wildan-wicaksono.github.io

Solusi OSP SMA 2024

Bidang Matematika

Wildan Bagus Wicaksono

2024

Bagian I – Soal

1. Isian Singkat

Terdiri dari 8 soal isian singkat. Setiap soal dijawab dengan menuliskan **jawaban akhirnya saja** dan dipastikan merupakan **bilangan bulat**. Soal yang dijawab benar bernilai 2 poin, sedangkan soal yang dijawab salah atau tidak dijawab bernilai 0 poin.

....

1 Diketahui $\overline{ab}$ dan $\overline{cd}$ masing-masing adalah dua bilangan dua digit yang hasil kalinya 777. Jika diketahui $\overline{ab} < \overline{cd}$, nilai dari $a + b$ adalah . . . .

2 Misalkan f dan g adalah fungsi linear yang memenuhi

$$f(x + g(y)) = 7x + 2y + 11$$

untuk setiap bilangan real x dan y. Jika diketahui $g(7) = 3$, maka nilai dari $g(-11 + f(4))$ adalah . . . .

Catatan. Fungsi linear adalah fungsi berbentuk $h(x) = ax+b$ dengan a dan b konstanta bilangan real.

3 Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $AB = 15$, $AC = 13$, dan $BC = 4$. Diketahui bahwa terdapat sebuah segitiga sama sisi PQR dengan P, Q, dan R masing-masing terletak pada sisi BC, CA, dan AB sehingga PQ sejajar AB. Nilai $\frac{PQ}{AB}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$ dengan a, b, c, dan d dengan a bilangan bulat positif, d tidak habis dibagi bilangan kuadrat yang lebih besar dari 1 dan $\text{FPB}(a, b, c) = 1$. Nilai dari $a + b + c + d$ adalah . . . .

4 Masing-masing petak pada papan berukuran 3×2023 akan diwarnai salah satu dari warna hitam atau putih, sedemikian sehingga setiap subpapan berukuran 2×2, terdapat masing-masing sebanyak ganjil petak berwarna hitam dan ganjil petak berwarna putih. Misalkan banyaknya cara pewarnaan petak yang mungkin adalah A, sisa dari A ketika dibagi 1000 adalah . . . .

5 Banyaknya bilangan asli a kurang dari 209 sehingga $\text{FPB}(a, 209) = 1$ dan $a^2 - 1$ bukan kelipatan dari 209 adalah . . . .

6 Pada persegi $ABCD$ dengan panjang sisi $\sqrt{2} + \sqrt{6}$, titik X terletak pada diagonal AC sehingga $AX > XC$. Garis bagi dalam sudut AXB memotong sisi AB pada titik U. Garis bagi dalam sudut CXD memotong sisi CD pada titik V. Jika $\angle UXV = 150°$, maka nilai dari $\lfloor 3 \times UV^2 \rfloor$ adalah . . . .

Catatan. Notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.

7 Diberikan himpunan $S = \{1, 2, \cdots, 18\}$. Misalkan N adalah banyaknya pasangan terurut (A, B) dengan A, B himpunan bagian dari S sehingga $|A \cap B| \leqslant 2$. Nilai dari $\frac{N}{3^{16}}$ adalah . . . .

Catatan. Notasi $|X|$ menyatakan banyaknya anggota dari himpunan X.

8 Misalkan a, b, c merupakan bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan

$$\left|ax^2 + bx + c\right| \leqslant (18x - 5)^2$$

untuk setiap bilangan real x. Nilai terkecil yang mungkin dari $a + 2b + 5c$ adalah . . . .

2. Uraian

Terdiri dari 4 soal uraian. Setiap soal dijawab dengan menuliskan jawaban beserta langkah pengerjaan dan argumentasi yang lengkap untuk mendukung jawaban Anda. Setiap soal maksimal bernilai 7 poin dan nilai parsial dapat diberikan.

....

1 Diberikan bilangan real $C \leqslant 2$. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif x dan y dengan $xy = 1$, berlaku ketaksamaan

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{C}{x+y} \geqslant 1 + \frac{C}{2}.$$

2 Diberikan sebuah papan $n \times n$ yang terbagi menjadi petak-petak berukuran 1×1 yang kesemuanya berwarna putih. Aqua memilih beberapa buah petak dari papan ini dan mewarnainya dengan warna hitam. Ruby kemudian meletakkan tepat satu buah domino berukuran 1×2 di papan, sehingga domino tersebut menutupi tepat dua buah petak di papan. Ruby dapat memuator domino tersebut menjadi domino 2×1. Setelah Aqua mewarnai, ternyata ada tepat 2024 cara bagi Ruby untuk meletakkan sebuah domino di papan sehingga domino tersebut menutupi tepat 1 petak hitam dan tepat 1 petak putih.

Tentukan nilai n terkecil yang mungkin agar Aqua dan Ruby dapat melakukan hal ini.

3 Pada segitiga ABC, titik X, Y, dan Z masing-masing titik tengah dari BC, CA, dan AB berturut-turut. Garis sumbu $\overline{AB}$ memotong garis XY dan garis AC berturut-turut pada Z_1 dan Z_2. Garis sumbu $\overline{AC}$ memotong XZ dan garis AB berturut-turut pada Y_1 dan Y_2. Misalkan K adalah titik sehingga $KZ_1 = KZ_2$ dan $KY_1 = KY_2$. Buktikan bahwa $KB = KC$.

4 Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli $1 \leqslant a, b \leqslant 2027$ yang memenuhi

$$a^6 + b^5 + b^2$$

kelipatan 2027.

Bagian II – Solusi

3. Solusi Isian Singkat

1 Diketahui $\overline{ab}$ dan $\overline{cd}$ masing-masing adalah dua bilangan dua digit yang hasil kalinya 777. Jika diketahui $\overline{ab} < \overline{cd}$, nilai dari $a + b$ adalah . . . .

