Soal dan Solusi
Kompetisi Sains Nasional 2021
Tingkat Provinsi
Jenjang SMA/MA Sederajat

Wildan Bagus Wicaksono

Kenji Gunawan

Updated 21 Oktober 2021

Ucapan terima kasih sebesar-besarnya atas bantuan-bantuan dari:

Ethan Anderson Surya Thio (SMP)

Haidar Prayata Wirasana (DKI Jakarta)

Rafael Kristoforus Yanto (Banten)

Rizky Rajendra Anantadewa (Jawa Timur)

Stephen Sanjaya (Alumni)

Daftar Isi

Naskah Asli **3**

Bagian Pertama (60 menit) 3

Bagian Kedua (150 menit) 4

1 Soal dan Solusi **5**

1.1 Bagian Pertama 5

1.2 Bagian Kedua 13

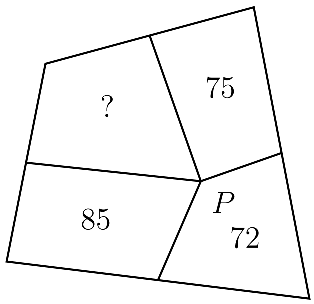
KSN Provinsi 2021

SOAL BAGIAN PERTAMA
WAKTU: 60 MENIT

Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat, dan penggaris segitiga. Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah empat.

1. Tentukan banyak cara membagikan delapan buku cerita berbeda kepada tiga anak, dengan setiap anak menerima paling sedikit dua buku.

2. Titik P terletak di dalam suatu segiempat dan dihubungkan dengan titik tengah setiap sisi segiempat tersebut, seperti di gambar. Dari konstruksi ini, segiempat tersebut terbagi menjadi empat buah daerah. Luas tiga dari empat daerah tersebut telah ditulis di dalam masing-masing daerah. Tentukanlah luas dari daerah yang belum diketahui (ditandai dengan tanda tanya).



3. Misalkan a, b, c bilangan bulat positif, dan definisikan $P(x) = ax^2 + bx + c$. Tentukan banyak tripel (a, b, c) sehingga $a, b, c \leq 10$ dan $P(x)$ habis dibagi 6 untuk semua x bilangan bulat positif.

4. Tentukanlah semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan berikut:
$$\begin{aligned}(x^2 + y + 1)(y^2 + x + 1) &= 4\\ (x^2 + y)^2 + (y^2 + x)^2 &= 2.\end{aligned}$$

5. Diberikan segitiga ABC, dengan $\angle ABC = 120°$. Titik-titik A_1,B_1, dan C_1 berturut-turut terletak pada segmen BC, CA, dan AB, sehingga garis AA_1, BB_1, dan CC_1 merupakan garis-garis bagi dari sudut-sudut segitiga ABC. Tentukanlah besar $\angle A_1B_1C_1$.

KSN Provinsi 2021

SOAL BAGIAN KEDUA

WAKTU: 150 MENIT

Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat, dan penggaris segitiga. Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah tujuh angka.

6. Suta menuliskan 2021 bilangan asli pertama di papan tulis, sehingga setiap bilangan ditulis tepat sekali. Ia kemudian melingkari beberapa bilangan di antaranya, kemudian menjumlahkan seluruh bilangan yang ia lingkari dan mendapatkan nilai K. Kemudian, Suta juga menjumlahkan seluruh bilangan yang tidak ia lingkari dan mendapatkan nilai L. Tunjukkan Suta dapat memilih bilangan yang ia lingkari di awal, sehingga $K - L = 2021$.

7. Tentukanlah semua bilangan asli $n > 3$ sehingga $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$ habis membagi $n + 1$ dan $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ habis membagi $n - 1$.
   Catatan: $\lfloor x \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.

8. Diberikan segitiga ABC dengan titik berat G. Titik D merupakan titik tengah AC. Garis yang melalui G dan sejajar dengan BC memotong AB di E. Buktikan bahwa $\angle AEC = \angle DGC$ jika dan hanya jika $\angle ACB = 90^\circ$.

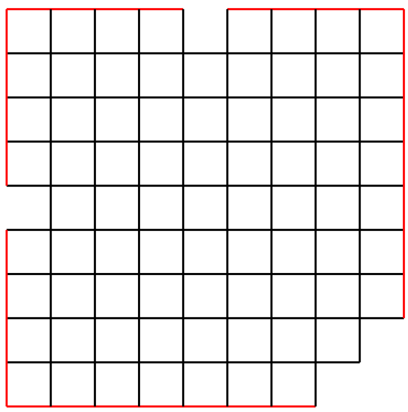
9. Misal X himpunan yang berisikan bilangan rasional positif yang memenuhi dua persyaratan berikut:

   (i) Jika x rasional dan $2021 \leq x \leq 2022$, maka $x \in X$.

   (ii) Jika $x, y \in X$, maka $\frac{x}{y}$ juga di X.

   Buktikan seluruh bilangan rasional positif termuat di X.

10. Lima buah petak dari papan catur berukuran 9×9 dibuang seperti terlihat pada gambar. Seluruh papan catur tersebut akan ditutupi oleh kartu-kartu domino sehingga setiap domino menutupi dua petak papan, dan setiap petak tertutup oleh tepat satu domino. Dapatkah hal tersebut dilakukan sehingga setiap garis vertikal dan horizontal bagian dalam (yang bukan garis merah) sedikitnya memotong dua kartu domino?



§1 Soal dan Solusi

§1.1 Bagian Pertama

Soal 1. Tentukan banyak cara membagikan delapan buku cerita berbeda kepada tiga anak, dengan setiap anak menerima paling sedikit dua buku.

. . . .

Bukti. Misal anak ke-i memperoleh x_i buku, di mana $i \in \{1, 2, 3\}$ dan $x_i \geq 2$ untuk setiap i. Maka, memisalkan $y_i = x_i - 1$, diperoleh y_i bilangan asli, dan $y_1 + y_2 + y_3 = 8 - 1 - 1 - 1 = 5$. Dengan Stars and Bars, diperoleh $\binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$ kasus yang ada. Semua kasus tersebut adalah (3, 3, 2) dan permutasinya, serta (4, 2, 2) dan permutasinya.

Kasus 1. Untuk setiap permutasi (3, 3, 2): Ada $\frac{3!}{2!} = 3$ permutasi kasus ini, dengan banyaknya cara per kasus sama dengan

$$\binom{8}{3,3,2} = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 2} = 8 \times 7 \times 5 \times 2 = 560.$$

Maka pada ketiga kasus ini ada $3 \times 560 = 1680$ cara.

