PERSIAPAN UTS ANALISIS REAL I

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Pada modul ini tidak akan diberikan bukti pada sifat-sifat yang akan digunakan. Disebut sebagai rangkuman juga tidak tepat karena banyak bagian yang dihilangkan, namun bagian yang disertakan hanya berfokus pada aplikasi model soal yang biasa digunakan dalam ujian Analisis Real I di UB. Sebagian bukti disertakan apabila dirasa penting.

1. Himpunan dan Fungsi

Definisi mengenai himpunan dan fungsi tidak akan dijelaskan di sini. Sifat-sifat himpunan yang telah dipelajari di Himpunan dan Logika juga tidak disertakan.

Definisi 1.1 (Himpunan Terbilang)
Himpunan A disebut *terbilang* jika terdapat fungsi bijektif (korespondensi 1-1) antara A dan $\mathbb{N}$, dinotasikan $A \sim \mathbb{N}$. Himpunan A disebut *paling banyak terbilang* apabila A terbilang atau berhingga.

Jika suatu himpunan terbilang, maka dapat dilakukan 'indeksasi' anggota-anggotanya. Beberapa contoh himpunan terbilang seperti $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, dan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Teorema 1.2 (Subset Himpunan Terbilang)
Misalkan A himpunan terbilang dan $B \subseteq A$. Jika B memiliki tak berhingga banyaknya anggota, maka B terbilang.

Bukti. Lihat nomor 1 pada subbab 4. □

Teorema 1.3 (Gabungan Himpunan Terbilang)
Misalkan $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merupakan barisan himpunan terbilang. Maka himpunan $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ terbilang.

Teorema 1.4 (Hasil Kali Kartesian Himpunan Terbilang)
Jika A dan B terbilang, maka $A \times B$ terbilang.

Bukti. Lihat soal nomor 6 pada subbab 4. □

2. Sistem Bilangan Real

Di sini akan dilewatkan pembahasan dasar-dasar mengenai bilangan real: aksioma bilangan real dan akibat-akibatnya. Namun, lema berikut merupakan catatan penting yang akan sering digunakan dan akan diberikan bukti. Ini menjadi lema sangat penting dalam seluruh pembelajaran analisis.

Date: April 2025, `wildan-wicaksono.github.io`.

Lema 2.1 Misalkan x dan y bilangan real. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $x - \varepsilon < y$, maka $x \leqslant y$.

Bukti. Andaikan $x > y$, pilih $\varepsilon := \frac{x-y}{2} > 0$. Perhatikan bahwa

$$y > x - \varepsilon = x - \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2} > \frac{y+y}{2} = y$$

yang memberikan $y > y$, kontradiksi. Jadi, $x \leqslant y$. □

Teorema 2.2 (Ketaksamaan Segitiga)

Jika x dan y bilangan real, maka

$$\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x-y|, |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Terakhir, dapat dibuktikan sebagai latihan bahwa

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \quad \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Definisi 2.3 (Urutan di Himpunan)

Misalkan S merupakan himpunan tak kosong. Didefinisikan *urutan* di S sebagai relasi, dinotasikan $<$, apabila memenuhi dua sifat berikut:

(a) Jika $x \in S$ dan $y \in S$, maka tepat satu dari ketiga kondisi berikut berlaku: $x < y$, $x = y$, atau $x < y$.

(b) Jika $x, y, z \in S$ memenuhiu $x < y$ dan $y < z$, maka $x < z$.

Secara khusus, jika $S = \mathbb{R}$, hukum ini disebut *trikotomi*. Dinotasikan pula $x \leqslant y$ apabila $x = y$ atau $x < y$.

Definisi 2.4 (Himpunan Terbatas)

Misalkan S himpunan terurut dan $E \subseteq S$ himpunan tak kosong.

(a) Jika terdapat $\alpha \in S$ memenuhi $x \leqslant \alpha$ untuk setiap $x \in E$, maka E disebut *terbatas ke atas* dan β *batas atas* untuk S.