Jawab: 3

Perhatikan bahwa $777 = 7 \cdot 3 \cdot 37 = 21 \cdot 37$ sehingga $\overline{ab} = 21$. Jadi, $a = 2$ dan $b = 1$ sehingga $a + b = \boxed{3}$.

. . . .

2 Misalkan f dan g adalah fungsi linear yang memenuhi

$$f(x + g(y)) = 7x + 2y + 11$$

untuk setiap bilangan real x dan y. Jika diketahui $g(7) = 3$, maka nilai dari $g(-11 + f(4))$ adalah . . . .

Catatan. Fungsi linear adalah fungsi berbentuk $h(x) = ax + b$ dengan a dan b konstanta bilangan real.

Jawab: 7

Misalkan $P(x, y)$ menyatakan asersi $f(x + g(y)) = 7x + 2y + 11$. Dari $P(x - 3, 7)$ memberikan

$$\begin{aligned} f(x - 3 + g(7)) &= 7(x - 3) + 2(7) + 11 \\ f(x - 3 + 3) &= 7x - 21 + 14 + 11 \\ f(x) &= 7x + 4. \end{aligned}$$

Ini berarti $f(4) = 7(4) + 4 = 32$ sehingga $g(-11 + f(4)) = g(-11 + 32) = g(21)$. Dari $P(0, 21)$ memberikan

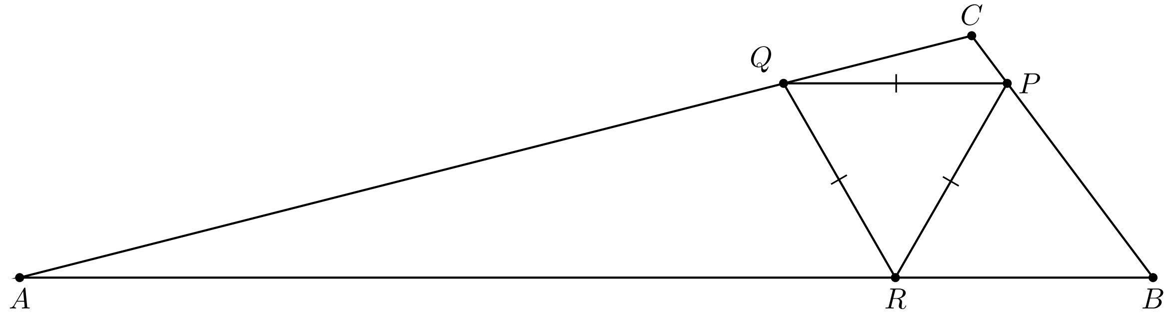
$$\begin{aligned} f(0 + g(21)) &= 7(0) + 2(21) + 11 \\ f(g(21)) &= 53 \\ 7g(21) + 4 &= 53 \\ g(21) &= 7. \end{aligned}$$

Jadi, $g(-11 + f(4)) = \boxed{7}$.

. . . .

3 Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $AB = 15$, $AC = 13$, dan $BC = 4$. Diketahui bahwa terdapat sebuah segitiga sama sisi PQR dengan P, Q, dan R masing-masing terletak pada sisi BC, CA, dan AB sehingga PQ sejajar AB. Nilai $\frac{PQ}{AB}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$ dengan a, b, c, dan d dengan a bilangan bulat positif, d tidak habis dibagi bilangan kuadrat yang lebih besar dari 1 dan $\text{FPB}(a, b, c) = 1$. Nilai dari $a + b + c + d$ adalah . . . .

Jawab: 142



Karena $PQ \parallel AB$, maka $\angle CPQ = \angle CBA$ dan $\angle CQP = \angle CAB$ sehingga $\triangle CPQ \sim \triangle CBA$. Ini berarti $\frac{PQ}{AB} = \frac{PC}{CB}$. Misalkan panjang $PC = x$, $\angle CAB = \alpha$, dan $\angle CBA = \beta$. Di sini diperoleh $\angle CPQ = \beta$, $\angle PCQ = 180° - \alpha - \beta$, dan $\angle BRP = \angle RPQ = 60°$. Dari aturan sinus $\triangle CPQ$ memberikan

$$\frac{x}{\sin \angle CQP} = \frac{PQ}{\sin \angle PCQ} \iff PQ = \frac{\sin(180° - \alpha - \beta)}{\sin \alpha} x = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} x.$$

Tinjau bahwa panjang $PR = PQ = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha} x$. Dari aturan sinus $\triangle BPR$ memberikan

$$\frac{PR}{\sin \angle RBP} = \frac{PB}{\sin \angle BRP} \iff PB = \frac{\sin 60°}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} x$$

Dati aturan sinus segitiga ABC memberikan

$$\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{BC}{\sin \angle BAC} \iff \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{AB}{BC} = \frac{15}{4}.$$

Dari aturan conis $\triangle ABC$,

$$\cos \beta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{15^2 + 4^2 - 13^2}{2 \cdot 15 \cdot 4} = \frac{3}{5}$$

sehingga $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{4}{5}$. Ini berarti

$$PB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{15}{4} x = \frac{75}{32} \sqrt{3} x.$$

Ini berarti

$$\frac{CP}{CB} = \frac{x}{x + \frac{75}{32}\sqrt{3}} = \frac{32}{32 + 75\sqrt{3}}$$

sehingga $a = b = 32$, $c = 75$, dan $d = 3$. Jadi, $a + b + c + d = \boxed{142}$.

. . . .

4 Masing-masing petak pada papan berukuran 3×2023 akan diwarnai salah satu dari warna hitam atau putih, sedemikian sehingga setiap subpapan berukuran 2×2, terdapat masing-masing sebanyak ganjil petak berwarna hitam dan ganjil petak berwarna putih. Misalkan banyaknya cara pewarnaan petak yang mungkin adalah A, sisa dari A ketika dibagi 1000 adalah . . . .