Kasus 2. Untuk setiap permutasi (4, 2, 2): Ada $\frac{3!}{2!} = 3$ permutasi kasus ini, dengan banyaknya cara per kasus sama dengan

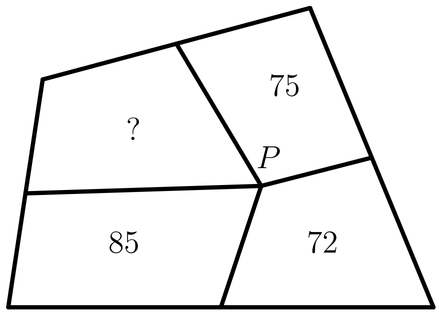
$$\binom{8}{4,2,2} = \frac{8!}{4!2!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} = 2 \times 7 \times 6 \times 5 = 420.$$

Maka pada ketiga kasus ini ada $3 \times 420 = 1260$ cara.

Sehingga ada $1260 + 1680 = \boxed{2940}$ cara untuk mendistribusikan 8 buku cerita berbeda kepada tiga anak, dengan masing-masing anak menerima sedikitnya dua buku. □

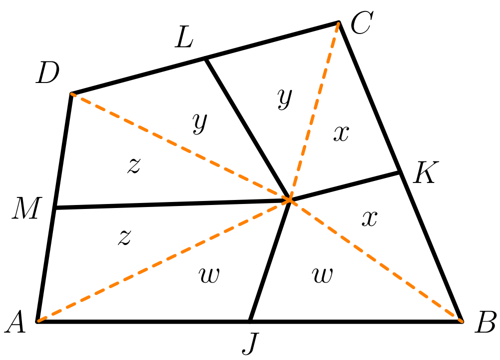
> **Komentar.** Para penulis menyesal telah salah mengerjakan soal ini.

Soal 2. Titik P terletak di dalam suatu segiempat (konveks) dan dihubungkan dengan titik tengah setiap sisi segiempat tersebut, seperti di gambar. Dari konstruksi ini, segiempat tersebut terbagi menjadi empat buah daerah. Luas tiga dari empat daerah tersebut telah ditulis di dalam masing-masing daerah. Tentukanlah luas dari daerah yang belum diketahui (ditandai dengan tanda tanya).



. . . .

Bukti. Namakan segiempat awal sebagai segiempat $ABCD$, lalu buatlah garis-garis PA, PB, PC, dan PD. Misalkan titik-titik J, K, L, M adalah titik-titik tengah dari sisi-sisi AB, BC, CD, dan DA berturut-turut. Karena perbandingan luas segitiga jika tingginya sama, adalah sama dengan perbandingan alasnya, dapat dimisalkan bahwa $[\triangle AJP] = [\triangle BJP] = w$, $[\triangle KBP] = [\triangle KCP] = x$, $[\triangle PLC] = [\triangle PLD] = y$, $[\triangle PDM] = [\triangle PAM] = z$, seperti gambar berikut.



Maka diperoleh $w + z = 85, w + x = 72, x + y = 75$, dan kita ingin mencari $y + z$. Tinjau bahwa

$$(w + z) + (x + y) = (w + x) + (y + z) \iff y + z = 85 + 75 - 72 = 88,$$

artinya luas daerah yang belum diketahui adalah $\boxed{88}$. □

Soal 3. Misalkan a, b, c bilangan bulat positif, dan definisikan $P(x) = ax^2 + bx + c$. Tentukan banyak tripel (a, b, c) sehingga $a, b, c \leq 10$ dan $P(x)$ habis dibagi 6 untuk semua x bilangan bulat positif.

. . . .

Bukti. Tinjau x dalam modulo 6, lalu hanya perlu dikuli:

- $x \equiv 0 \pmod 6$: Maka $6|c$. Jadi nilai $c = 6$ satu-satunya kemungkinan.
- $x \equiv 1 \pmod 6$: Maka $6|a + b + c$, namun mengingat $C = 6$ diperoleh $6|a + b$.
- $x \equiv 2 \pmod 6$: Maka $6|4a + 2b + c \iff 6|4a + 2b \iff 3|2a + b$. Namun mengingat $6|a + b$, diperoleh $3|a + b$ atau $3|a$.
- $x \equiv 3 \pmod 6$: Maka $6|9a + 3b + c \iff 6|9a + 3b \iff 2|3a + b \iff 2|a + b$. (Tidak ada syarat baru, ingat $6|a + b$.)
- $x \equiv 4 \pmod 6$: Maka $6|16a + 4b + c \iff 3|8a + 2b = 2(4a + b)$ sehingga dengan Lemma Euclid diperoleh $3|4a + b \iff 3|a + b$. (Tidak ada syarat baru)
- $x \equiv 5 \pmod 6$: Maka $6|25a + 5b + c \iff 6|5(5a + b)$ sehingga dengan Lemma Euclid diperoleh bahwa $6|5a + 2b \iff 6|5a + b - 5(a + b) = -4b \iff 3| - 2b + 3b = 3|b$.

Maka semua syarat yang diperlukan adalah $6|c$, $3|a, 3|b$, dan $6|a + b$. Akan dibuktikan ini memenuhi. Misal $a = 3p, b = 3q$, dan $c = 6$. Jelas $3|P(n)$. Lalu:

- Untuk n genap, diperlukan bahwa $6|P(n) = (3p)n^2 + (3q)n + 6 \iff 6|3n(pn + q)$. Tetapi n genap, maka $6|3n$, sehingga benar.
- Untuk n ganjil, misal $n = 2k - 1$. Maka dalam modulo 2, $P(2k - 1) = (3p)n^2 + 3qn + 6 \equiv pn^2 + 3qn \pmod 2 \equiv p(-1)^2 + 3q(-1) \equiv p - 3q \equiv p + q \pmod 2$, atau $2|p + q$ sehingga memenuhi juga.

Menggunakan permisalan yang sama, jelas $1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor = 3$ dan $1 \leq q \leq 3$ dan $2|p + q$. Ada 5 pasangan (p, q) yang memenuhi, yakni $(p, q) = (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3) \iff (a, b) = (3, 3), (3, 9), (6, 6), (9, 3), (9, 9)$ dengan satu-satunya nilai c yang mungkin adalah 6, maka terdapat $\boxed{5}$ tripel (a, b, c) yang memenuhi.

> **Komentar.** Solusi di atas dapat ditulis ulang dalam modulo 6. Soal ini bisa dibilang sebagai soal kuli. Jika pendekatan Anda adalah dengan membagi kasus, sehingga $a + b + c = 6, 12, 18, 24$, atau 30, Anda akan mengalami kesulitan yang tidak diperlukan.

Soal 4. Tentukanlah semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan berikut:

$$(x^2 + y + 1)(y^2 + x + 1) = 4$$
$$(x^2 + y)^2 + (y^2 + x)^2 = 2.$$

....