(b) Jika terdapat $\beta \in S$ memenuhi $x \geqslant \beta$ untuk setiap $x \in E$, maka E disebut *terbatas ke bawah* dan α *batas bawah* untuk E.

(c) Himpunan E disebut *terbatas* apabila terbatas ke atas dan terbatas ke bawah.

Definisi 2.5 (Supremum-Infimum)

Diberikan himpunan terurut S dan $E \subseteq S$ himpunan tak kosong.

(a) $\alpha \in S$ disebut *batas atas terkecil* untuk E apabila memenuhi:
   - α batas atas untuk E,
   - untuk setiap batas atas $\alpha' \in S$ untuk E, maka $\alpha \leqslant \alpha'$.

   Nilai dari α juga disebut sebagai *supremum* dari E, dinotasikan $\sup E = \alpha$.

(b) $\beta \in S$ disebut *batas bawah terbesar* untuk E apabila memenuhi:

- β batas bawah untuk E,
- untuk setiap batas bawah $\beta' \in S$ untuk E, maka $\beta \geqslant \beta'$.

Nilai dari β juga disebut sebagai *infimum* dari E, dinotasikan $\inf E = \beta$.

Untuk penyederhanaan pembahasan, di sini akan dipilih $S := \mathbb{R}$.

Contoh 2.6

(1) Himpunan $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ terbatas ke atas karena terdapat $6 \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $x \leqslant 6$ untk setiap $x \in A$. Himpunan A juga terbatas ke bawah karena terdapat $\frac{1}{2} \in A$ yang mmenuhi $x \geqslant \frac{1}{2}$ untuk setiap $x \in A$. Jadi, A himpunan terbatas.

(2) Himpunan $B := (-\infty, 3)$ terbatas ke atas karena terdapat $4 \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $x \leqslant 4$ untuk setiap $x \in B$. Namun, B tidak terbatas ke bawah.

(3) Himpunan $\mathbb{N}$ tidak terbatas.

Berdasarkan definisi di atas, dapat diperoleh lemma berikut.

Lema 2.7 (Kondisi Ekivalen Definisi Supremum)

Misalkan $E \subseteq \mathbb{R}$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Maka $\sup E = \alpha$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $x_\varepsilon \in E$ (bergantung terhadap ε) yang memenuhi $x_\varepsilon - \varepsilon < \alpha$.

Teorema berikut menjadi langkah awal untuk membuktikan sifat-sifat supremum.

Teorema 2.8 (Properti Kelengkapan)

Misalkan $E \subseteq \mathbb{R}$. Jika E terbatas ke atas, maka $\sup E$ ada.

Misalkan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dan $c \in \mathbb{R}$. Didefinisikan

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}. \quad A - B := \sup\{a - b : a \in A, b \in B\}, \quad cA := \{ca : a \in A\}.$$

Berikut beberapa sifat dari supremum dan akan diberikan sebagian sifat akan diberikan buktinya.

Teorema 2.9 (Sifat-Sifat Supremum)

Misalkan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ himpunan yang terbatas ke atas.

(a) Jika $c > 0$, maka $\sup(cA) = c \cdot \sup A$.

(b) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Misalkan $\sup A = a$ dan $\sup B = b$.

(1) Akan dibuktikan bahwa cA terbatas ke atas. Ambil sebarang $cx \in cA$ di mana $x \in A$. Karena $\sup A = a$, maka $x \leqslant a$ sehingga diperoleh $cx \leqslant ca$. Karena berlaku untuk sebarang $cx \in cA$, jadi cA terbatas ke atas oleh ca. Menurut Teorema 2.8, $\sup(cA)$ ada. Akan dibuktikan bahwa $\sup(cA) = ca$. Karena $\varepsilon/c > 0$, tinjau bahwa terdapat $y \in A$ yang memenuhi $y - \frac{\varepsilon}{c} < a$. Ini berarti $cy - \varepsilon < ca$ di mana $cy \in cA$. Berdasarkan Lema 2.7, ini membuktikan $\sup(cA) = ca$.

