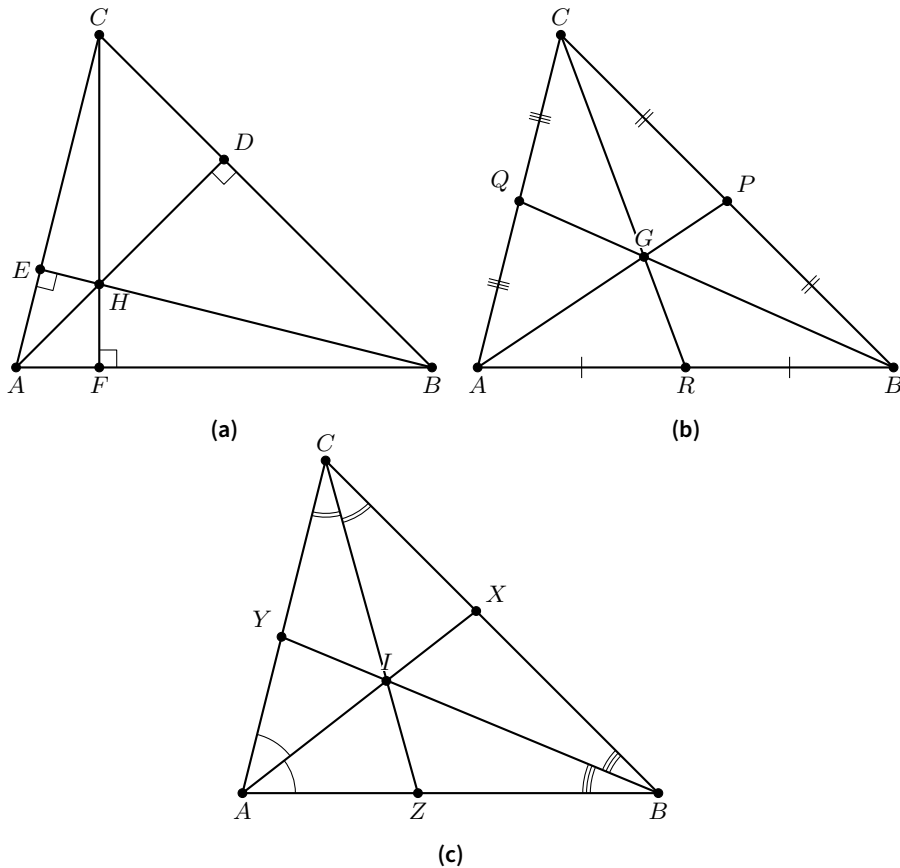


Gambar 1.2B (a) Segitiga sama sisi, (b) Segitiga sama kaki

Berdasarkan besar sudutnya, segitiga dibagi menjadi tiga: lancip, siku-siku, dan tumpul.

Definisi 1.11 (Segitiga Lancip, Siku-Siku, dan Tumpul). Diberikan segitiga ABC . Jika semua sudut segitiga ABC merupakan sudut lancip, ABC disebut *segitiga lancip*. Jika salah satu sudut segitiga ABC merupakan sudut siku-siku, ABC disebut *segitiga siku-siku*. Jika salah satu sudut segitiga ABC merupakan sudut tumpul, ABC disebut *segitiga tumpul*.

Sebuah segitiga memiliki beberapa unsur, seperti garis tinggi dan titik tinggi, garis berat dan titik berat, serta garis bagi dan titik bagi.



Gambar 1.2C Bertemu dengan teman-teman! (a) Garis tinggi, (b) Garis berat, (c) Garis bagi dari $\triangle ABC$

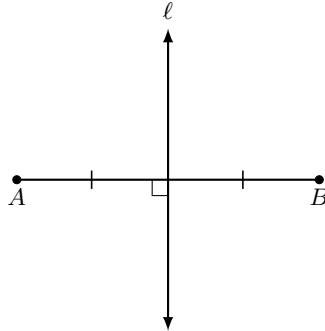
Definisi 1.12 (Garis Tinggi). Diberikan segitiga ABC . *Garis tinggi* segitiga ABC merupakan garis yang melalui titik sudut segitiga dan tegak lurus terhadap garis yang memuat sisi di hadapan titik sudut tersebut. Ketiga garis tinggi ini berpotongan di satu titik yang disebut *titik tinggi* (atau *orthocenter*). Titik D , E , F disebut sebagai *kaki tinggi* segitiga ABC .

Definisi 1.13 (Garis Berat). Diberikan segitiga ABC . *Garis berat* segitiga ABC merupakan garis yang melalui titik sudut segitiga dan melalui titik tengah sisi yang berhadapan. Ketiga garis berat ini berpotongan di satu titik, disebut *titik berat* (atau *centroid*).

Definisi 1.14 (Garis Bagi). Diberikan segitiga ABC . *Garis bagi* segitiga ABC merupakan garis yang melalui titik sudut segitiga dan membagi sudut segitiga menjadi dua bagian sama besar. Ketiga garis bagi ini berpotongan di satu titik, disebut *titik bagi* (atau *incenter*).

Terakhir, akan diberikan pengertian dari garis sumbu.

Definisi 1.15 (Garis Sumbu). Diberikan ruas garis AB . Garis sumbu dari $\overline{AB}$ merupakan garis yang tegak lurus terhadap AB dan melalui titik tengah $\overline{AB}$.

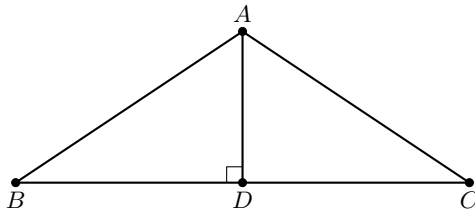


Gambar 1.2D Garis ℓ merupakan garis sumbu dari $\overline{AB}$

Subbab 1.2 diakhiri dengan sifat yang sering digunakan pada segitiga sama kaki. Selain itu, akan diberikan juga salah satu sifat titik bagi yang berkaitan dengan sudut.

Lema 1.16. Diberikan $\triangle ABC$ dan D kaki tinggi $\triangle ABC$ dari titik A . Pernyataan berikut ekuivalen:

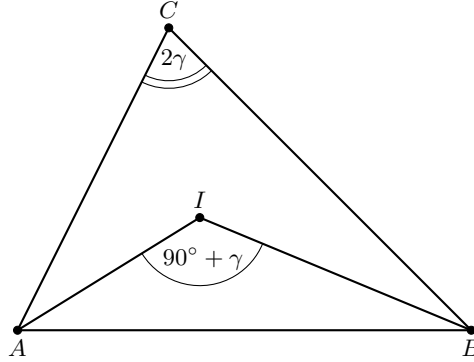
- (a) Panjang $AB = AC$.
- (b) Panjang $DB = DC$.
- (c) AD garis bagi $\angle BAC$.