Bukti. Misal $a = x^2 + y$ dan $b = y^2 + x$. Maka diperoleh $(a + 1)(b + 1) = 4$ dan $a^2 + b^2 = 2$. Memisalkan lagi bahwa $m = a+b$, diperoleh $ab+a+b+1 = 4 \iff ab = 3-m \iff 2ab = 6-2m$, sehingga $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2 + 6 - 2m = 8 - 2m = m^2$. Sehingga semua nilai m yang memenuhi adalah

$$m^2 + 2m - 8 = 0 \iff (m + 4)(m - 2) = 0 \iff m = -4, \quad m = 2.$$

Tinjau juga bahwa $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2 \geq 0$, maka $2-(6-2m) = 2m-4 \geq 0 \iff m \geq 2$. Maka $m = -4$ tidak memenuhi. Sehingga diperoleh $m = 2$, dan $(a - b)^2 = 2(2) - 4 = 0 \iff a = b$, dan $a + b = 2$ maka $a = b = 1$. Jadi oleh sistem

$$x^2 + y = 1$$
$$y^2 + x = 1$$

Kita dapat mengeliminasi agar diperoleh $x^2 - y^2 + y - x = 0 \iff (x - y)(x + y - 1) = 0$ artinya $x = y$ atau $x + y = 1$.

Kasus 1. $x = y$: Masukkan ke persamaan 1 agar diperoleh $(y^2+y+1)^2 = 4 \iff y^2+y+1 = \pm 2$. Sedangkan memasukkan ke peramaan bawah, diperoleh $2(y^2+y)^2 = 2 \iff y^2+y = \pm 1 \iff y^2 + y + 1 = 2$ atau 0. Maka hanya $y^2 + y + 1 = 2$ memenuhi, yang membentuk solusi $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ dan $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Kasus 2. $x+y = 1$: Substitusi jadi $y = 1-x$ ke persamaan soal di persamaan kedua, sehingga diperoleh $(x^2 - x + 1)^2 + ((1 - x)^2 + x)^2 = (x^2 - x + 1)^2 + (x^2 - x + 1)^2 = 2 \iff (x^2 - x + 1)^2 = 1 \iff x^2 - x + 1 = 1$ (sebab $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$). Sehingga $x^2 - x + 1 = 1 \iff x(x - 1) = 0$ maka $x = 0$ atau 1. Maka semua solusi di sini adalah $(x, y) = (0, 1)$ dan $(1, 0)$.

Jadi, semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi adalah

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right), (0, 1), \text{ dan } (1, 0)}. \quad \square$$

> **Komentar.** Sebaiknya biasakan untuk menyatakan (tidak perlu ditunjukkan) bahwa setelah menyubstitusikan semua solusi tersebut ke persamaan-persamaan soal, diperoleh bahwa semua solusi tersebut memenuhi. Namun karena pada setiap kasus kita sudah menggunakan kedua persamaan tersebut agar memenuhi, sudah pasti solusi akhir yang kita dapat akan memenuhi persamaan soal, karena kita memperoleh masing-masing solusi dari semua persamaan yang ada (dengan kata lain, pembuktiannya sudah dua arah, meskipun tidak terlihat seperti itu). Selain itu, mengenai solusi ini, cara yang digunakan termasuk standar, kecuali di mana yang dimisalkan adalah $a+b$ dan $a-b$, bukan nilai simetris $a+b$ dan ab, sebab ab dapat dicari dengan $a+b$.

Solusi alternatif. Misalkan juga $a = x^2 + y$ dan $b = y^2 + x$, sehingga sistem persamaan yang kita miliki sekarang

$$\begin{aligned} (a+1)(b+1) &= 4 \\ a^2 + b^2 &= 2. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} 2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2a - 2b - 2 &= 2(2) - 2(4) = -4 \\ \iff a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + (1-1) + b^2 - 2b + (1-1) - 2 &= -4 \\ \iff (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga dengan ketaksamaan trivial (*Trivial Inequality*),

$$(a-b)^2 \geq 0, \quad (a-1)^2 \geq 0, \quad (b-1)^2 \geq 0$$

sehingga harus terjadi kesamaan, maka $a = b = 1$. Lanjut pembagian kasus seperti pada solusi sebelumnya agar diperoleh 4 solusi yang sama.

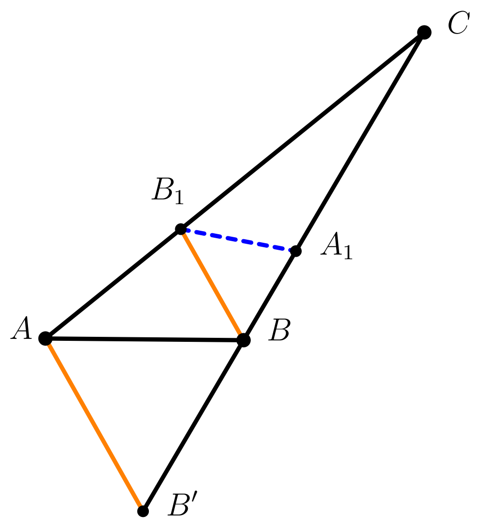
> **Komentar.** Cara lain dengan menggunakan AM-GM atau ketaksamaan Cauchy-Schwarz merupakan bentuk yang ekuivalen dengan ketaksamaan trivial ini, dengan permisalan yang ekuivalen seperti solusi-solusi sebelumnya, namun memiliki batasan baru (misal untuk AM-GM nilai $x^2 + y$ dan $y^2 + x$ harus real nonnegatif). Hal ini harus diperhatikan juga jika tidak ingin nilainya dikurangi.

Soal 5. Diberikan segitiga ABC, dengan $\angle ABC = 120^\circ$. Titik-titik A_1, B_1, dan C_1 berturut-turut terletak pada segmen BC, CA, dan AB, sehingga garis AA_1, BB_1, dan CC_1 merupakan garis-garis bagi dari sudut-sudut segitiga ABC. Tentukanlah besar $\angle A_1B_1C_1$.

....

Bukti. Perpanjang sinar CB ke titik-titik B' sehingga $BB' = AB$. Tinjau bahwa $\angle B'BA = 60^\circ$ (pelurus $\angle ABC$) sehingga $\triangle B'BA$ samasisi.

Karena $\angle AB'B + \angle B'BB_1 = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, diperoleh bahwa garis BB_1 sejajar AB'. Maka $\triangle CB_1B \sim \triangle CAB'$, dan $\angle CB_1B = 60^\circ + \angle CAB$.



Lemma

Garis B_1A_1 membagi $\angle BB_1C$ menjadi dua sudut yang sama besar.