(2) Akan dibuktikan bahwa $A + B$ terbatas ke atas. Ambil sebarang $(x + y) \in (A + B)$ dengan $x \in A, y \in B$. Karena $a = \sup A$, maka $x \leqslant a$ dan dengan alasan sama $y \leqslant b = \sup B$. Dari

sini diperoleh $(x+y) \leqslant (a+b)$. Karena berlaku untuk sebarang $(x+y) \in (A+B)$, maka $A+B$ terbatas ke atas oleh $a+b$. Dari Teorema 2.8, maka $\sup(A+B)$ ada. Akan dibuktikan bahwa $\sup(A+B) = a+b$. Karena $\sup A = a$, terdapat $x \in A$ yang memenuhi $x - \frac{\varepsilon}{2} < a$. Secara analog, terdapat $y \in B$ yang memenuhi $y - \frac{\varepsilon}{2} < b$. Jumlahkan keduanya, diperoleh $x + y - \varepsilon < a + b$. Dari Lema 2.7, ini membuktikan $\sup(A+B) = a+b$.

Terbukti. □

Teorema 2.10 Misalkan A terbatas ke bawah dan $-A := \{-a : a \in A\}$. Maka $\sup(-A) = -\inf A$.

Dari sini dapat diperoleh akibat dari properti kelengkapan.

Akibat 2.11 Misalkan $E \subseteq \mathbb{R}$. Jika E terbatas ke bawah, maka $\inf E$ ada.

Dengan menggunakan semua sifat-sifat yang telah dibahas, dapat dibuktikan sifat-sifat berikut.

Teorema 2.12 (Sifat-Sifat Supremum dan Infimum)

Misalkan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ himpunan terbatas.

(a) Jika $c > 0$, maka $\sup(cA) = c \cdot \sup A$ dan $\inf(cA) = c \cdot \inf A$.

(b) Jika $c < 0$, maka $\sup(cA) = c \cdot \inf A$ dan $\inf(cA) = c \cdot \sup A$.

(c) $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ dan $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Bukti. Lihat soal nomor 7 pada subbab 4. □

Terakhir, teorema berikutnya menjadi salah satu alat untuk membuktikan supremum dan infimum; lebih jauh, untuk keseluruhan bahasan analisis real.

Teorema 2.13 (Archimedes)

Misalkan $x, y \in \mathbb{R}$ di mana $x > 0$. Maka terdapat bilangan asli N yang memenuhi $Nx > y$.

Sebagai akibat dari Teorema 2.13, dapat diperoleh sifat-sifat berikut.

Akibat 2.14 Misalkan $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Terdapat $q \in \mathbb{Q}$ yang memenuhi $x < q < y$.

(b) Terdapat bilangan bulat m yang memenuhi $m \leqslant q < m+1$.

Contoh 2.15 Buktikan bahwa $\sup\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$.

Bukti. Misalkan $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Akan dibuktikan bahwa A terbatas ke atas oleh 1. Perhatikan bahwa untuk setiap $\frac{1}{n} \in A$ berlaku $\frac{1}{n} \leqslant 1$ yang berarti 1 batas atas untuk A. Dari Teorema 2.8, maka $\sup A$ ada. Akan dibuktikan bahwa $\sup A = 1$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ yang mana $1 - \varepsilon < 1$ di mana $1 \in A$. Menurut Lema 2.8, $\sup A = 1$ seperti yang ingin dibuktikan. □

3. Dasar Topologi

Definisi 3.1 (Ruang Metrik)

Diberikan himpunan X, elemen dari X dapat disebut sebagai *titik*. Himpunan X disebut *ruang metrik* yang berasosiasi dengan *fungsi jarak* $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, apabila memenuhi tiga kondisi berikut:

(a) $d(p,q) \geqslant 0$ untuk setiap $p, q \in X$. Kondisi $d(p,q) = 0$ terjadi jika dan hanya jika $p = q$.

(b) $d(p,q) = d(q,p)$ untuk setiap $p, q \in X$.

(c) $d(p,q) \leqslant d(p,r) + d(r,q)$ untuk setiap $p, q, r \in X$.