Jawab: 432

Perhatikan bahwa pada setiap kolom (subpapan 3×1) harus terdiri dari dua warna yang sama di mana warna yang sama tersebut harus terletak pada posisi paling atas atau paling bawah, atau semua warnanya sama.

Misalkan A menyatakan warna hitam dan B menyatakan warna putih.

- Misalkan suatu kolom memiliki konfigurasi ABA atau BAB. Kolom berikutnya (di sebelah kanan) dapat memiliki dua konfigurasi: AAA atau BBB.

	A			
	B			
	A			

	B			
	A			
	B			

- Misalkan suatu kolom memiliki konfigurasi AAA atau BBB. Kolom berikutnya (di sebelah kanan) dapat memiliki dua konfigurasi: ABA atau BAB.

	A			
	A			
	A			

	B			
	B			
	B			

- Misalkan suatu kolom memiliki konfigurasi AAB, BBA, ABB, atau BAA. Kolom berikutnya (di sebelah kanan) memiliki aturan sebagai

$$AAB/BBA \to ABB/BAA, \quad ABB/BAA \to AAB/BBA.$$

	B			
	A			
	A			

	A			
	A			
	B			

Dari sini diperoleh bahwa setiap kolom pertama diisi sebarang, kolom-kolom berikutnya masing-masing memiliki 2 cara yang konfigurasinya bersesuaian dengan kolom sebelumnya. Kolom pertama memiliki $2^3 = 8$ cara, sedangkan sisanya ada $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2022} = 2^{2022}$ cara. Jadi, $A = 2^3 \cdot 2^{2022} = 2^{2025}$.

Euler's Totient Theorem

Misalkan n bilangan asli. Jika $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ merupakan faktorisasi prima dari n, maka

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Di sini, $\varphi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli k yang tidak lebih dari n dan relatif prima dengan n.

Euler's Theorem

Misalkan $n > 1$ bilangan asli dan a bilangan bulat dengan a dan n relatif prima. Maka berlaku

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Tinjau bahwa $A \equiv 0 \pmod{8}$. Akan ditentukan $A \pmod{125}$. Perhatikan bahwa $\varphi(125) = \varphi(5^3) = 125\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 100$. Ini berarti $2^{\varphi(125)} \equiv 1 \pmod{125}$ sehingga $2^{100} \equiv 1 \pmod{125}$. Ini berarti

$$2^{2025} \equiv 2^{2025 \mod 100} \equiv 2^{25} \pmod{125}.$$

Tinjau bahwa $2^7 = 128 \equiv 3 \pmod{125}$, maka

$$A = 2^{2025} \equiv 2^{25} \equiv \left(2^7\right)^3 \cdot 2^4 \equiv 3^3 \cdot 16 \equiv 27 \cdot 16 \equiv 57 \pmod{125}.$$

Misalkan $A = 125k + 57$ di mana k suatu bilangan asli, maka dari mod 8 berlaku

$$0 \equiv 125k + 57 \equiv 5k + 1 \pmod{8} \implies 5k \equiv 7 \pmod{8}.$$

Kalikan kedua ruas dengan 3, $15k \equiv 21 \pmod{8}$ sehingga $-k \equiv -3 \pmod{8}$ yang berarti $k \equiv 3 \pmod{8}$. Misalkan $k = 8l + 3$ di mana l bilangan asli. Diperoleh

$$A = 125k + 57 = 125(8l + 3) + 57 = 1000l + 375 + 57 = 1000l + \boxed{432}.$$

. . . .

5 Banyaknya bilangan asli a kurang dari 209 sehingga $\text{FPB}(a, 209) = 1$ dan $a^2 - 1$ bukan kelipatan dari 209 adalah . . . .

Jawab: 176

Perhatikan bahwa $209 = 11 \cdot 19$. Akan ditentukan banyaknya bilangan asli $a < 209$ sehingga $209 \mid a^2 - 1$, ini berarti $11 \mid a^2 - 1$ dan $19 \mid a^2 - 1$. Karena 11 dan 19 prima, maka $a \equiv \pm 1 \pmod{11}$ dan $a \equiv \pm 1 \pmod{19}$ sehingga menunjukkan $\text{FPB}(a, 209) = 1$. Dari Chinese Remainder Theorem, ada $2 \cdot 2 = 4$ solusi a dalam modulo 209. Dari sini diperoleh ada 4 solusi untuk $1 \leqslant a \leqslant 208$. Perhatikan bahwa banyak bilangan asli kurang dari 209 yang relatif prima dengan 209 (lihat Euler's Totient Theorem di nomor 4),

$$\varphi(209) = \varphi(11 \cdot 19) = 209 \left(1 - \frac{1}{11}\right)\left(1 - \frac{1}{19}\right) = 180.$$

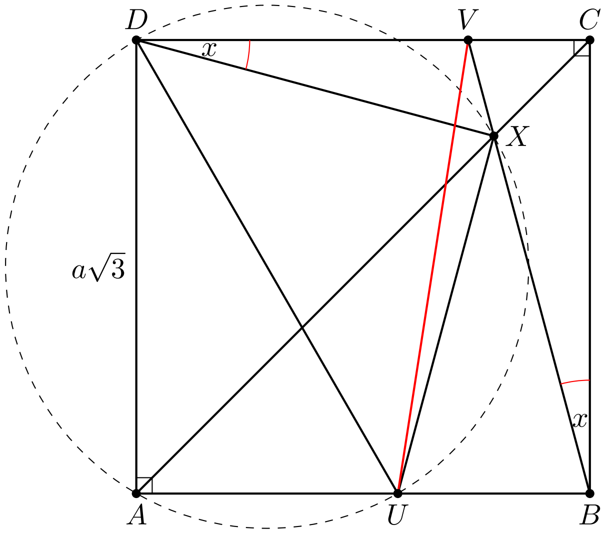
Jadi, banyak bilangan asli yang diminta pada soal adalah $180 - 4 = \boxed{176}$.