Bukti. Dengan kesebangunan tadi, $\dfrac{BB_1}{B_1C} = \dfrac{B'A}{AC} = \dfrac{BA}{AC}$. Selanjutnya, dengan teorema perbandingan sisi oleh garis bagi, $\dfrac{BA}{AC} = \dfrac{BA_1}{A_1C}$. Maka menggabungkan, diperoleh

$$\frac{BB_1}{B_1C} = \frac{BA_1}{A_1C},$$

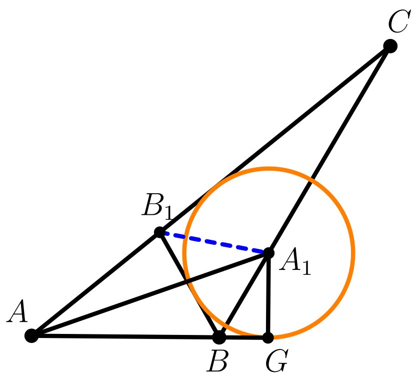
yang merupakan konvers dari teorema garis bagi. □

Dengan cara yang sama, B_1C_1 merupakan garis bagi $\angle AB_1B$. Maka,

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1B + \angle BB_1C_1 = \frac{1}{2}(\angle BB_1C + \angle BB_1A) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = \boxed{90^\circ}. \quad \square$$

Komentar. Solusi ini tergolong intuitif. Pada soal-soal yang membagi sudut menjadi dua sudut enam puluh derajat, seringkali dilakukan perpanjangan dan dimanfaatkan, apakah itu dengan segitiga samasisi, atau dengan refleksi titik agar hasilnya refleksinya kolinear, atau lain sebagainya. Hanya saja soal ini memerlukan kemampuan observasi yang tajam, serta motivasinya akan lebih jelas jika sudah meduga bahwa jawabannya adalah 90°, yang sudah akan memberikanmu 1 poin. Mengenai soal, soal ini juga merupakan soal *Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition* (IWYMIC 2002 soal individual no 9), lalu juga soal *Bundeswettbewerb Mathematik 2021* soal nomor 3, ronde pertama. Soal ini sudah *well-known*.

Solusi alternatif. (oleh: Buku IWYMIC) Misalkan G adalah sebuah titik pada perpanjangan (sinar) AB. Maka diperoleh $\angle ABB_1 = \angle B_1BC = \angle CBG = 60^\circ$.



Lemma

Garis bagi $\angle BB_1C$ adalah B_1A_1.

Bukti. Tinjau bahwa A_1 pada perpotongan garis-garis bagi $\angle CAB$ dan $\angle B_1BG$. Maka A_1 titik pusat lingkaran singgung luar segitiga ABB_1, sehingga A_1 pada garis bagi $\angle CB_1B$. □

Maka, $\angle BB_1A_1 = \frac{1}{2}\angle BB_1C = 30^\circ + \frac{1}{2}\angle CAB$. Dengan cara yang sama, $\angle BB_1C_1 = 30^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB$. Karena

$$\angle CAB + \angle ABC = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ,$$

diperoleh $\angle A_1B_1C_1 = \angle BB_1A_1 + \angle BB_1C_1 = 60^\circ + \frac{1}{2}(60^\circ) = \boxed{90^\circ}$. □

Komentar. Pada solusi ini, kita memanfaatkan fakta bahwa garis AA_1 (yakni garis bagi sudut dalam $\angle BAC$), dan kedua garis bagi luar sudut-sudut luar seberang $\angle BAB_1$ berpotongan pada satu titik (konkuren), yakni pada titik pusat lingkaran singgung luar dari $\triangle ABB_1$. Dengan *Incenter-Excenter Lemma*, diperoleh bahwa A, I, A_1 segaris, di mana I titik potong garis-garis bagi dalam $\triangle AB_1B$, dan oleh kongruensi $\angle A_1BB_1 = \angle A_1BG$ dan $\angle A_1B_1C = \angle A_1B_1B$.

Solusi alternatif. Misalkan panjang $BC = a, CA = b$, dan $AB = c$. Menurut aturan kosinus,

$$AC = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ac\cos B} = \sqrt{a^2 + c^2 + ac}.$$

Selanjutnya, dengan Teorema Garis Bagi, $\dfrac{AB_1}{CB_1} = \dfrac{c}{a}$. Maka

$$AB_1 = \frac{c}{c+a}AC = \frac{c}{a+c}\sqrt{a^2 + c^2 + ac} \quad \text{dan} \quad CB_1 = \frac{a}{a+c}AC = \frac{a}{a+c}\sqrt{a^2 + c^2 + ac}.$$

Oleh Dalil Stewart, kita punya

$$BB_1 = \sqrt{AB \cdot BC - AB_1 \cdot B_1C} = \sqrt{ac - \frac{ac\,(a^2 + c^2 + ac)}{(a+c)^2}} = \frac{ac}{a+c}.$$

Dari Teorema Garis Bagi,

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2 + ac}}.$$

Tinjau bahwa

$$\frac{BB_1}{B_1C} = \frac{\frac{ac}{a+c}}{\frac{a}{a+c}\sqrt{a^2 + c^2 + ac}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2 + ac}} = \frac{BA_1}{CA_1}$$

yang artinya B_1A_1 garis bagi $\angle CB_1B$. Secara analog, B_1C_1 garis bagi $\angle AB_1B$. Maka

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1B + \angle BB_1C_1 = \frac{\angle CB_1B + \angle AB_1B}{2} = \frac{180^\circ}{2} = \boxed{90^\circ}. \qquad \square$$

Solusi alternatif. (oleh: Stephen Sanjaya) Oleh Teorema Garis Bagi, tinjau bahwa $B_1C = b \cdot \dfrac{a}{a+c}$ sementara $A_1C = a \cdot \dfrac{b}{b+c}$ sehingga

$$\frac{B_1C}{A_1C} = \frac{b+c}{a+c} = \frac{AC + AB}{BC + AB},$$

sehingga dengan kesebangunan sisi-sudut-sisi, jika B' dan A' terletak pada perpanjangan sinar CB dan CA berturut-turut sehingga $A'A = AB = BB'$, maka $A'B' \parallel B_1A_1$ yang berarti $\angle A_1B_1C = \angle B'A'C$.

Namun karena ABB' samasisi,

$$\angle AB'A = \frac{180^\circ - \angle B'AA'}{2} = \frac{60^\circ + \angle BAC}{2} = 30^\circ + \frac{\angle BAC}{2} = \angle A_1B_1C.$$

Analog $\angle C_1B_1A = 30^\circ + \dfrac{\angle BCA}{2}$ sehingga

$$\angle A_1B_1C_1 = 180^\circ - 60^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = \boxed{90^\circ}. \quad \square$$

§1.2 Bagian Kedua

Soal 6. Suta menuliskan 2021 bilangan asli pertama di papan tulis, sehingga setiap bilangan ditulis tepat sekali. Ia kemudian melingkari beberapa bilangan di antaranya, kemudian menjumlahkan seluruh bilangan yang ia lingkari dan mendapatkan nilai K. Kemudian, Suta juga menjumlahkan seluruh bilangan yang tidak ia lingkari dan mendapatkan nilai L. Tunjukkan Suta dapat memilih bilangan yang ia lingkari di awal, sehingga $K - L = 2021$.