Contoh 3.2 Himpunan $\mathbb{R}$ dengan fungsi jarak $d(x,y) := |x - y|$ membentuk ruang metrik. Ambil sebarang $p, q, r \in \mathbb{R}$.

(a) Mudah diperiksa bahwa $d(p,q) = |p - q| \geqslant 0$ di mana $|p - q| = 0$ terjadi jika dan hanya jika $p = q$.

(b) Mudah diperiksa $d(p,q) = |p - q| = |q - p| = d(q,p)$.

(c) Akan dibuktikan bahwa $|p - q| \leqslant |p - r| + |r - q|$. Dengan Teorema 2.2,

$$|p - q| = |(p - r) + (r - q)| \leqslant |p - r| + |r - q|$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Terbukti bahwa $\mathbb{R}$ membentuk ruang metrik.

Pada fungsi jarak yang lebih kompleks seringkali tidak mudah untuk membuktikan bagian (c) sehingga diperlukan teorema berikut.

Teorema 3.3 (Cauchy Schwarz)

Jika $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ bilangan real, maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_i = \lambda b_i$ untuk suatu bilangan real λ dan setiap $i = 1, 2, \cdots, n$.

Teorema 3.4 (Minkowski)

Jika $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ bilangan real dan bilangan real $p \geqslant 1$, maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i + b_i|^p\right)^{1/p}.$$

Kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_i = \lambda b_i$ untuk suatu bilangan real λ dan setiap $i = 1, 2, \cdots, n$.

Contoh 3.5 Himpunan $\mathbb{R}^2$ dengan fungsi jarak $d(x,y) := \|x - y\|$ di mana

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad x := (x_1, x_2), y := (y_1, y_2)$$

membentuk ruang metrik. Mudah diperiksa bahwa untuk (a) dan (b) terpenuhi (diserahkan kepada pembaca). Akan dibuktikan bahwa $\|p - q\| \leqslant \|p - r\| + \|r - q\|$ untuk setiap $p, q, r \in \mathbb{R}^2$. Perhatikan bahwa

$$\|p-r\| = \left(\sum_{i=1}^{2}(p_i-r_i)^2\right)^{1/2}, \quad \|r-q\| = \left(\sum_{i=1}^{2}(r_i-q_i)^2\right)^{1/2}.$$

(Di sini dituliskan $(p_i - r_i)^2$ daripada $|p_i - r_i|^2$ karena keduanya sama saja nilainya.) Berdasarkan Teorema 3.4,

$$\begin{aligned}
\|p-r\| + \|r-q\| &= \left(\sum_{i=1}^{2}(p_i-r_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{2}(r_i-q_i)^2\right)^{1/2} \\
&\geqslant \left(\sum_{i=1}^{2}(p_i-r_i+r_i-q_i)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{2}(p_i-q_i)^2\right)^{1/2} \\
&= \|p-q\|
\end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan. Terbukti bahwa $\mathbb{R}^2$ membentuk ruang metrik.

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ dengan fungsi jarak

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

dengan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ juga membentuk ruang metrik.

Definisi 3.6 Misalkan X ruang metrik dan $E \subseteq X$.

(a) *Persekitaran* dari titik $p \in X$, dinotasikan $N_r(p)$, merupakan himpunan semua titik-titik q yang memenuhi $d(p,q) < r$. Nilai dari r disebut *panjang jari-jari* dari $N_r(p)$.

(b) Titik p disebut *titik interior* dari E apabila **terdapat** $r > 0$ yang memenuhi $N_r(p) \subseteq E$. Himpunan semua titik-titik interior dari E dituliskan sebagai $int(E)$ atau E^o.

(c) Himpunan E disebut *terbuka* apabila **setiap** titik di E merupakan titik interior.

(d) Titik p disebut *titik limit* dari E apabila **setiap** persekitaran dari p mengandung titik $q \neq p$ sehingga $q \in E$. Dengan kata lain, $(N_r(p) \cap E) \setminus \{p\} \neq \varnothing$ untuk setiap $r > 0$. Himpunan semua titik-titik limit dari E dituliskan sebagai E'.