Gambar 1.2E Kondisi ekuivalen yang berkaitan dengan segitiga sama kaki

Lema 1.17 (Sifat Titik Bagi). Diberikan $\triangle ABC$. Jika I titik bagi $\triangle ABC$, berlaku hubungan

$$\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2}, \quad \angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}, \quad \angle CIA = 90^\circ + \frac{\angle CBA}{2}.$$



Gambar 1.2F Hubungan sudut pada titik bagi dengan sudut segitiga

Bukti. Misalkan $\angle CAB = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, dan $\angle BCA = 2\gamma$, ini berarti berlaku $180^\circ = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$ yang memberikan $90^\circ = \alpha + \beta + \gamma$. Karena AI dan BI berturut-turut garis bagi $\angle CAB$ dan $\angle ABC$, maka $\angle IAB = \alpha$ dan $\angle IBA = \beta$. Dari segitiga AIB diperoleh

$$\begin{aligned} \angle AIB &= 180^\circ - \angle IAB - \angle IBA = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - \alpha - \beta = \alpha + \beta + 2\gamma \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) + \gamma \\ &= 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2}. \end{aligned}$$

Dua hubungan lainnya dapat diperoleh secara analog. □

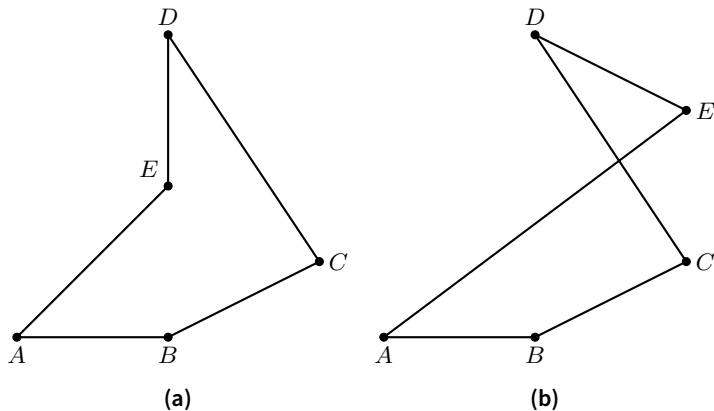
Latihan Akhir Subbab

Latihan 1.18. Menggunakan Proposisi 1.10, buktikan bahwa masing-masing besar sudut segitiga sama sisi adalah 60° .

1.3 Segi Banyak (Poligon)

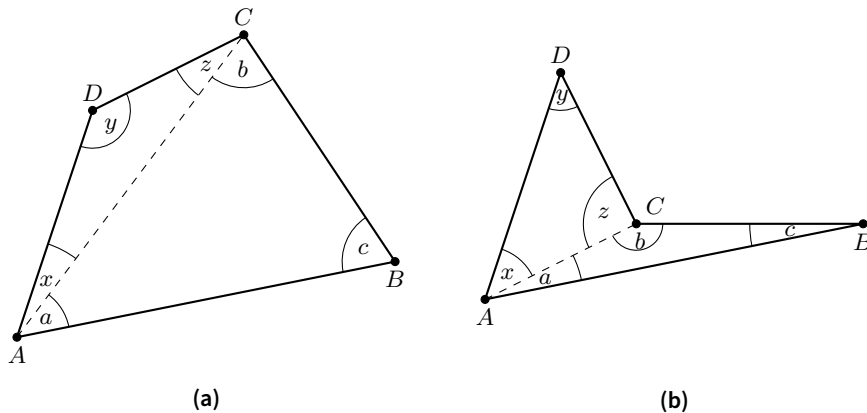
Apakah kamu pernah mendengar kata segiempat, segilima, atau poligon secara umum? *Polygon* merupakan bangun datar yang dibentuk menggunakan segmen-segmen sehingga terbentuk daerah tertutup. Poligon memiliki beberapa jenis, namun

kita hanya akan fokus pada *poligon sederhana*. Pada poligon sederhana, dua sisi yang tidak berdekatan tidak berpotongan, sedangkan dua sisi yang berdekatan hanya berpotongan pada titik ujung yang sama. Poligon yang terdiri dari n sisi disebut sebagai *segi- n* .



Gambar 1.3A (a) Poligon sederhana, (b) Bukan poligon sederhana

Dari sebuah segitiga dikembangkan menjadi segiempat, segilima, segienam, dan seterusnya. Kamu mungkin sudah tidak asing dengan fakta bahwa jumlah semua besar sudut dari segiempat adalah 360° . Lalu, bagaimana untuk segilima, segienam, dan seterusnya? Kita mulai dengan mencari tahu mengapa jumlah semua besar sudut dari segiempat adalah 360° .



Gambar 1.3B Membagi segiempat menjadi dua segitiga

Kita tinjau segiempat $ABCD$, kemudian hubungkan AC sehingga kita akan melihat $\triangle ABC$ dan $\triangle ACD$. Misalkan pula besar sudut-sudut sebagaimana pada Gambar 1.3B. Perhatikan segiempat Gambar 1.3B(a). Dari $\triangle ABC$ diperoleh $a + b + c = 180^\circ$,

sedangkan dari $\triangle ACD$ berlaku $x + y + z = 180^\circ$. Jadi, jumlah besar sudut dalam dari segiempat $ABCD$ adalah

$$\begin{aligned}\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB &= c + (b + z) + y + (x + a) \\ &= (a + b + c) + (x + y + z) \\ &= 180^\circ + 180^\circ \\ &= 360^\circ.\end{aligned}$$

Sedikit penyesuaian, untuk segiempat Gambar 1.3B(b) berlaku $b + z = \text{ref}\angle BCD$.

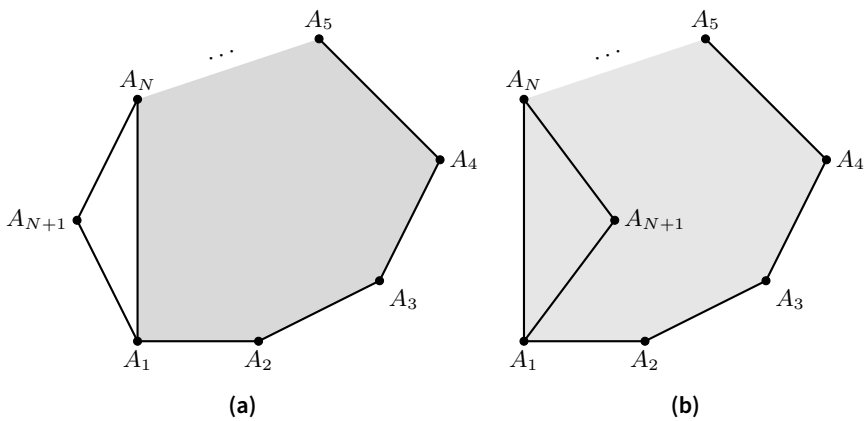
Menggunakan ide ini, cobalah untuk mengerjakan soal berikut.