. . . .

Bukti. Suta perlu melingkari $(1, 2020), (2, 2019), \cdots, (505, 1516)$ (dengan kata lain, $(x, 2021-x)$ untuk $1 \leq x \leq 505$ dan x bilangan bulat, maka jumlah tiap pasangannya 2021) dan 2021, sehingga nilai

$$K = 2021 \times (505 + 1) = 2021 \times 506.$$

Jumlah semua bilangan pada papan tulis adalah

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2021 = \frac{2021 \cdot 2022}{2} = 2021 \times 1011.$$

Sementara, diketahui bahwa

$$\begin{aligned} K + L = 2021 \times 1011 &\iff 2021 \times 506 + L = 2021 \times 1011 \\ &\iff L = 2021 \times (1011 - 506) = 2021 \times 505. \end{aligned}$$

Maka, $K - L = 2021 \times 506 - 2021 \times 505 = 2021(506 - 505) = 2021$. $\square$

Komentar. Kegagalan untuk menunjukkan suatu konfigurasi adalah kesalahan yang fatal pada soal ini (yakni tidak menyebutkan bilangan-bilangan yang harus dilingkari), sebab soal hanya meminta 1 konfigurasi, dan bobot soal ini adalah 7 poin. Konfigurasi lain yang memenuhi adalah jika $K \equiv 0$ atau $1 \pmod 4$ semuanya dilingkari. Motivasi soal ini adalah dengan meninjau jumlah semua bilangan pada papan adalah 2021×1011, kemudian melakukan persamaan linear dua variabel terhadap nilai K dan L. Namun tahap itu sebenarnya tidak perlu ditunjukkan, sebab hanya perlu diberikan 1 konfigurasi saja. Jika konfigurasi Anda termasuk acak sebenarnya juga tidak apa-apa, asalkan Anda menunjukkan bahwa konfigurasi yang Anda berikan memenuhi ketentuan soal.

Soal 7. Tentukan semua bilangan asli $n > 3$ sehingga $\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$ habis membagi $n+1$ dan $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$ habis membagi $n-1$.

. . . .

Bukti. Semua bilangan asli yang memenuhi adalah $n = \boxed{4, 7, 9, 13, \text{ dan } 31}$. Dapat dilihat masing-masing dari bilangan tersebut memenuhi:

$$n = 4 \Rightarrow (2-1)|5 \text{ (Memenuhi)}, \quad (2+1)|3 \text{ (Memenuhi)},$$
$$n = 7 \Rightarrow (2-1)|8 \text{ (Memenuhi)}, \quad (2+1)|6 \text{ (Memenuhi)},$$
$$n = 9 \Rightarrow (3-1)|10 \text{ (Memenuhi)}, \quad (3+1)|8 \text{ (Memenuhi)},$$
$$n = 13 \Rightarrow (3-1)|14 \text{ (Memenuhi)}, \quad (3+1)|12 \text{ (Memenuhi)},$$
$$n = 31 \Rightarrow (5-1)|32 \text{ (Memenuhi)}, \quad (5+1)|30 \text{ (Memenuhi)}.$$

Akan dibuktikan solusinya sudah lengkap. Misalkan $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k$. Maka, n bilangan asli memenuhi ketaksamaan $k^2 \le n \le (k+1)^2 - 1 = k^2 + 2k$. Mengingat $n > 3 \iff n \ge 4$, dan $n = k^2 \ge 4$, maka $k \ge 2$ (sebab k bulat nonnegatif, mengingat syarat akar).

Lemma

$n = k^2$ atau $n = k^2 + k + 1$ untuk suatu $k \ge 2$.

Bukti. Meninjau syarat kedua, diperoleh bahwa $k+1|n-1 \ge k^2-1$. Jelas bahwa $k+1|k^2-1 = (k-1)(k+1)$ dan $k+1|k^2+k = k(k+1)$ memenuhi. Jika $n > k^2+k+1$, haruslah $n \ge k^2+k+1+(k+1) = k^2+2k+2 > k^2+2k \ge n \iff n > n$ (kontradiksi). □

Maka substitusi nilai tersebut ke dalam syarat kedua.

Kasus 1. Untuk $n = k^2$: maka

$$k-1|k^2+1 \iff k-1|(k^2+1)-(k-1)(k+1) = k^2+1-(k^2-1) = 2,$$

sehingga $k-1 = 1$ atau 2 (sebab $k \ge 2$) sehingga $k = 2$ dan 3, atau $n = k^2 = 4$ atau 9.

Kasus 2. Untuk $n = k^2+k+1$: maka $k-1|k^2+k \iff k-1|k^2+k+2-(k-1)(k+2) = k^2+k+2-(k^2+k-2) = 4$, sehingga $k-1 = 1, 2,$ atau 4, yakni $k = 2, 3,$ atau 5. Maka $n = 2^2+2+1 = 7$, atau $n = 3^2+3+1 = 13$, atau $n = 5^2+5+1 = 31$.

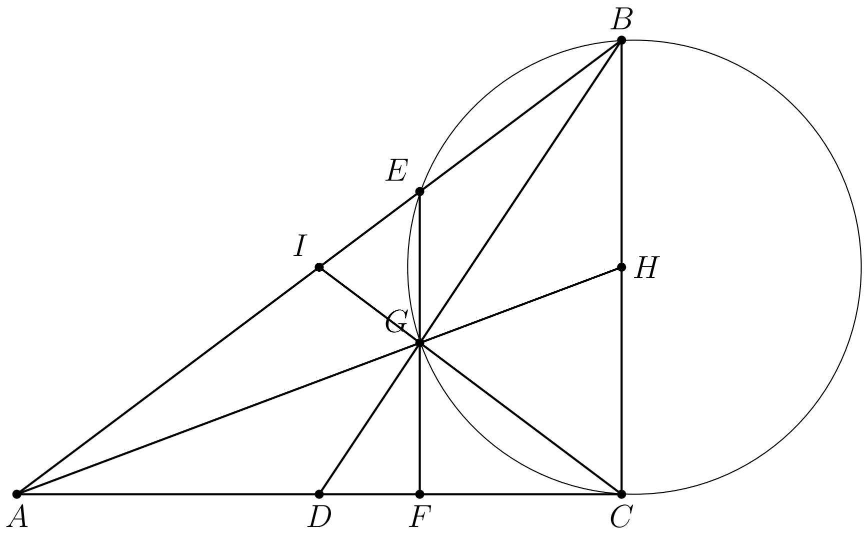
Maka semua solusi sudah ditemukan. □

Komentar. Pendekatan lain adalah dengan memisalkan $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = m$ sehingga $n = m^2 + k$, dengan $0 \leq k \leq 2m$ dan melakukan hal yang sama seperti di atas. Namun menurut pengalaman penulis (dengan menanya-nanya teman), yang menggunakan substitusi seperti ini sering kelewatan salah satu dari $k = 0$ atau $k = m + 1$. Selain itu, jika soal didekatkan dari syarat pertama terlebih dahulu (yakni $\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1 | n + 1$), caranya akan lebih panjang.