. . . .

6 Pada persegi $ABCD$ dengan panjang sisi $\sqrt{2} + \sqrt{6}$, titik X terletak pada diagonal AC sehingga $AX > XC$. Garis bagi dalam sudut AXB memotong sisi AB pada titik U. Garis bagi dalam sudut CXD memotong sisi CD pada titik V. Jika $\angle UXV = 150^\circ$, maka nilai dari $\lfloor 3 \times UV^2 \rfloor$ adalah . . . .

Catatan. Notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.

Jawab: 45



Misalkan $AD = a\sqrt{3}$ dan misalkan $\angle XBC = x$. Perhatikan bahwa panjang $CB = CD, CX = CX$, dan $\angle XCB = \angle XCD = 45^\circ$, maka $\triangle XCB \cong \triangle XCD$. Ini berarti $\angle XDC = \angle XBC = x$ sehingga $\angle DXV = \angle VXC = \frac{135^\circ - x}{2}$ dan $\angle AXU = \angle BXU = \frac{45^\circ + x}{2}$.

Perhatikan bahwa $\angle XDA = 90^\circ - \angle XDC = 90^\circ - x$ sehingga dari segitiga AXD memberikan $\angle XDA = 45^\circ + x$. Ini berarti

$$150^\circ = \angle UXV = \frac{45^\circ + x}{2} + 45^\circ + x + \frac{135^\circ - x}{2} = 135^\circ + x$$

sehingga $x = 15^\circ$. Jadi, $\angle AXU = \angle BXU = 30^\circ$, $\angle DXV = \angle CXV = 60^\circ$, dan $\angle DXA = 60^\circ$ sehingga $\angle DXU = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. Karena $\angle UAD + \angle UXD = 180^\circ$, maka A, U, X, D konsiklis. Ini berarti $\angle XDU = \angle XAU = 45^\circ$, $\angle XUD = \angle XAD = 45^\circ$, dan $\angle AUD = \angle AXD = 60^\circ$. Dari sini diperoleh $AU = a$ dan $DU = 2a$. Karena panjang $XD = XU$ dan $\angle UXD = 90^\circ$, diperoleh $XD = XU = a\sqrt{2}$. Dari Teorema Ptolemy $AUXD$,

$$AX \cdot UD = AD \cdot XU + XD \cdot AU \iff AX = \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2} + a\sqrt{2} \cdot a}{2a} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} a.$$

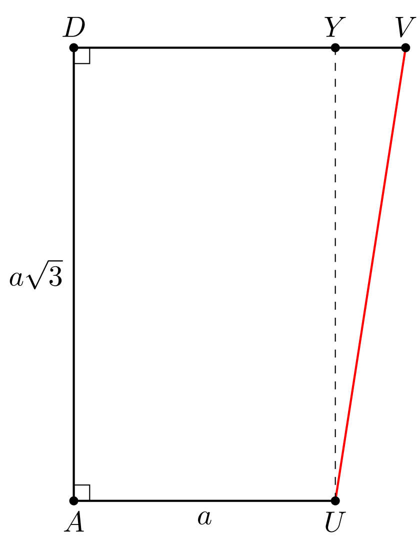
Dari teorema garis bagi DXC,

$$\frac{DV}{VC} = \frac{DX}{XC} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} a} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1.$$

Dari sini diperoleh

$$DV = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 2} \cdot DC = \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot a\sqrt{3} = \left(3 - \sqrt{3}\right) a.$$

Perhatikan trapesium $AUVD$, misalkan Y proyeksi U ke DV. Dari sini diperoleh $YV = DV - DY = \left(2 - \sqrt{3}\right) a$ dan $UY = a\sqrt{3}$.



Dari Teorema Pythagoras UYV,

$$\begin{aligned} UV^2 &= 3a^2 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2 a^2 \\ &= 3a^2 + \left(7-4\sqrt{3}\right) a^2 \\ &= \left(10-4\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= \frac{32+8\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Jadi, $3UV^2 = 32 + 8\sqrt{3}$ sehingga

$$\left\lfloor 3UV^2 \right\rfloor = \left\lfloor 32+8\sqrt{3} \right\rfloor = 32 + \left\lfloor 8\sqrt{3} \right\rfloor = 32 + 13 = \boxed{45}$$

karena $12 < 8\sqrt{3} < 13$.

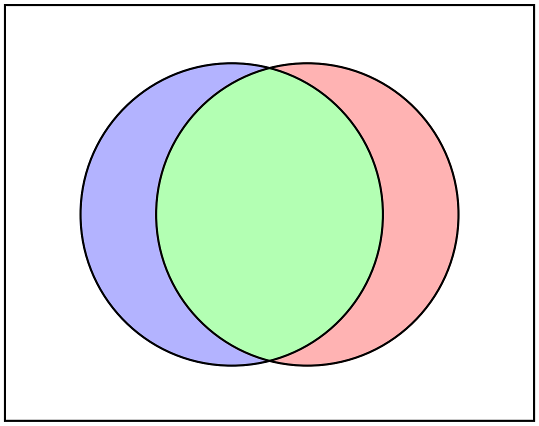
....

7 Diberikan himpunan $S = \{1, 2, \cdots, 18\}$. Misalkan N adalah banyaknya pasangan terurut (A, B) dengan A, B himpunan bagian dari S sehingga $|A \cap B| \leqslant 2$. Nilai dari $\frac{N}{3^{16}}$ adalah . . . .

Catatan. Notasi $|X|$ menyatakan banyaknya anggota dari himpunan X.

Jawab:

Perhatikan ilustrasi diagram venn berikut.



Akan dibagi menjadi 3 kasus.

Kasus 1: $|A \cap B| = 0$

Ini artinya seitap anggota S memiliki 3 kemungkinan penempatan, yaitu daerah biru, merah, atau putih. Di sin iada 3^{18} cara.