Latihan 1.19. Tentukan jumlah besar semua sudut dari segilima, segienam, dan segitujuh.

Bagaimana untuk jumlah besar semua sudut dari segi- n ? Apakah kamu mendapatkan polanya? Jawabannya ada pada teorema berikut.

Teorema 1.20 (Jumlah Semua Besar Sudut Segi- n). Diberikan bilangan asli $n \geq 3$. Jumlah semua besar sudut dalam pada segi- n adalah $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Bukti. Akan dibuktikan dengan induksi. Untuk $n = 3$, jumlah semua besar sudut dalam segi-3 adalah $180^\circ = 180^\circ \cdot (3 - 2)$ menurut Proposisi 1.9. Jadi, $n = 3$ benar. Asumsikan untuk suatu $n = N$ berlaku jumlah sudut dalam dari segi- N , misalkan $A_1A_2 \cdots A_N$, adalah $180^\circ \cdot (N - 2)$. Akan ditinjau untuk $n = N + 1$. Ada dua kasus yang mungkin, yaitu $\angle A_1A_{N+1}A_N$ sebagai sudut dalam atau $\text{ref}\angle A_1A_{N+1}A_N$ sebagai sudut dalam poligon $A_1A_2 \cdots A_{N+1}$ sebagaimana Gambar 1.3C.



Gambar 1.3C (a) $\angle A_1A_{N+1}A_N$ sebagai sudut dalam, (b) $\text{ref}\angle A_1A_{N+1}A_N$ sebagai sudut dalam poligon $A_1A_2 \cdots A_{N+1}$

Dari hipotesis, jumlah semua besar sudut dalam $A_1A_2 \cdots A_N$ adalah

$$180^\circ \cdot (N - 2) = \sum_{i=1}^{N-2} \angle A_i A_{i+1} A_{i+2} + \angle A_{N-1} A_N A_1 + \angle A_N A_1 A_2.$$

Misalkan $\angle A_i A_{i+1} A_{i+2} = \alpha_{i+1}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, N-2$, $\angle A_{N-1} A_N A_1 = \alpha_N$, dan $\angle A_N A_1 A_2 = \alpha_1$. Misalkan pula $\angle A_1 A_N A_{N+1} = \beta_1$, $\angle A_N A_{N+1} A_1 = \beta_2$, dan $\angle A_{N+1} A_1 A_N = \beta_3$. Ini berarti $180^\circ \cdot (N - 2) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$.

Jika $\angle A_1 A_{N+1} A_N$ merupakan sudut dalam dari poligon $A_1A_2 \cdots A_{N+1}$, besar semua sudut dalam dari poligon ini adalah

$$\sum_{i=1}^{N+1} \angle A_i A_{i+1} A_{i+2}, \quad A_{N+2} = A_1 \text{ dan } A_{N+3} = A_2.$$

Jumlah semua besar sudut dalam $A_1A_2 \cdots A_{N+1}$ adalah

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{N-1} + (\alpha_N + \beta_1) + \beta_2 + (\beta_3 + \alpha_1).$$

Dari $\triangle A_1 A_N A_{N+1}$ berlaku $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180^\circ$. Jadi, jumlah semua besar sudut dalamnya adalah

$$180^\circ \cdot (N - 2) + 180^\circ = 180^\circ \cdot (N - 2 + 1) = 180^\circ \cdot ((N + 1) - 2),$$

sehingga benar untuk $n = N + 1$.

Sekarang, tinjau saat $\text{ref} \angle A_1 A_{N+1} A_N$ merupakan sudut dalam dari $A_1A_2 \cdots A_{N+1}$. Karena $\text{ref} \angle A_N A_{N+1} A_1 = 360^\circ - \beta_2$, jumlah semua besar sudut dalamnya adalah

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{N-1} + (\alpha_N - \beta_1) + (360^\circ - \beta_2) + (\alpha_1 - \beta_3).$$

Menggunakan hipotesis, diperoleh hasilnya adalah

$$180^\circ \cdot (N - 2) - 180^\circ + 360^\circ = 180^\circ((N + 1) - 2)$$

sehingga benar untuk $n = N + 1$.

Jadi, terbukti menurut induksi bahwa jumlah semua sudut dalam segi- n adalah $180^\circ \cdot (n - 2)$. □

Perhatikan Gambar 1.3B(b), segiempat tersebut memiliki salah satu sudut dalam yang lebih dari 180° , yaitu sudut $\text{ref} \angle BCD = b + z$. Sedangkan, segiempat yang lain semua besar sudut dalamnya kurang dari 180° . Berdasarkan besar sudutnya, poligon dibagi menjadi dua: poligon konveks dan poligon konkaf.

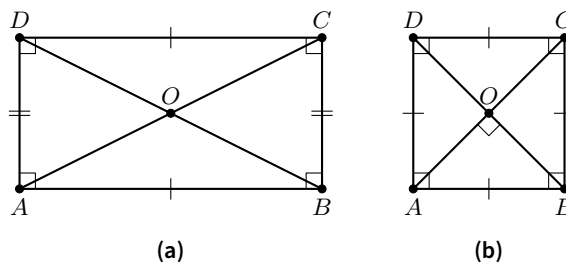
Definisi 1.21 (Poligon Konveks dan Konkaf). Jika semua besar sudut dalam dari poligon kurang dari atau sama dengan 180° , poligon tersebut disebut *poligon konveks*. Jika ada besar sudut dalamnya yang lebih dari 180° , poligon tersebut disebut *poligon konkaf*.

Definisi 1.22 (Poligon Beraturan). *Poligon beraturan* merupakan bangun datar yang semua sisinya sama panjang dan semua sudut dalamnya sama besar.

Dari semua poligon, akan dibahas beberapa poligon seperti persegi, persegi panjang, dan lain-lain. Poligon yang akan dibahas berikutnya memiliki ciri-ciri khusus yang akan sering digunakan. Pembuktian dari sifat-sifat ini akan kita lewati terlebih dahulu.

Persegi Panjang dan Persegi

Persegi panjang merupakan segiempat yang keempat sudutnya merupakan sudut siku-siku. Diberikan persegi panjang $ABCD$, kemudian AC dan BD disebut *diagonal* dari persegi panjang. Misalkan $O = AC \cap BD$.



Gambar 1.3D (a) Persegi panjang, (b) Persegi

Adapun ciri-ciri persegi panjang:

1. Semua besar sudutnya 90° , yaitu $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$.
2. Panjang sisi berhadapannya sama, yaitu $AB = CD$ dan $BC = DA$.
3. Berlaku $OA = OB = OC = OD$.