Soal 8. Diberikan segitiga ABC dengan titik berat G. Titik D merupakan titik tengah AC. Garis yang melalui G dan sejajar dengan BC memotong AB di E. Buktikan bahwa $\angle AEC = \angle DGC$ jika dan hanya jika $\angle ACB = 90^\circ$.

. . . .

Bukti.



Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa jika $\angle AEC = \angle DGC$, maka $\angle ACB = 90^\circ$, lalu sebaliknya. Untuk itu, misalkan $EG \cap AC = F$, $AG \cap BC = H$, dan $CG \cap AB = I$.

> **Lemma**
>
> $CGEB$ siklis.

Bukti. Tinjau

$$\angle CGB = 180^\circ - \angle CGD = 180^\circ - \angle CEA = \angle CEB$$

sehingga $CGEB$ siklis. □

Karena $CGEB$ adalah trapesium siklis, maka diperoleh

$$\angle EGC = 180^\circ - \angle EBC = \angle GEB$$

sehingga panjang $GC = EB$. Kita punya panjang $CI = \frac{3}{2}CG$. Di sisi lain, karena $EG \parallel BH$, maka $\triangle AEF \sim \triangle ABC$. Sehingga kita punya

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AG}{GH} = \frac{2}{1} \implies AE = 2EB = 2GC.$$

Kita peroleh $AB = AE + EB = 3GC \implies AI = \frac{3}{2}GC = CI$. Karena panjang $AI = CI = BI$, maka I adalah titik pusat (ABC). Akibatnya, $\angle ACB = 90^\circ$.

Untuk pembuktian dari kanan ke kiri. Seperti pada bagian sebelumnya, kita peroleh $AE : EB = 2 : 1$. Secara analog, kita peroleh juga $\triangle AFG \sim \triangle ACH$ dan didapatkan $AF = 2FC$ dan $GF = \frac{2}{3}HC = \frac{1}{3}BC$. Kita peroleh juga $AD = \frac{1}{2}AC$ dan $DF = \frac{1}{6}AC$. Karena $EF \parallel BC$, maka $\angle AFE = 90^\circ$. Dari teorema Pythagoras pada $\triangle FGC$, kita peroleh

$$GC = \sqrt{FC^2 + FG^2} = \sqrt{\frac{AC^2}{9} + \frac{CB^2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{AC^2 + CB^2}.$$

Di sisi lain, pada $\triangle ABC$:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} \implies AE = \frac{2}{3}\sqrt{AC^2 + BC^2}.$$

Tinjau bahwa $\frac{CD}{CA} = \frac{1}{2} = \frac{CG}{AE}$. Tinjau bahwa I titik pusat (ABC), kita peroleh $\angle GCD = \angle ICA = \angle IAC = \angle EAC$ (serta mengingat perbandingan $AE : GC = AC : DG$), maka kita dapatkan $\triangle DCG \sim \triangle CAE$ sehingga berakibat $\angle DGC = \angle AEC$.

> **Komentar.** Sebenarnya untuk pembuktian dari kanan ke kiri, karena $\angle ACB = 90^\circ$ maka I titik tengah hipotenusa $\triangle ABC$, sehingga I titik pusat lingkaran luar $\triangle ABC$ yang berarti berlaku $BI = CI$. Lalu langkah pembuktian dari kiri ke kanan dibuat mundur dengan cara yang sama, sehingga konversnya juga berlaku. Bagian kedua dari solusi ini diberikan untuk variasi dan kelengkapan saja.

Solusi alternatif (oleh IG: @heuristic.id dengan modifikasi). Misalkan GE memotong AC di F. Kita gunakan geometri analitik untuk mencari koordinat beberapa titik yang ada. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $A = (3a, 0), B = (3b, 0)$, dan $C = (3c, 0)$, maka $G = (b + c, a)$, serta $E = (2b, a)$ dengan rumus titik berat segitiga dan titik tengah segmen. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
&\angle AEC = \angle DGC \\
\iff\ &\angle CEB = \angle CGB \text{ oleh pelurus sehingga } CGEB \text{ segiempat talibusur} \\
\iff\ &\angle EGC = \angle GEB \text{ trapesium siklis pasti samakaki*} \\
\iff\ &GC^2 = EB^2 \\
\iff\ &(3c - b - c)^2 + a^2 = a^2 + b^2 \\
\iff\ &(2c - b)^2 = b^2 \\
\iff\ &c = 0 \text{ atau } c = b \text{ (tidak memenuhi sebab artinya } B \text{ dan } C \text{ berimpit)} \\
\iff\ &\angle ACB = 90^\circ. \quad \square
\end{aligned}$$

Addendum (*). Misal $CBFG$ trapesium siklis. Maka, $\angle GCB = 180^\circ - \angle CGE$ (oleh $FG \parallel BC$) $=$ $\angle EBC$ (oleh sifat segiempat siklis). Memperpanjang CG dan BE agar berpotongan di titik T, diperoleh $\triangle TBC$ samakaki oleh kesamaan 2 sudut tadi, dan karena kesejajaran juga diperoleh $\triangle TEG$ samakaki. Kurangi, agar diperoleh $TB - TE = GC = EB = TC - TG$.

> **Komentar.** Terkadang keberanian untuk malas berpikir dan rajin menguli membuahkan hasil yang baik.

Soal 9. Misal X himpunan yang berisikan bilangan rasional positif yang memenuhi dua persyaratan berikut:

(i) Jika x rasional dan $2021 \leq x \leq 2022$, maka $x \in X$.

(ii) Jika $x, y \in X$, maka $\frac{x}{y}$ juga di X.

Buktikan seluruh bilangan rasional positif termuat di X.

. . . .

Bukti. Motivasi dari pengerjaan ini adalah dengan meninjau beberapa hal yang dapat dilakukan terlebih dahulu.

Lemma

Semua bilangan rasional $\frac{a}{b} \in \left[1, \frac{2022}{2021}\right] \in X$.