Kasus 2: $|A \cap B| = 1$

Banyak cara memilih tepat 1 anggota S untuk berada di daerah hijau adalah $\binom{18}{1} = 18$, sedangkan untuk anggota lainnya memiliki 3 cara. Jadi, ada $18 \cdot 3^{17}$ cara.

Kasus 3: $|A \cap B| = 2$

Banyak cara memilih tepat 2 anggota S untuk berada di daerah hijau adalah $\binom{18}{2} = 153$, sedangkan untuk anggota lainnya memiliki 3 cara. Jadi, ada $153 \cdot 3^{16}$ cara.

Jadi, $N = 3^{18} + 18 \cdot 3^{17} + 153 \cdot 3^{16}$ sehingga $\frac{N}{3^{16}} = 3^2 + 18 \cdot 3 + 153 = \boxed{216}$.

. . . .

8 Misalkan a, b, c merupakan bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan

$$\left|ax^2 + bx + c\right| \leqslant (18x - 5)^2$$

untuk setiap bilangan real x. Nilai terkecil yang mungkin dari $a + 2b + 5c$ adalah . . . .

Jawab: -89

Untuk $x = 0$, $|c| \leqslant 25$. Untuk $x = \frac{1}{2}$,

$$\left|\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right| \leqslant 16 \iff |a + 2b + 4c| \leqslant 64.$$

Menggunakan ketaksamaan segitiga $|x| + |y| \geqslant |x + y|$,

$$|a + 2b + 5c| = |(a + 2b + 4c) + c| \leqslant |a + 2b + 4c| + |c| \leqslant 89$$

sehingga $-89 \leqslant a + 2b + 5c \leqslant 89$.
Akan dibuktikan $a + 2b + 5c = -89$ dapat tercapai, di mana $|a + 2b + 5c| = |a + 2b + 4c| + |c|$ terjadi jika dan hanya jika $a + 2b + 4c$ dan c keduanya positif atau keduanya negatif. Ini berarti $a + 2b + 4c = -64$ dan $c = -25$ sehingga diperoleh $a + 2b = 36$. Karena $x = \frac{5}{18}$ memberikan $\left|\left(\frac{5}{18}\right)^2 a + \frac{5}{18}b + c\right| = 0$ sehingga $\frac{25}{324}a + \frac{5}{18}b - 25 = 0$, dari sini akan diperoleh $a = -324$ dan $b = 180$. Dengan kondisi $(a, b, c) = (-324, 180, -25)$ terpenuhi karena

$$|-324x^2 + 180x - 25| = \left|-(18x - 5)^2\right| = (18x - 5)^2.$$

Jadi, nilai minimumnya adalah $\boxed{-89}$.

4. Solusi Uraian

1 Diberikan bilangan real $C \leqslant 2$. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif x dan y dengan $xy = 1$, berlaku ketaksamaan

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{C}{x+y} \geqslant 1 + \frac{C}{2}.$$

Bukti.

Perhatikan bahwa dari QM-AM berlaku $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2}$. Ini berarti

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{C}{x+y} \geqslant \frac{x+y}{2} + \frac{C}{x+y}.$$

Misalkan $a = x + y$, dari AM-GM berlaku $x + y \geqslant 2\sqrt{xy} = 2$ sehingga $a \geqslant 2$. Sekarang, akan dibuktikan bahwa $\frac{a}{2} + \frac{C}{a} \geqslant 1 + \frac{C}{2}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{2} + \frac{C}{a} && \geqslant 1 + \frac{C}{2} \\
\iff \quad & a^2 + 2C && \geqslant 2a + aC \\
\iff \quad & a^2 - 2a + 2C - aC && \geqslant 0 \\
\iff \quad & a(a-2) - C(a-2) && \geqslant 0 \\
\iff \quad & (a-C)(a-2) && \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Baris terakhir benar karena $a \geqslant 2 \geqslant C$.

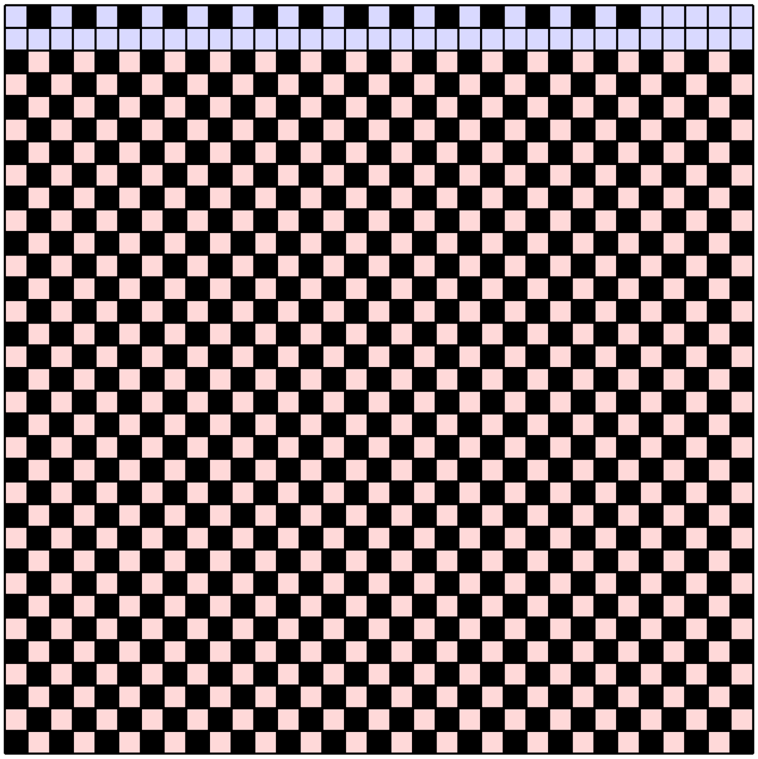
2 Diberikan sebuah papan $n \times n$ yang terbagi menjadi petak-petak berukuran 1×1 yang kesemuanya berwarna putih. Aqua memilih beberapa buah petak dari papan ini dan mewarnainya dengan warna hitam. Ruby kemudian meletakkan tepat satu buah domino berukuran 1×2 di papan, sehingga domino tersebut menutupi tepat dua buah petak di papan. Ruby dapat memutar domino tersebut menjadi domino 2×1. Setelah Aqua mewarnai, ternyata ada tepat 2024 cara bagi Ruby untuk meletakkan sebuah domino di papan sehingga domino tersebut menutupi tepat 1 petak hitam dan tepat 1 petak putih.