Jika persegi panjang $ABCD$ memenuhi $AB = BC = CD = DA$, maka $ABCD$ disebut *persegi*. Selain sifat di atas, berikut sifat tambahan yang berlaku pada persegi:

1. Diagonalnya berpotongan tegak lurus.
2. AC garis bagi $\angle BAD$ dan $\angle BCD$, serta BD garis bagi $\angle ABC$ dan $\angle CDA$.

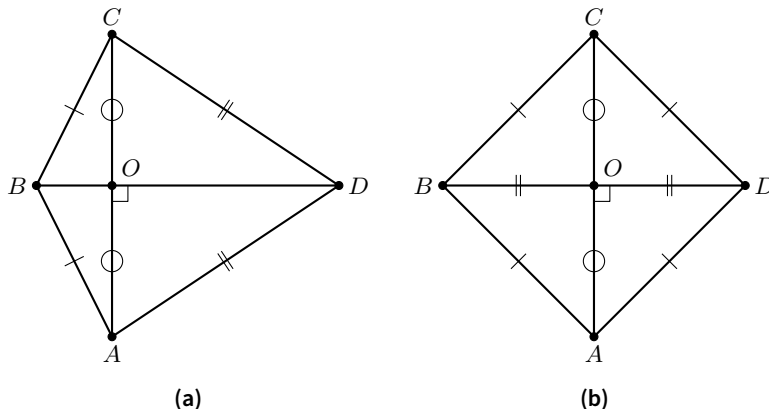
Perlu dipahami bahwa persegi juga termasuk persegi panjang.

Proposisi 1.23 (Persegi Panjang). Diberikan segiempat $ABCD$ dan O adalah titik potong AC dengan BD . Pernyataan berikut ekuivalen:

- (a) $ABCD$ persegi panjang.
- (b) $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB$.
- (c) $OA = OB = OC = OD$.

Layang-Layang dan Belah Ketupat

Layang-layang merupakan segiempat yang diagonalnya berpotongan tegak lurus, serta dua pasang sisi berdekatan dengan panjang yang sama. Misalkan $ABCD$ layang-layang dan $AC \cap BD = O$.



Gambar 1.3E (a) Layang-layang, (b) Belah ketupat

Adapun ciri-ciri layang-layang:

1. Memiliki dua pasang sisi yang sama panjang. Dalam hal ini, $BC = BA$ dan $DC = DA$.
2. Diagonalnya berpotongan tegak lurus. Dalam hal ini, $AC \perp BD$.
3. Salah satu diagonalnya terbagi menjadi dua bagian sama panjang oleh diagonal lainnya. Dalam hal ini, $OA = OC$.
4. Memiliki sepasang sudut berhadapan sama besar, yaitu $\angle BAD = \angle BCD$.

Jika layang-layang $ABCD$ memenuhi $AB = BC = CD = DA$, $ABCD$ disebut *belah ketupat*. Selain berlaku empat sifat di atas, berikut sifat tambahan yang berlaku pada belah ketupat:

1. Kedua diagonalnya terbagi menjadi dua bagian sama panjang. Dalam hal ini, berlaku $OA = OC$ dan $OB = OD$.
2. Memiliki dua pasang sudut berhadapan sama besar, yaitu $\angle BAD = \angle BCD$ dan $\angle CDA = \angle CBA$.

Proposisi 1.24 (Layang-Layang). Diberikan segiempat konveks $ABCD$ dan O perpotongan AC dengan BD . Pernyataan berikut ekuivalen:

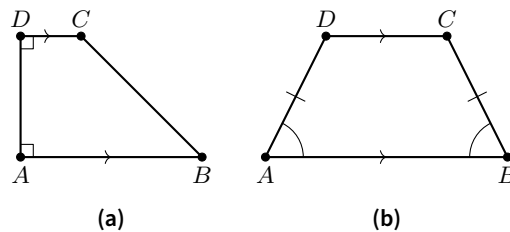
- (a) $ABCD$ layang-layang dengan $BC = BA$ dan $DA = DC$.
- (b) Panjang $BA = BC$ dan $DA = DC$.
- (c) $BD \perp AC$ dan panjang $OA = OC$.
- (d) $\angle ADB = \angle CDB$ dan $\angle CBD = \angle ABD$.
- (e) $\angle ADB = \angle CDB$ dan $DC = DA$.

Proposisi 1.25 (Belah Ketupat). Diberikan segiempat konveks $ABCD$ dan O perpotongan AC dengan BD . Pernyataan berikut ekuivalen:

- (a) $ABCD$ belah ketupat.
- (b) $AC \perp BD$ serta panjang $OB = OD$ dan $OA = OC$.
- (c) Panjang $AB = BC = CD = DA$.

Trapesium dan Jajar Genjang

Trapesium merupakan bangun segiempat dan memiliki setidaknya sepasang sisi yang sejajar. Sebuah trapesium disebut *trapesium siku-siku* apabila terdapat sudut dalamnya yang berukuran 90° . Sedangkan, sebuah trapesium disebut *trapesium sama kaki* apabila sepasang sudut alasnya sama besar. Jika BC tidak sejajar AD , kondisi ini ekuivalen dengan kedua kaki trapesium sama panjang.

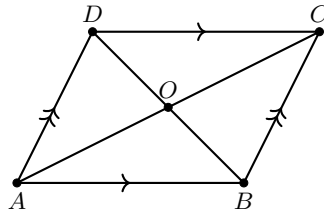


Gambar 1.3F (a) Trapesium siku-siku, (b) Trapesium sama kaki

Proposisi 1.26 (Trapesium Sama Kaki). Diberikan trapesium $ABCD$ yang memenuhi $AB \parallel CD$ dan $E = AC \cap BD$. Jika AD dan BC tidak sejajar, kondisi berikut ekuivalen:

- (a) $ABCD$ trapesium sama kaki.
- (b) $CB = DA$.
- (c) $AC = BD$.
- (d) $EC = ED$.
- (e) $EB = EA$.

Jika trapesium $ABCD$ memiliki dua pasang sisi yang sejajar, $ABCD$ disebut *jajar genjang*.



Gambar 1.3G Banyak kondisi ekuivalen dari jajar genjang

Proposisi 1.27 (Jajar Genjang). Diberikan segiempat konveks $ABCD$ dan O perpotongan AC dengan BD . Pernyataan berikut ekuivalen:

- (a) $ABCD$ jajar genjang.
- (b) $AB \parallel CD$ dan $BC \parallel DA$.
- (c) Panjang $OA = OC$ dan $OB = OD$.
- (d) $\angle BAD = \angle BCD$ dan $\angle ABC = \angle ADC$.
- (e) Panjang $AB = CD$ dan $BC = DA$.