(e) E disebut *tertutup* apabila setiap titik limitnya merupakan anggota E.

(f) Himpunan E disebut *terbatas* apabila terdapat bilangan real M dan $q \in X$ yang memenuhi $d(p,q) < M$ untuk setiap $p \in E$.

Contoh 3.7 Diberikan ruang metrik $\mathbb{R}$ dengan fungsi jarak $d(x,y) := |x-y|$. Misalkan $E := [2,3]$.

(1) Akan dibuktikan bahwa $\frac{5}{2}$ titik interior dari E. Pilih $r = \frac{1}{2}$, perhatikan bahwa $N_{1/2}(1) = (2,3) \subseteq E$ yang berarti $\frac{5}{2} \in E^o$.

(2) Akan dibuktikan bahwa 2 titik limit dari E. Ambil sebarang $r > 0$. Perhatikan bahwa $2 < 2 + \frac{r}{2} < 2 + r$ yang mana $2 + \frac{r}{2}$ merupakan anggota $N_r(2)$ maupun E. Karena $\left(2 + \frac{r}{2}\right) \neq r$, maka $(N_r(2) \cap E) \setminus \{2\} \neq \varnothing$ sehingga $2 \in E'$.

(3) Akan dibuktikan bahwa E tidak terbuka. Akan dibuktikan bahwa $2 \notin E^o$. Ambil sebarang $r > 0$, perhatikan bahwa $N_r(2) \not\subseteq E$ karena $2 - \frac{r}{2} \in N_r(2)$ namun $2 - \frac{r}{2} \notin E$.

(4) Akan dibuktikan bahwa E tertutup. Akan dibuktikan bahwa $E' = [2, 3]$. Dapat dibuktikan dengan cara serupa seperti pada (2) bahwa $3 \in E'$.

Misalkan $2 < p < 3$. Pilih $r = \frac{1}{2} \min\{p - 2, 3 - p\}$. Perhatikan bahwa

$$p - r = p - \frac{1}{2}\min\{p-2, 3-p\} \geqslant p - \frac{p-2}{2} = \frac{p+2}{2} > 2.$$

Selain itu,

$$p + r = p + \frac{1}{2}\min\{2-p, 3-p\} \leqslant p + \frac{3-p}{2} = \frac{3+p}{2} < 3.$$

Ini membuktikan bahwa $(N_r(p) \cap E) \setminus \{p\} \neq \varnothing$ sehingga $p \in E'$.

Akan dibuktikan selainnya bukan titik limit dari E.

Misalkan $p > 3$, akan dibuktikan $p \notin E'$. Pilih $r = \frac{p-3}{2}$, maka $N_r(p) = (p - r, p + r) = \left(\frac{p+3}{2}, \frac{3p-3}{2}\right)$. Perhatikan bahwa

$$p - r = p - \frac{p-3}{2} = \frac{p+3}{2} > \frac{3+3}{2} = 3.$$

Ini berarti $(N_r(p) \cap E) \setminus \{p\} = \varnothing$ sehingga $p \notin E'$.

Misalkan $p < 2$, akan dibuktikan bahwa $p \notin E'$. Pilih $r = \frac{2-p}{2}$, maka $N_r(p) = (p - r, p + r) = \left(\frac{3p-2}{2}, \frac{p+2}{2}\right)$. Perhatikan bahwa

$$p + r = p + \frac{2-p}{2} = \frac{p+2}{2} < \frac{2+2}{2} = 2$$

sehingga $(N_r(p) \cap E) \setminus \{p\} = \varnothing$. Jadi, $p \notin E'$.

Jadi, terbukti bahwa selainnya bukan titik limit sehingga $E' = [2, 3]$. Karena setiap anggota di E' merupakan anggota E, maka E tertutup.

Apabila tdibuktikan menggunakan definisi, tidak jarang untuk membuktikan himpunan terbuka atau tertutup cukup rumit. Teorema-teorema berikutnya dapat membantu dalam pembuktian himpunan terbuka dan tertutup.