Tentukan nilai n terkecil yang mungkin agar Aqua dan Ruby dapat melakukan hal ini.

Jawab: 33

Banyaknya peletakan domino 1×2 maksimalnya adalah $n(n-1)$, sedangkan jika 2×1 maksimalnya juga $n(n-1)$ (tinjau ketika papan diwarnai seperti papan catur). Ini berarti haruslah $n(n-1)+n(n-1) \geqslant 2024$ sehingga diperoleh $n \geqslant 33$.

Akan dibuktikan $n = 33$ tercapai melalui konstruksi yang mungkin. Warnai subpapan 31×32 layaknya papan catur (daerah yang berwarna merah), sedangkan pada warnai 14 petak hitam pada subpapan 2×33 (daerah berwarna biru). Banyaknya cara meletakkan domino 1×2 adalah $31 \cdot 32 + 28 = 1020$. Sedangkan, banyaknya cara meletakkan domino 2×1 adalah $30 \cdot 33 + 14 = 1004$. Sehingga banyak cara seluruhnya adalah $1020 + 1004 = 2024$.



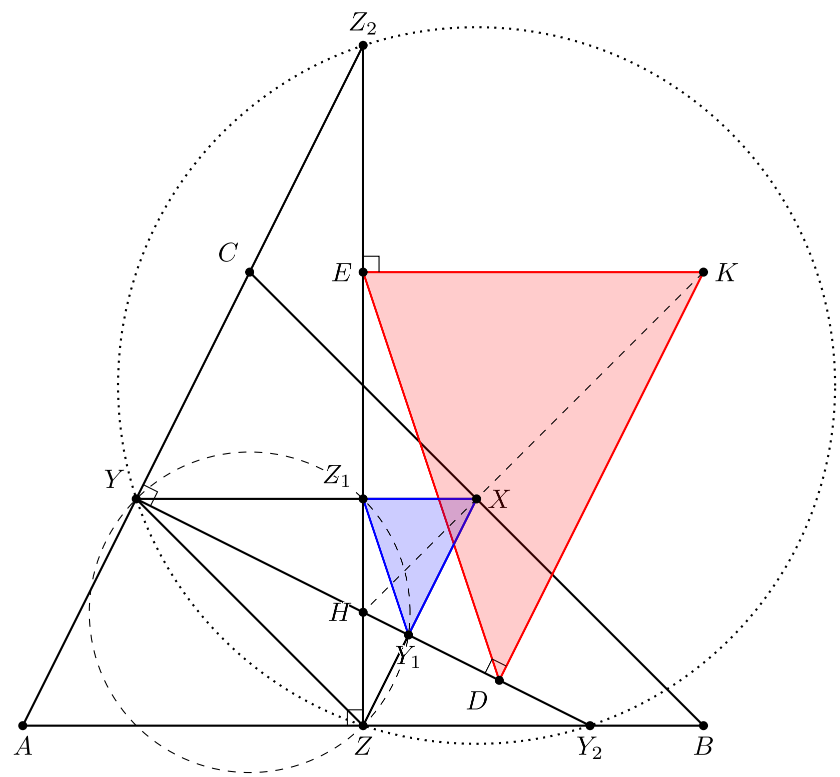
Cara Konstruksi. Bagian ini merupakan motivasi untuk membuat konstruksi papan yang memenuhi. Perhatikan bahwa banyaknya cara peletakan maksimal saat papan diwarnai seperti papan catur. Kita coba lakukan hal serupa, namun dengan mewarnai subpapannya terlebih dahulu. Untuk membuat ini, warnai subpapan 32×33 papan layaknya papan catur. Pada subpapan ini, banyaknya cara meletakkan 1×2 ada $32 \cdot 32 = 1024$ cara. Sedangkan, untuk 2×1 ada sebanyak $31 \cdot 33 = 1023$ sehingga sementara ada $1024 + 1023 = 2027$ cara, sudah lebih dari 2024.

Sekarang, warnai subpapan 31×33 papan layaknya papan catur. Pada subpapan ini, banyaknya cara meletakkan 1×2 ada $32 \cdot 31 = 992$ cara. Sedangkan, untuk 2×1 ada sebanyak $30 \cdot 33 = 990$ cara. Sementara ada sebanyak $992 + 930 = 1982$ cara sehingga diperlukan $2024 - 1982 = 42$ cara tambahan agar tercapai. Di sini saya memiliki strategi dengan menambahkan petak hitam di bagian paling atas papan, di mana satu petak hitam bisa menambahkan 3 cara peletakan domino 1×2 atau 2×1. Maka cukup dibuat petak hitam yang tidak bersebelahan sebanyak 14 petak.

3 Pada segitiga ABC, titik X, Y, dan Z masing-masing titik tengah dari BC, CA, dan AB berturut-turut. Garis sumbu $\overline{AB}$ memotong garis XY dan garis AC berturut-turut pada Z_1 dan Z_2. Garis sumbu $\overline{AC}$ memotong XZ dan garis AB berturut-turut pada Y_1 dan Y_2. Misalkan K adalah titik sehingga $KZ_1 = KZ_2$ dan $KY_1 = KY_2$. Buktikan bahwa $KB = KC$.

Bukti.