Bukti. Ambil sembarang rasional $\frac{a}{b} \in \left[1, \frac{2022}{2021}\right]$. Tinjau bahwa $2021 \leq \frac{2021a}{b} \leq 2022$ dan $2021 \in X$, maka oleh syarat (i) dan (ii), mengambil $x = \frac{2021a}{b}$ dan $y = 2021$, diperoleh

$$\frac{\frac{2021a}{b}}{2021} = \frac{a}{b} \in X.$$

$\square$

Selanjutnya, kita akan coba membuktikan bahwa semua bilangan asli termuat di X.

Lemma

Semua bilangan asli $n \in X$.

Bukti. Kita akan memulai dari menunjukkan $1 \in X$, ini mudah sebab mengambil $x = y \in X$ memenuhi (sebab $x = y > 0$). Lalu, dengan ini, kita buat suatu klaim.

Klaim — Semua bilangan asli $m \geq 2021 \in X$.

Kita akan membuktikan dengan induksi. Diketahui bahwa $1, 2021, 2022 \in X$. Maka, dengan mengambil $x = 1, y = 2022$ diperoleh $\frac{1}{2022} \in X$. *Base case* dari induksi diselesaikan terlebih dahulu. Karena

$$1 < \frac{2023}{2022} < \frac{2022}{2021} \quad \text{maka} \quad \frac{2023}{2022} \in X$$

sebab jelas nilainya rasional. Maka, mengambil $x = \frac{2023}{2022}$ dan $y = \frac{1}{2022}$, diperoleh bahwa

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{2023}{2022}}{\frac{1}{2022}} = 2023 \in X.$$

Dengan cara yang sama, misalkan suatu bilangan bulat positif $n \in X$, maka $\frac{1}{n} \in X$ dengan mengambil $x = 1$ dan $y = n$. Sekarang tinjau bahwa jika $m > n$ bulat positif, hal ini ekuivalen dengan menyatakan bahwa

$$mn + n < mn + m \iff n(m+1) < m(n+1) \iff \frac{m+1}{m} < \frac{n+1}{n} \leq \frac{2022}{2021}.$$

Dan jelas bahwa $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$, sehingga $\frac{n+1}{n} \in X$. Ini artinya mengambil $x = \frac{n+1}{n}$ dan $y = \frac{1}{n}$, diperoleh

$$\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}} = n + 1 \in X,$$

sehingga induksinya terbukti.

Maka, sekarang, cukup membuktikan bahwa semua bilangan asli $2 \leq m \leq 2020$ di X. Untuk itu, ambil $x = 2021m$ dan $y = 2021$. Karena $2021m \in \mathbb{Z}$ dan $2021m \geq 4042 \geq 2021$, maka $2021m \in X$. Sehingga diperoleh bahwa

$$\frac{x}{y} = \frac{2021m}{2021} = m \in X.$$

$\square$

Karena oleh definisi bilangan rasional, sembarang bilangan rasional positif dapat dituliskan sebagai $\frac{a}{b}$ dengan $\gcd(a, b) = 1$ serta $a, b \in \mathbb{N}$, mengambil $x = a$ dan $y = b$ menghasilkan bilangan rasional sembarang yang diinginkan. Sehingga terbukti semua bilangan rasional positif termuat di dalam X. $\square$

Penulisan lain (oleh IG: @satu.papan). Dari sifat (ii) cukup ditunjukkan bahwa X memuat semua bilangan asli. Pertama akan dibuktikan dengan induksi bahwa $n \in X$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2021$.

Kasus dasar $n = 2021$ benar dari (i). Untuk langkah induksinya, andaikan $n \geq 2021$ dan $n \in X$. Perhatikan bilangan berikut:

$$2021 + \frac{2021}{n} = \frac{2021}{n}(n+1).$$

Karena $\frac{2021}{n} \leq 1$ maka $2021 + \frac{2021}{n} \in X$ dari (i). Tetapi $\frac{2021}{n} \in X$ juga dari sifat (ii) (dengan mengambil $x = 2021, y = n \in X$ sebagai hipotesis induksi), sehingga mengambil $x = \frac{2021}{n}(n+1)$ dan $y = \frac{2021}{n}$, diperoleh $\frac{\frac{2021}{n}(n+1)}{\frac{2021}{n}} = n + 1 \in X$, sehingga langkah induksi selesai.

Untuk membuktikan $1 \leq m \leq 2020 \in X$ untuk setiap bilangan bulat m, gunakan cara seperti solusi pertama, sehingga terbukti semua bilangan asli adalah elemen dari himpunan X. $\square$

Komentar. Motivasi dari solusi ini adalah dengan meninjau bahwa semua bilangan rasional dapat dituliskan sebagai dua bilangan asli yang relatif prima, serta himpunan bilangan asli adalah *subset* dari himpunan bilangan rasional positif. Untung saja bahwa dengan motivasi ini, kita memperoleh solusi yang relatif mudah dipahami. Selain itu, pembuktian bahwa $\frac{k+1}{k} \in X$ untuk semua bilangan asli $k \geq 2021$ dapat dipersingkat dengan mengambil $x = \frac{2021n + 2021}{n}$ dan $y = 2021$. Selain itu, untuk mempermudah penulisan, bisa dibilang juga bahwa jika $\frac{a}{b} \in X$ (menurut syarat 2) maka $ab \in X$ juga agar menjadi multiplikatif, dengan mengambil $x = a$ dan $y = \frac{1}{b}$ sebab $1 \in X$, maka $\frac{1}{b} \in X$ dengan $x = 1, y = b$.

Solusi alternatif. Gunakan lemma pertama bahwa semua bilangan rasional $\left[1, \frac{2022}{2021}\right] \in X$. Lalu, kita akan membuat suatu argumen induksi.

Lemma

Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, jika $p \in \mathbb{Q}$ maka semua rasional $1 \leq p \leq \left(\frac{2022}{2021}\right)^k \in \mathbb{Q}$.

Bukti. Akan digunakan induksi. Tinjau bahwa untuk $k = 1$ sudah terbukti dari lemma sebelumnya. Misalkan pernyataan tersebut benar untuk suatu $k \geq 1$. Ambil rasional p sembarang, memenuhi $\left(\frac{2022}{2021}\right)^k \leq p \leq \left(\frac{2022}{2021}\right)^{k+1}$. Mengambil

$$1 \leq x = \frac{2021p}{2022} \leq \left(\frac{2022}{2021}\right)^k \in X \quad \text{dan} \quad y = \frac{2021}{2022},$$

dan karena $1 \in X$, maka $y = \frac{1}{\frac{2022}{2021}} = \frac{2021}{2022} \in X$. Artinya diperoleh $p \in X$, melengkapkan induksi kita. $\square$

Berarti semua rasional positif $p \geq 1 \in X$. Untuk menunjukkan ini, ambil sembarang bilangan rasional positif p yang diinginkan. Tinjau bahwa mengambil k bilangan asli dengan

$$k \geq \log_{\frac{2022}{2021}} p \iff p \leq \left(\frac{2022}{2021}\right)^k$$