Teorema 3.8 (Himpunan Terbuka dan Tertutup)

Himpunan E terbuka jika dan hanya jika E^c tertutup. Tentu, E tertutup jika dan hanya jika E^c terbuka.

Teorema 3.9 (Gabungan-Irisan Himpunan Tertutup dan Terbuka) ;

(a) Untuk sebarang koleksi himpunan terbuka $\{G_i\}$, maka $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ terbuka.

(b) Untuk sebarang koleksi himpunan tertutup $\{F_i\}$, maka $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ tertutup.

(c) Untuk sebarang koleksi berhingga himpunan terbuka $G_1, G_2, \cdots, G_n$, maka $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ terbuka.

(d) Untuk sebarang koleksi berhingga himpunan tertutup $F_1, F_2, \cdots, F_n$, maka $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ tertutup.

Definisi 3.10 (Closure)

Misalkan X ruang metrik dan $E \subseteq X$. Klosur dari E, dinotasikan $\overline{E}$, didefinisikan sebagai $\overline{E} := E \cup E'$.

Teorema 3.11 (Sifat-Sifat Klosur)

Diberikan ruang metrik X dan $E \subseteq X$. Maka

(a) $\overline{E}$ tertutup.

(b) $E = \overline{E}$ jika dan hanya jika E tertutup.

(c) Jika $F \subseteq X$ tertutup dan $E \subseteq F$, maka $\overline{E} \subseteq F$. Dengan kata lain, $\overline{E}$ merupakan himpunan tertutup terkecil yang mengandung E.

Bukti. Akan dibuktikan (a), sisanya diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Berdasarkan Teorema 3.8, hal ini ekivalen dengan membuktikan $\left(\overline{E}\right)^c$ terbuka. Misalkan $p \in \left(\overline{E}\right)^c$, ini berarti $p \notin E$ dan $p \notin E'$. Karena $p \notin E'$, terdapat $r > 0$ yang memenuhi $(N_r(p) \cap E) \setminus \{p\} = \varnothing$ yang berart $N_r(p) \cap E \subseteq \{p\}$. Mengingat $p \notin E$, maka $N_r(p) \cap E = \varnothing$ jika dan hanya jika $N_r(p) \subseteq E^c \subseteq \left(\overline{E}\right)^c$. Terbukti bahwa $\left(\overline{E}\right)^c$ terbuka. $\square$

Definisi 3.12 (Open Cover)

Koleksi himpunan terbuka $\{G_i\}_{i \in \alpha}$ disebut *open cover* (selimut terbuka? terjemahan yang aneh) dari himpunan E dalam ruang metrik X apabila $E \subseteq \bigcup_{i \in \alpha} G_i$.

Definisi 3.13 (Himpunan Kompak)

Himpunan K dalam ruang metrik X disebut *himpunan kompak* apabila untuk setiap open cover dari K memiliki subcover yang berhingga. Dengan kata lain, untuk sebarang open cover $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dari K terdapat $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \cdots, G_{n_k}\} \subseteq \{G_1, G_2, \cdots\}$ yang memenuhi $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i}$.

Contoh 3.14 Akan dibuktikan $(0,1)$ tidak kompak di $\mathbb{R}$. Andaikan $(0,1)$ kompak, definisikan $I_n := \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ untuk setiap bilangan asli $n \geqslant 3$. Ambil sebarang $x \in (0,1)$. Dari Teorema 2.13 terdapat bilangan asli N, M yang memenuhi $\frac{1}{x} < N$ dan $\frac{1}{1-x} < M$ yang berarti $\frac{1}{N} < x$ dan $x < 1 - \frac{1}{M}$. Pilih $K = \max\{M, N\}$, tinjau

$$\frac{1}{K} \leqslant \frac{1}{N} < x < 1 - \frac{1}{M} \leqslant 1 - \frac{1}{K} \implies x \in I_K.$$

Jadi, $(0,1) \subseteq \bigcup_{n=3}^{\infty} I_n$ yang berarti $\{I_n\}_{n \geqslant 3}$ merupakan open cover untuk $(0,1)$. Karena $(0,1)$ kompak, terdapat $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ yang memenuhi $\{I_{n_1}, \cdots, I_{n_k}\}$ open cover untuk $(0,1)$. Perhatikan bahwa terdapat $y \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $1 - \frac{1}{n_k} < y < 1$ yang menunjukkan $y \in (0,1)$ namun $y \notin I_{n_i}$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$. Kontradiksi.