Perhatikan bahwa $KZ_1 = KZ_2$ artinya K terletak pada garis sumbu $\overline{Z_1Z_2}$, sedangkan $KY_1 = KY_2$ artinya K terletak pada garis sumbu $\overline{Y_1Y_2}$. Jadi, K perpotongan dua garis sumbu $\overline{Z_1Z_2}$ dan $\overline{Y_1Y_2}$. Perhatikan bahwa untuk membuktikan $KB = KC$, cukup dibuktikan bahwa K berada di garis sumbu $\overline{BC}$, yakni $KX \perp BC$. Misalkan D dan E berturut-turut titik tengah Y_1Y_2 dan Z_1Z_2. Ini berarti $\angle KDY = \angle KEZ = 90°$. Misalkan pula H perpotongan YY_1 dan ZZ_1.



Midpoint Theorem

Diberikan segitiga ABC. Jika P dan Q berturut-turut titik tengah AB da AC, maka $PQ \parallel BC$ dan $PQ = \frac{BC}{2}$.

Karena X dan Y titik tengah CA dan CB, maka $XY \parallel AB$. Dengan cara yang sama, $XZ \parallel AC$ dan $YZ \parallel BC$. Ini berarti $ZZ_2 \perp XY$ dan $YY_2 \perp XZ$ sehingga ZZ_2, YY_1 masing-masing garis tinggi segitiga XYZ. Ini berarti H titik tinggi segitiga XYZ. Perhtikan bahwa $\angle HY_1X =$

$\angle HDK = 90^\circ$, maka $XY_1 \parallel KD$. Secara analog, $KE \parallel XZ_1$. Perhatikan bahwa $\angle Y_2ZZ_2 = \angle Y_2YZ_2 = 90^\circ$ sehingga Y_2, Z, Y, Z_2 terletak pada lingkaran yang sama. Selain itu, $\angle YY_1Z = \angle YZ_1Z = 90^\circ$ sehingga Y, Z, Y_1, Z_1 konsiklis. Dari Power of Point,

$$HY_2 \cdot HY = HZ_2 \cdot HZ, \quad HY \cdot HY_1 = HZ \cdot HZ_1$$

yang mana ini memberikan

$$\frac{HY_1}{HZ_1} = \frac{HZ}{HY} = \frac{HY_2}{HZ_2} \implies \frac{HY_1}{HY_2} = \frac{HZ_1}{HZ_2} \implies \frac{HY_2}{HY_1} = \frac{HZ_2}{HZ_1}.$$

Kurangkan kedua ruas dengan 1,

$$\frac{HY_2}{HY_1} - 1 = \frac{HZ_2}{HZ_1} - 1 \implies \frac{HY_2 - HY_1}{HY_1} = \frac{HZ_2 - HZ_1}{HZ_1} \implies \frac{Y_1Y_2}{HY_1} = \frac{Z_1Z_2}{HZ_1}.$$

Karena $Y_1Y_2 = 2Y_1D$ dan $Z_1Z_2 = 2Z_1E$, maka

$$\frac{2Y_1D}{HY_1} = \frac{Y_1Y_2}{HY_1} = \frac{Z_1Z_2}{HZ_1} = \frac{2Z_1E}{HZ_1} \implies \frac{Y_1D}{HY_1} = \frac{Z_1E}{HZ_1}.$$

Tambahkan kedua ruas dengan 1 memberikan $\frac{HD}{HY_1} = \frac{HE}{HZ_1}$. Karena $\angle Y_1HZ_1 = \angle DHE$, maka $\triangle HY_1Z_1 \sim \triangle HDE$ (SAS) sehingga $Y_1Z_1 \parallel DE$. Karena segitiga XY_1Z_1 dan KDE merupakan segitiga yang memiliki tiga pasang sisi sejajar serta DY_1 dan EZ_1 berpotongan di H, maka H merupakan pusat homothety (dilatasi) yang memetakan $\triangle XY_1Z_1$ ke $\triangle KDE$. Ini artinya H memetakan X ke K yang artinya H, X, K kolinear. Karena $XH \perp BC$, maka $KX \perp BC$ seperti yang ingin dibuktikan.

4 Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli $1 \leqslant a, b \leqslant 2027$ yang memenuhi

$$a^6 + b^5 + b^2$$

kelipatan 2027.

Jawab: 2028

Kasus 1: $b = 2027$

Ini berarti $2027 \mid a^6 + 2027^5 + 2027^2$ sehingga haruslah $2027 \mid a^6$. Karena 2027 prima, maka $2027 \mid a$ sehingga $a = 2027$. Jadi, dalam kasus ini diperoleh 1 solusi, yaitu $(a, b) = (2027, 2027)$.

Kasus 2: $a = 2027$ dan $b < 2027$

Ini berarti $2027 \mid 2027^6 + b^5 + b^2$ sehingga $2027 \mid b^5 + b^2 = b^2(b^3 + 1)$. Karena $b < 2027$ dan 2027 prima, maka $2027 \mid b^3 + 1$. Ini berarti $b^3 \equiv 2026 \pmod{2027}$.

Sifat Primitive Root

Misalkan p bilangan prima ganjil. Maka terdapat bilangan bulat r (disebut primitive root modulo p) yang memenuhi $r^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ dan $r^k \not\equiv 1 \pmod p$ untuk setiap $1 \leqslant k \leqslant p - 2$. Selain itu, berlaku

$$\left\{r^1, r^2, r^3, \cdots, r^{p-1}\right\} \pmod p = \{1, 2, \cdots, p - 1\}.$$

Lemma Kelas Lengkap

Misalkan n bilangan asli dan a bilangan bulat yang relatif prima. Maka berlaku

$$\{a, 2a, 3a, \cdots, (n-1)a, na\} \pmod n = \{0, 1, 2, \cdots, n - 1\}.$$

Bukti. Andaikan ada $1 \leqslant i < j \leqslant n$ yang memenuhi $ia \equiv ja \pmod n$ yang berarti $n \mid ja - ia = (j - i)a$. Karena $\text{FPB}(a, n) = 1$, maka $n \mid j - i$. Mengingat $1 \leqslant j - i \leqslant n - 1$, kontradiksi bahwa $n \mid j - i$. $\square$