Sifat-sifat poligon yang telah dijelaskan sangat penting untuk diingat. Terkadang, informasi yang diberikan pada soal tidak menyebut langsung jenis bangunnya, melainkan ditunjukkan berdasarkan sifat-sifatnya. Sebagai contoh, pada soal diberikan informasi segiempat $ABCD$ memenuhi $AB \parallel CD$ dan $BC \parallel DA$, maka kita harus menyadari bahwa segiempat tersebut merupakan jajar genjang.

Latihan Akhir Subbab

Latihan 1.28. Tentukan besar masing-masing sudut dari segi- n beraturan.

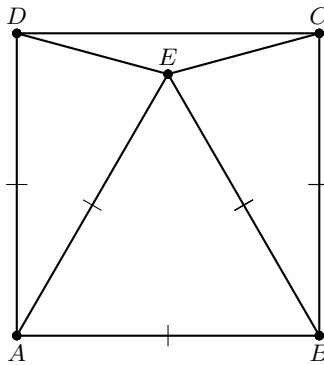
Latihan 1.29. Apakah persegi termasuk layang-layang atau belah ketupat? Apakah persegi panjang termasuk layang-layang atau belah ketupat?

Latihan 1.30. Apakah belah ketupat dan persegi termasuk jajargenjang?

Latihan 1.31. Jika $ABCD$ persegi, jelaskan mengapa $\angle BAC = \angle DAC = 45^\circ$.

1.4 Contoh Soal

Contoh 1.32. Diberikan persegi $ABCD$ dan E terletak di dalam persegi sehingga ABE segitiga sama sisi. Tentukan besar $\angle CED$.



Gambar 1.4A Ilustrasi untuk Contoh 1.32

Walkthrough. Mari kita coba amati satu per satu menggunakan informasi yang diberikan. Karena $ABCD$ persegi, maka panjang $AB = BC = CD = DA$. Lalu, ABE segitiga sama sisi sehingga panjang $AB = BE = EA$. Apa yang dapat kita simpulkan? Kita peroleh

$$AE = EB = AB = BC = CD = DA.$$

Perhatikan bahwa panjang $AE = AD$, dari sifat segitiga sama kaki (Proposisi 1.10) berlaku $\angle AED = \angle ADE$. Dengan cara yang sama, $\angle BEC = \angle BCE$.

Kita sudah memanfaatkan kondisi sama panjang dari persegi dan segitiga sama sisi. Apa yang belum kita manfaatkan? Besar sudut dari segitiga sama sisi! Perhatikan bahwa $\angle AEB = \angle EBA = \angle BAE = 60^\circ$ sehingga berakibat

$$\angle DAE = \angle DAB - \angle EAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Misalkan $\angle AED = \angle ADE = x$, dari segitiga ADE diperoleh

$$180^\circ = 30^\circ + x + x = 30^\circ + 2x \implies x = 75^\circ.$$

Dengan cara yang sama, $\angle BEC = \angle BCE = 75^\circ$. Oleh karena itu,

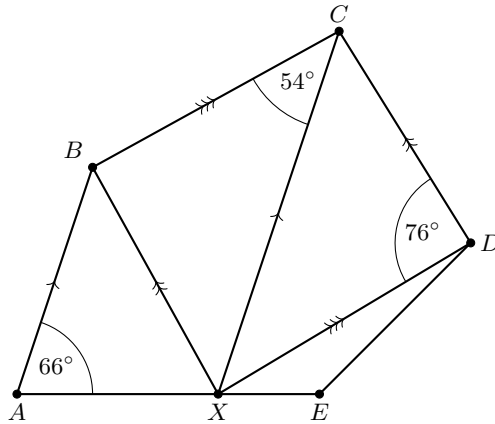
$$\angle DEC = 360^\circ - \angle AED - \angle AEB - \angle BEC = 360^\circ - 75^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 150^\circ.$$

Berikut merupakan salah satu penyajian solusi untuk Contoh 1.32, kamu juga diharapkan mencoba dengan gaya bahasamu sendiri.

Solusi. Perhatikan bahwa ABE merupakan segitiga sama sisi sehingga berlaku $\angle EAB = \angle EBA = 60^\circ$ yang berakibat $\angle EAD = \angle EBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Selain itu, berlaku $EA = EB = AB = AD = BC$. Karena $AE = AD$, maka $\angle AED = \frac{180^\circ - \angle EAD}{2} = 75^\circ$. Dengan cara yang sama, $\angle BEC = 75^\circ$. Mengingat $\angle AEB = 60^\circ$, berlaku

$$\angle CED = 360^\circ - \angle AED - \angle AEB - \angle BEC = 360^\circ - 75^\circ - 60^\circ - 75^\circ = \boxed{150^\circ}. \blacktriangledown$$

Contoh 1.33. Diberikan segilima $ABCDE$. Terdapat titik X pada segmen AE yang memenuhi $XB \parallel CD$, $XD \parallel BC$, dan $XC \parallel AB$. Jika $\angle BCX = 54^\circ$, $\angle CDX = 76^\circ$, dan $\angle BAE = 66^\circ$, tentukan besar $\angle AXB - \angle DXE$.



Gambar 1.4B Ilustrasi untuk Contoh 1.33

Walkthrough. Banyaknya kondisi garis sejajar mengingatkan kita pada Aksioma 1.8 dan kriteria jajargenjang (Proposisi 1.27). Apabila kita memperhatikan segiempat $XDCB$, berlaku $XD \parallel BC$ dan $XB \parallel DC$ sehingga $XDCB$ jajargenjang. Ini berarti $\angle CBX = \angle CDX = 76^\circ$. Karena kita telah diberikan $\angle BCX = 54^\circ$, dapat diperoleh $\angle BXC = 180^\circ - 76^\circ - 54^\circ = 50^\circ$.

Karena $BC \parallel XD$, maka $\angle CXD = \angle BCX = 54^\circ$. Untuk mengetahui $\angle AXB$, cukup kita dapatkan $\angle AXC$. Lalu, ada apa dengan sudut ini? Ingat kembali bahwa kita belum memanfaatkan fakta $XC \parallel AB$. Ini berarti

$$\angle AXC + \angle XAB = 180^\circ \implies \angle AXC = 180^\circ - \angle XAB = 180^\circ - 66^\circ = 114^\circ.$$

Ini berarti $\angle AXB = 114^\circ - 50^\circ = 64^\circ$ dan

$$\angle DXE = 180^\circ - \angle AXC - \angle DXC = 180^\circ - 114^\circ - 54^\circ = 12^\circ.$$

Jadi, $\angle AXB - \angle DXE = 52^\circ$.