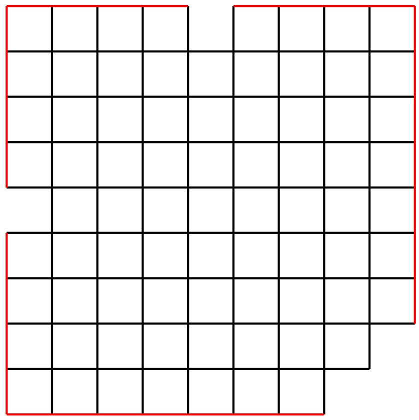
agar dengan lemma tadi, $a \in X$. Sehingga terbukti semua rasional $p \geq 1$ anggota dari X. Untuk memperoleh rasional $0 < p < 1$, mengingat bahwa $1 \in X$ dan $\frac{1}{p} > \frac{1}{1} = 1$, sehingga mengambil $x = 1$ dan $y = \frac{1}{p}$ diperoleh bahwa

$$\frac{1}{\frac{1}{p}} = p \in X.$$

Jadi, semua rasional positif termuat di dalam himpunan X. $\square$

Komentar. Teknik ini adalah observasi yang *natural* juga, yakni memperluas *bound* dari bilangan rasional yang ada. Karena ada tak hingga bilangan rasional berbeda di antara dua bilangan real berbeda, kita bisa mengonstruksi suatu cara untuk memperluas batas-batas dari anggota himpunan X. Di sini tentunya harus dibuktikan dengan benar bahwa semua bilangan rasional yang ada pada batas baru, dapat dibentuk dari syarat kedua. Konstruksi lain yang mungkin ditemukan adalah dengan menunjukkan bahwa jika semua rasional ada pada $\left[1, \left(\frac{2022}{2021}\right)^{2^k}\right]$ juga elemen dari X untuk k sembarang bilangan bulat nonnegatif.

Soal 10. Lima buah petak dari papan catur berukuran 9×9 dibuang seperti terlihat pada gambar. Seluruh papan catur tersebut akan ditutupi oleh kartu-kartu domino sehingga setiap domino menutupi dua petak papan, dan setiap petak tertutup oleh tepat satu domino. Dapatkah hal tersebut dilakukan sehingga setiap garis vertikal dan horizontal bagian dalam (yang bukan garis merah) sedikitnya memotong dua kartu domino?



. . . .

Bukti. Jawabannya adalah **tidak.** Hal tersebut akan dibuktikan, sebagai berikut:
Kita ingin mengubinkan 76 petak, atau akan menggunakan tepat 38 domino (karena kita tidak ingin ada domino yang tumpang tindih). Perhatikan bahwa setiap domino memotong tepat 1 garis. Asumsikan dengan kontradiksi, kita bisa mengubinkan papan catur tersebut agar memenuhi kondisi soal. Sebelum melanjutkan, untuk mempermudah penulisan, kita akan memberi nama setiap kolom dan baris, yakni kolom/baris n untuk $1 \leq n \leq 9$, yang bersifat terurut dari kiri ke kanan untuk kolom, dan atas ke bawah untuk baris. Lalu, namakan garis vertikal dari kiri ke kanan sebagai $v_1, v_2, \cdots, v_8$, dan garis horizontal dari atas ke bawah sebagai $h_1, h_2, \cdots, h_8$, secara berurutan.

Lemma

Banyaknya domino horizontal yang menutupi kolom-kolom 2, 4, 6, dan 9 adalah ganjil.

Bukti. Tinjau bahwa banyaknya petak pada kolom 2, 4, 6, dan 9 adalah ganjil (yakni: 9,9,9,7). Selanjutnya, perhatikan bahwa domino vertikal akan menutupi kolom tersebut sebanyak tepat 2 petak, sementara domino horizontal menutupi kolom tersebut sebanyak 1 petak. Jadi, mengingat bahwa banyaknya petak pada kolom-kolom tersebut ganjil, banyaknya domino horizontal yang menutupi kolom tersebut pasti ganjil. □

Setiap domino horizontal pada kolom n akan memotong antara v_{n-1} atau v_n. Perhatikan dalil berikut.

Lemma

Garis v_1 dan v_2 pasti dipotong oleh minimal 5 domino. Maka garis-garis $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ dipotong oleh minimal 15 domino.

Bukti. Karena v_1 dan v_2 masing-masing harus dipotong oleh minimal 2 domino, dan setiap domino hanya bisa memotong salah satu dari garis vertikal tersebut, maka harus terdapat minimal 4 domino horizontal pada kolom 2. Mengingat banyaknya domino horizontal harus ganjil, maka terdapat minimal 5 domino horizontal yang salah satu petaknya pada kolom 2. Maka banyaknya domino agar dapat memotong garis-garis $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ masing-masing dipotong minimal 2 kali memerlukan setidaknya $5 + 5 + 5 = 15$ domino. □

Sekarang kita perlu memperhatikan banyaknya domino minimum yang dapat memotong garis v_7 dan v_8.

Lemma

Garis v_7 dan v_8 minimal dipotong oleh 5 domino.

Bukti. Dengan argumen yang serupa, karena terdapat 7 petak pada kolom 9, garis v_8 harus dipotong oleh setidaknya 3 domino. Selain itu, domino-domino yang sudah ada tidak mungkin memotong garis v_7. Jadi harus terdapat setidaknya 2 petak horizontal yang menutupi kolom 7 dan 8. Sehingga diperlukan minimal $2 + 3 = 5$ domino. □

Jadi banyaknya domino minimal agar semua garis vertikal dipotong oleh sedikitnya dua domino ini tercapai, adalah $15 + 2 + 3 = 20$.

Analog, untuk garis-garis horizontal, baris 2, 4, dan 6 juga memiliki 9 petak, sementara baris 9 memiliki 7 petak. Dengan argumen yang serupa, kita juga perlu setidaknya 20 domino yang menutupi garis-garis horizontal yang ada. Namun, $20 + 20 = 40 > 38$, sementara kita hanya bisa memuat 38 domino pada papan catur tersebut, yang merupakan suatu kontradiksi. □

Komentar. Tinjau bahwa papan catur simetris terhadap garis diagonal kanan bawahnya. Maka argumen minimum domino untuk menutupi garis vertikal dan horizontal akan selalu sama. Sementara kita memiliki 19 domino yang bisa menutupi masing-masing banyaknya garis vertikal atau horizontal, jadi kita ingin memunculkan sesuatu agar minimumnya 20. Dapat diduga bahwa untuk soal terakhir dalam KSN-P, soal macam ini "terlalu mudah" jika penyelesaiannya hanyalah pencarian konfigurasi. Observasi paritas tersebut adalah kunci dari menyelesaikan soal ini.