Misalkan r primitive root dari modulo 2027. Ini berarti $\{r^1, r^2, \cdots, r^{2026}\} \pmod{2027} = \{1, 2, \cdots, n-1\}$. Ini berarti

$$\left\{r^{3\cdot 1}, r^{3\cdot 2}, \cdots, r^{3\cdot 2026}\right\} \equiv \left\{1^3, 2^3, \cdots, 2026^3\right\} \pmod{2027}.$$

Karena $\text{FPB}(3, 2026) = 1$, maka

$$\{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \cdots, \cdots, 3 \cdot 2026\} \equiv \{0, 1, \cdots, 2025\} \pmod{2026}.$$

Karena $r^{2026} \equiv 1 \pmod{2027}$, ini berarti

$$\begin{aligned}\left\{r^{3\cdot 1}, r^{3\cdot 2}, \cdots, r^{3\cdot 2026}\right\} &\equiv \left\{r^{3\cdot 1 \mod 2026}, r^{3\cdot 2 \mod 2026}, \cdots, r^{3\cdot 2026 \mod 2026}\right\} &\pmod{2027}\\ &\equiv \left\{r^0, r^1, r^2, \cdots, r^{2025}\right\} &\pmod{2027}\\ &\equiv \{1, 2, \cdots, 2026\} &\pmod{2027}.\end{aligned}$$

Ini menunjukkan bahwa ada tepat satu $1 \leqslant k \leqslant 2026$ yang memenuhi $r^{3k} \equiv 2026 \pmod{2027}$. Ini berarti hanya ada tepat satu solusi $1 \leqslant b \leqslant 2026$ yang memenuhi $b^3 \equiv 2026 \pmod{2027}$, yaitu $b \equiv r^k \pmod{2027}$.

Jadi, dalam kasus ini ada 1 solusi.

Kasus 3: a, b < 2027

Perhatikan bahwa $a^6 + b^5 + b^2 \equiv 0 \pmod{2027}$ sehingga $a^6 \equiv -b^2\left(b^3+1\right) \pmod{2027}$. Karena FPB$(b, 2027)$, maka b^{-1} ada sehingga $\left(a^3 \cdot b^{-1}\right)^2 \equiv -\left(b^3+1\right) \pmod{2027}$. Ini berarti $-\left(b^3+1\right)$ harus merupakan Quadratic Residue (QR) dalam modulo 2027.

Elemen QR di mod p

Misalkan p prima ganjil. Maka terdapat $\frac{p-1}{2}$ elemen QR di $\{1, 2, \cdots, p-1\}$.

Bukti. Perhatikan bahwa $i^2 \equiv (p-i)^2 \pmod{p}$, cukup dibuktikan bahwa $1^2, 2^2, \cdots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ semuanya berbeda dalam mod p. Andaikan ada $1 \leqslant i < j \leqslant \frac{p-1}{2}$ yang memenuhi $i^2 \equiv j^2 \pmod{p}$, ini berarti $p \mid j^2 - i^2 = (j-i)(j+i)$. Mengingat $1 \leqslant j - i < p$ dan $1 < i + j < p$, kontradiksi bahwa $p \mid (j-i)(j+i)$. Jadi, $1^2, 2^2, \cdots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ semuanya berebda dalam mod p sehingga $\{1, 2, \cdots, p-1\}$ memiliki elemen QR sebanyak $\frac{p-1}{2}$. $\square$

Sebagaimana yang telah diperoleh di kasus sebelumnya, tinjau $b^3 \pmod{2027} \in \{1, 2, \cdots, 2026\}$ sehingga $-\left(b^3+1\right) \pmod{2027} \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 2025\}$. Akan dibuktikan bahwa 2026 merupakan non-QR dalam modulo 2027.

Fermat Little Theorem

Misalkan p bilangan prima dan a bilangan bulat dengan $p \nmid a$. Maka

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Andaikan ada bilangan bulat x yang memenuhi $x^2 \equiv 2026 \pmod{2027}$, maka $x^2 \equiv -1 \pmod{2027}$. Dari Fermat Little Theorem,

$$1 \equiv x^{2026} \equiv \left(x^2\right)^{1013} \equiv (-1)^{1013} \equiv -1 \pmod{2027},$$

kontradiksi. Jadi, 2026 merupakan elemen non-QR yang artinya pada $\{0, 1, 2, \cdots, 2026\}$ ada sebanyak $\frac{2027-1}{2} = 1013$ elemen yang merupakan QR. Jadi, ada 1013 kemungkinan untuk b sehingga $-(b^3+1)$ merupakan QR dalam modulo 2027.

Sekarang, tetapkan nilai $b = b_0$ dan misalkan $-(b_0^3+1) \equiv c^2 \pmod{2027}$ di mana c bilangan bulat. Ini berarti

$$\left(a^3 \cdot b_0^{-1}\right)^2 \equiv -\left(b_0^3+1\right) \equiv c^2 \pmod{2027}.$$

Karena 2027 prima,

$$a^3 \cdot b_0^{-1} \equiv \pm c \pmod{2027} \implies a^3 \equiv \pm b_0 c \pmod{2027}.$$

Sebagaimana yang telah dibuktikan di kasus sebelumnya, $a^3 \equiv b_0 c \pmod{2027}$ memiliki tepat satu solusi untuk a, demikian juga $a^3 \equiv -b_0 c \pmod{2027}$ memiliki tepat satu solusi untuk a. Jadi, ada 2 kemungkinan untuk a sehingga ada $2 \cdot 1013 = 2026$ solusi pasangan (a, b).

Jadi, banyaknya solusi (a, b) adalah $1 + 1 + 2026 = \boxed{2028}$.