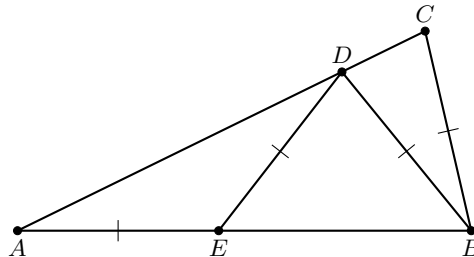
Solusi. Perhatikan bahwa $XDCB$ jajar genjang karena $XD \parallel BC$ dan $XB \parallel DC$. Ini berarti $\angle CBX = \angle CDX = 76^\circ$ sehingga $\angle BXC = 180^\circ - 76^\circ - 54^\circ = 50^\circ$ dan $\angle DXC = \angle BCX = 54^\circ$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} \angle AXB - \angle DXE &= (\angle AXC - \angle CXB) - (\angle EXC - \angle CXD) \\ &= (180^\circ - \angle BAX - \angle CXB) - (\angle EAB - \angle CXD) \\ &= (180^\circ - 66^\circ - 50^\circ) - (66^\circ - 54^\circ) \\ &= 64^\circ - 12^\circ \\ &= \boxed{52^\circ}. \end{aligned}$$

▼

Terkadang, kita perlu melakukan manipulasi aljabar dalam menentukan sudut-sudut. Perhatikan Contoh 1.34 berikut.

Contoh 1.34 (AIME 2020). Pada segitiga ABC dengan $AB = AC$, titik D berada di antara A dan C pada sisi $\overline{AC}$, dan E berada di antara A dan B pada sisi $\overline{AB}$ sedemikian sehingga $AE = ED = DB = BC$. Besar derajat dari $\angle ABC$ adalah $\left(\frac{m}{n}\right)^\circ$, di mana m dan n adalah dua bilangan asli yang relatif prima. Tentukan nilai $m + n$.



Gambar 1.4C Ilustrasi untuk Contoh 1.34, AIME 2020

Walkthrough. Di sini kita tidak diberikan informasi apa pun mengenai besar sudut, melainkan hanya kondisi sama panjang. Ada dugaan kuat bahwa soal ini diselesaikan dengan memanfaatkan sifat sudut pada segitiga sama kaki. Kita coba misalkan saja $\angle ABC = \alpha$, di sini kita mencoba untuk menemukan nilai α . Ingat bahwa panjang $AB = AC$, hal pertama yang kita peroleh adalah $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$ (Proposisi 1.10).

Kita sudah memanfaatkan informasi $AB = AC$, sekarang akan dimanfaatkan informasi $AE = ED = DB = BC$. Sejauh ini, kita tahu $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$. Ini berarti

$$EA = ED \implies \angle EAD = \angle EDA,$$

$$DE = DB \implies \angle DEB = \angle DBE,$$

$$BD = BC \implies \angle BCD = \angle BDC.$$

Informasi yang sejauh ini kita peroleh memberikan $\angle BDC = \angle BCD = \alpha$ sehingga $\angle BDC = \alpha$. Namun, sekarang kita masih belum memiliki cukup alat untuk mengetahui $\angle EDB$ dan $\angle ADE$, kecuali $\angle ADE + \angle EDB = 180^\circ - \angle BDC = 180^\circ - \alpha$. Karena kita sudah mengetahui $\angle BCD = \angle BDC = \alpha$, dari $\triangle BDC$ kita bisa mendapatkan $\angle DBC = 180^\circ - 2\alpha$. Karena $\angle ABC = \alpha$, kita akan mendapatkan

$$\angle DEB = \angle DBE = \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = 3\alpha - 180^\circ.$$

Otomatis, dari $\triangle BDE$ kita baru mendapatkan

$$\angle BDE = 180^\circ - (3\alpha - 180^\circ) - (3\alpha - 180^\circ) = 540^\circ - 6\alpha.$$

Nah! Baru di sini kita bisa mendapatkan

$$\angle EAD = \angle EDA = 180^\circ - \angle EDB - \angle BDC = 180^\circ - (540^\circ - 6\alpha) - \alpha = 5\alpha - 360^\circ.$$

Dari $\triangle AED$ kita peroleh pula

$$\angle AED = 180^\circ - (5\alpha - 360^\circ) - (5\alpha - 360^\circ) = 900^\circ - 10\alpha.$$

Menariknya, kita tahu bahwa $180^\circ = \angle AED + \angle BED$ dan dari sini kita dapatkan α .

Solusi. Misalkan $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$. Karena panjang $BC = BD$ dan $DE = DB$, maka $\angle BDC = \angle BCD = \alpha$ sehingga $\angle DBC = 180^\circ - 2\alpha$. Dari sini diperoleh $\angle DEB = \angle EBD = \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = 3\alpha - 180^\circ$. Ini berarti

$$\angle EDB = 180^\circ - 2(3\alpha - 180^\circ) = 540^\circ - 6\alpha$$

sehingga diperoleh pula

$$\angle ADE = 180^\circ - (540^\circ - 6\alpha) - \alpha = 5\alpha - 360^\circ.$$

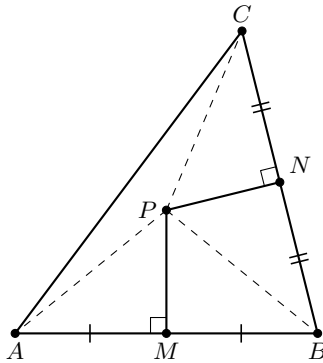
Karena panjang $EA = ED$, maka $\angle AED = 180^\circ - 2(5\alpha - 360^\circ) = 900^\circ - 10\alpha$. Jadi,

$$180^\circ = \angle AED + \angle BED = 900^\circ - 10\alpha + 3\alpha - 180^\circ \implies \alpha = \left(\frac{540}{7}\right)^\circ.$$

Jadi, $m = 540$ dan $n = 7$ sehingga $m + n = \boxed{547}$. ▼

Contoh 1.35. Diberikan segitiga ABC , M dan N berturut-turut titik tengah dari AB dan BC . Terdapat titik P di dalam segitiga ABC sehingga $PM \perp AB$ dan $PN \perp BC$. Jika $\angle APC = 128^\circ$, tentukan $\angle ABC$.

Walkthrough. Perhatikan bahwa kita diberikan kondisi $AM = MB$ dan $PM \perp AB$. Ingat sifat segitiga sama kaki pada Lema 1.16. Kondisi tersebut memberikan kita panjang $PA = PB$ dan PM garis bagi $\angle APB$. Dengan alasan yang serupa, untuk $PN \perp BC$ dan $NB = NC$ berakibat panjang $PB = PC$ dan PN garis bagi $\angle BPC$. Misalkan $\angle ABP = \alpha$ dan $\angle CBP = \beta$, di sini kita ingin menentukan $\angle ABC = \alpha + \beta$.



Gambar 1.4D Ilustrasi untuk Contoh 1.35

Dari $\triangle PMB$, kita punya

$$\angle MPB = 180^\circ - \angle MBP - \angle BMP = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha.$$

Karena PM garis bagi $\angle APB$, kita punya juga $\angle APM = \angle BPM = 90^\circ - \alpha$. Sekarang, dari $\triangle PNB$ kita peroleh

$$\angle BPN = 180^\circ - \angle PBN - \angle BNP = 180^\circ - \beta - 90^\circ = 90^\circ - \beta.$$

Ingat bahwa PN garis bagi $\angle BPC$, maka $\angle CPN = \angle BPN = 90^\circ - \beta$. Sekarang, apa yang bisa kita amati? Kita sudah menyatakan $\angle APM$, $\angle BPM$, $\angle BPN$, dan

$\angle CPN$ dalam α dan β , serta $\angle APC$ telah diketahui. Dari sini, kita dapat amati bahwa jumlah semua sudut tersebut sama saja dengan satu putaran penuh, yaitu sebesar 360° . Nanti, kita akan dapatkan $\alpha + \beta$ yang diminta.

Solusi. Karena $PM \perp AB$ dan panjang $AM = MB$, maka $PA = PB$ dan $\angle APM = \angle BPM$. Dengan alasan serupa, kita punya panjang $PB = PC$ dan $\angle BPN = \angle CPN$. Misalkan $\angle ABP = \alpha$ dan $\angle CBP = \beta$. Dari $\triangle PMB$ dan $\triangle PNB$ diperoleh $\angle MPB = 90^\circ - \alpha$ dan $\angle BPN = 90^\circ - \beta$. Dari sini diperoleh $\angle APM = \angle BPM = 90^\circ - \alpha$ dan $\angle CPN = \angle BPN = 90^\circ - \beta$. Kita punya

$$\begin{aligned} 360^\circ &= \angle APM + \angle BPM + \angle BPN + \angle CPN + \angle APC \\ &= 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta + 90^\circ - \beta + 128^\circ \\ &= 360^\circ - 2\alpha - 2\beta + 128^\circ \\ 2\alpha + 2\beta &= 128^\circ. \end{aligned}$$

Bagi kedua ruas dengan 2, kita punya $\angle ABC = \alpha + \beta = \boxed{64^\circ}$. ▼

Sebenarnya, ada beberapa alternatif bagaimana untuk menentukan $\alpha + \beta$. Kamu dapat mencobanya secara mandiri menggunakan informasi yang telah didapat. Pembahasan yang lebih menarik tentang garis sumbu, terutama titik P , akan dibahas pada Bab 2 dan Bab 3.

Contoh 1.34 dan Contoh 1.35 menunjukkan bahwa kita tidak perlu ragu memisalkan beberapa sudut dalam soal. Jika merasa suatu sudut tidak bisa diperoleh langsung dengan kondisi yang diberikan, pemisalan bisa menjadi langkah awal.

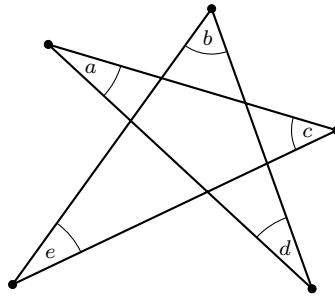
1.5 Soal

Kamu dituntut mengumpulkan setidaknya 35♥.

- [1♥] **Soal 1.36 (OSK 2007).** Pada segitiga PQR sama sisi, diberikan titik-titik S dan T berturut-turut pada sisi QR dan PR sedemikian rupa sehingga $\angle SPR = 40^\circ$ dan $\angle TQR = 35^\circ$. Jika X perpotongan garis-garis PS dan QT , tentukan $\angle SXT$. **Hints:** 151
- [1♥] **Soal 1.37 (PEMNAS SD 2024).** Diberikan segitiga ABC dan titik D pada sisi BC . Jika panjang $BA = BD$ dan $\angle BAC - \angle BDA = 23^\circ$, tentukan besar $\angle DAC$. **Hints:** 215
- [1♥] **Soal 1.38 (OSP 2005).** Diberikan segitiga ABC dan D terletak di $\overline{BC}$. Jika panjang $AB = AC$, $AD = BD$, dan $\angle DAC = 39^\circ$, tentukan besar $\angle BAD$. **Hints:** 114 300
- [1♥] **Soal 1.39 (AMSP Team 2015).** Diberikan segiempat konveks $ABCD$ yang memenuhi $\angle ABC = 144^\circ$, $\angle ADC = 105^\circ$, dan $AB = BD = DC$. Tentukan $\angle BCD - \angle BAD$.

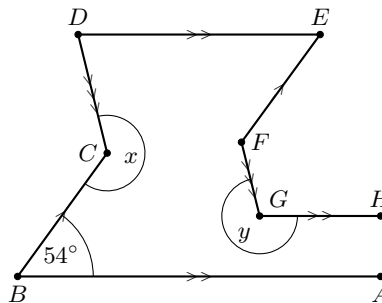
Hints: 286 77 **Sol:** Hal. 377

- [2♥] **Soal 1.40 (CMIMC 2023).** Diberikan segitiga ABC dengan $AB = AC$. Garis bagi $\angle ABC$ dan $\angle ACB$ berpotongan di I . Jika besar $\angle CIA = 130^\circ$, tentukan besar $\angle CAB$.
Hints: 270
- [2♥] **Soal 1.41.** Diberikan segitiga ABC dan D titik tengah $\overline{BC}$. Jika panjang $DA = DB$, tentukan besar $\angle BAC$. Hints: 114 318
- [2♥] **Soal 1.42 (India PRMO 2018).** Misalkan D berada pada ruas garis BC dari segitiga ABC . Misalkan I_1 dan I_2 berturut-turut titik bagi dari segitiga ABD dan ACD . Misalkan AI_1 dan AI_2 memotong BC berturut-turut di E dan F . Jika $\angle BI_1E = 60^\circ$, tentukan $\angle CI_2F$. Hints: 340 Sol: Hal. 378
- [2♥] **Soal 1.43.** Diberikan segi- n beraturan $A_1A_2 \cdots A_n$ dengan $n \geq 4$. Jika besar $\angle A_1A_3A_4 = 120^\circ$, tentukan nilai n . Hints: 177 343
- [3♥] **Soal 1.44.** Misalkan a, b, c, d , dan e berturut-turut menyatakan besar sudut pada titik-titik ujung bintang lima. Tentukan $a + b + c + d + e$. Hints: 274 33



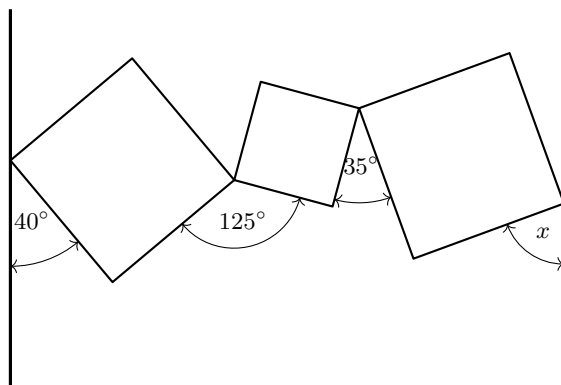
Gambar 1.5A Ilustrasi untuk Soal 1.44

- [3♥] **Soal 1.45 (PEMNAS SMP 2025).** Diketahui AB, GH , dan DE saling sejajar, BC sejajar EF , dan FG sejajar CD . Jika $\angle ABC = 54^\circ$, tentukan $x + y$. Hints: 371 55



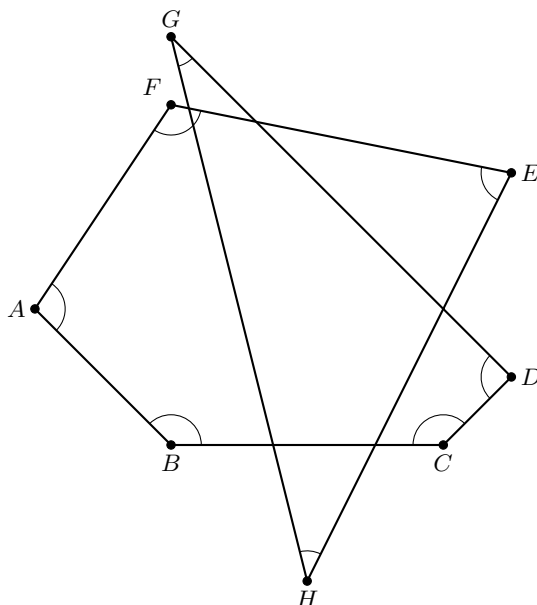
Gambar 1.5B Ilustrasi untuk Soal 1.45, PEMNAS SMP 2025

- [3♥] **Soal 1.46.** Diketahui jajar genjang $ABCD$ dengan $\angle ADC = 30^\circ$. Titik E pada $\overline{AB}$ sehingga $AE = BE$ dan $\angle EDC = 15^\circ$. Tentukan besar $\angle BCE$. **Hints:** 130 328 **Sol:** Hal. 378
- [3♥] **Soal 1.47 (OSN SMP 2004).** Empat persegi yang titik sudutnya tersambung seperti pada Gambar 1.5C berada di antara dua garis sejajar. Tentukan besar sudut yang ditandai dengan x . **Hints:** 244 379 **Sol:** Hal. 379



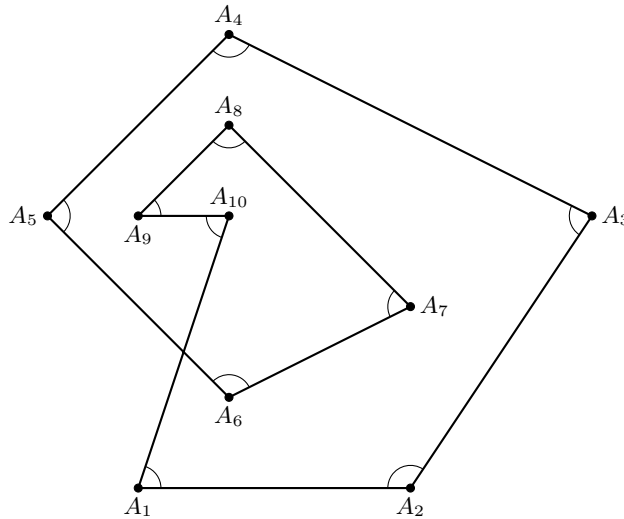
Gambar 1.5C Ilustrasi untuk Soal 1.47, OSN SMP 2004

- [4♥] **Soal 1.48.** Tentukan $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G + \angle H$. **Hints:** 397 51



Gambar 1.5D Ilustrasi untuk Soal 1.48

- [3♥] **Soal 1.49 (KSM Kota 2019).** Diberikan segilima beraturan $ABCDT$. Titik E dan F terletak di dalam segilima sehingga segitiga ABE dan CDF sama sisi. Tentukan besar $\angle ECF$. **Hints:** 63 196 **Sol:** Hal. 380
- [4♥] **Soal 1.50.** Diberikan $\triangle ABC$. Titik D dan E masing-masing terletak pada sisi BC sehingga AD tegak lurus BC dan AE garis bagi $\angle BAC$. Jika $\angle ABC = 40^\circ + \angle ACB$, tentukan besar $\angle DAE$. **Hints:** 114 91 354
- [4♥] **Soal 1.51.** Jika $\angle A_{10} = 67^\circ$, tentukan $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \cdots + \angle A_9$. **Hints:** 210 411



Gambar 1.5E Ilustrasi untuk Soal 1.51

- [4♥] **Soal 1.52 (KTOM Mei 2024).** Diberikan bangun segi- n beraturan dengan $n \geq 4$. Misalkan A, B, C, D adalah titik sudut berurutan pada bangun tersebut. Jika garis AB tegak lurus dengan garis bagi sudut $\angle BDC$, tentukan nilai dari n . **Hints:** 307 123 387 **Sol:** Hal. 380
- [5♥] **Soal 1.53 (Turkey 2010).** Misalkan D dan E berturut-turut terletak pada sisi AB dan AC pada segitiga ABC dengan panjang $AB = AC$, $\angle BAC = 40^\circ$. Misalkan F pada garis BC sehingga C di antara B dan F . Jika panjang $BE = CF$, panjang $AD = AE$, dan $\angle BEC = 60^\circ$, tentukan besar $\angle DFB$. **Hints:** 84 19 227 **Sol:** Hal. 381
- [5♥] **Soal 1.54.** Diberikan segitiga sama sisi ABC . Titik M, N, P berturut-turut pada sisi BC, CA, AB memenuhi

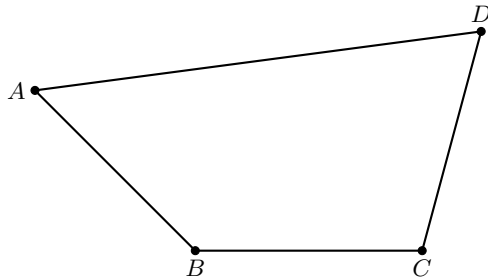
$$\angle NBC = 15^\circ, \quad \angle ANP = 30^\circ, \quad \angle BPM = 45^\circ.$$

Tentukan besar $\angle MNC$. **Hints:** 260 41 406 **Sol:** Hal. 382

[5♥] **Soal 1.55 (IMSO 2021).** Pada Gambar 1.5F berikut, segiempat $ABCD$ memenuhi

$$AB = BC = CD, \quad \angle ABC = 135^\circ, \quad \angle BCD = 105^\circ.$$

Tentukan, dalam satuan derajat, besar dari $\angle ADC$. **Hints:** 283 73



Gambar 1.5F Ilustrasi untuk Soal 1.55, IMSO 2021