Teorema 3.15 Misalkan X ruang metrik dan $K \subseteq X$ kompak.

(a) Maka K tertutup dan terbatas.

(b) Jika $A \subseteq K$ tertutup, maka A kompak.

Didefinisikan k-cell sebagai himpunan semua titik-titik $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ di mana $x_i \in [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$.

Teorema 3.16 k-cell kompak.

Secara umum, jika K tertutup dan terbatas belum tentu kompak. Namun, jika $K \subseteq \mathbb{R}^n$ memiliki kriteria yang menarik.

Teorema 3.17 (Himpunan Kompak di $\mathbb{R}^n$)

Misalkan $E \subseteq \mathbb{R}^n$, maka kondisi berikut ekivalen (salah satu benar maka yang lainnya benar):

(a) E tertutup dan terbatas,

(b) E kompak,

(c) Setiap subset tak berhingga dari E memiliki titik limit di E.

4. Latihan Soal

(1) Buktikan Teorema 1.2.

(2) Misalkan A dan B terbilang. Buktikan bahwa $A \cup B$ terbilang.

(3) Buktikan bahwa kondisi berikut ekivalen:

  (a) S terbilang.

  (b) Terdapat fungsi onto dari $\mathbb{N}$ ke S.

  (c) Terdapat fungsi 1-1 dari S ke $\mathbb{N}$.

(4) Buktikan bahwa $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ekivalen.

(5) Buktikan bahwa $[0, 1]$ dan $(0, 1)$ ekivalen.

(6) Buktikan Teorema 1.4.

(7) Buktikan Teorema 2.12.

(8) Jika ada, tentukan $\inf A$ dan $\sup A$ dari:

  (a) $A := \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

  (b) $A := \{\sqrt{2} + q : q \in \mathbb{Q}^+\}$.

(9) Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}$ himpunan terbatas dan a bilangan real. Jika $a+S = \{a+s : s \in S\}$, buktikan bahwa

$$\sup(a + S) = a + \sup S, \quad \inf(a + S) = a + \inf S.$$

(10) Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan terbatas.

  (a) Buktikan bahwa $\inf A \leqslant \sup A$.

(b) Jika $B \subseteq A$, buktikan bahwa

$$\inf A \leqslant \inf B \leqslant \sup B \leqslant \sup A.$$

(11) Tentukan, dengan bukti, semua himpunan tak kosong $A \subseteq \mathbb{R}$ yang memenuhi $\sup A = \inf A$.

(12) Misalkan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ yang memenuhi untuk setiap $a \in A, b \in B$ berlaku $a \leqslant b$. Buktikan bahwa $\sup A \leqslant \inf B$.

(13) Misalkan X himpunan tak berhingga. Untuk setiap $p, q \in X$, didefinisikan

$$d(p,q) = \begin{cases} 1, & p \neq q \\ 0, & p = q \end{cases}.$$

Buktikan bahwa X ruang metrik.

(14) Misalkan X suatu ruang metrik. Diketahui A dan B adalah himpunan-himpunan bagian dari X. Buktikan bahwa:

(a) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

(b) Jika $A \subseteq B$, maka $A' \subseteq B'$ dan $A^o \subseteq B^o$.

(15) Misalkan X ruang metrik dan $E \subseteq X$.

(a) Buktikan bahwa E' tertutup.

(b) Buktikan bahwa E dan $\overline{E}$ memiliki titik limit yang sama.

(16) Misalkan $A_1, A_2, A_3, \cdots$ himpunan bagian dari ruang metrik.

(a) Jika $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, buktikan bahwa $\overline{B_n} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ untuk $n \in \mathbb{N}$.

(b) Jika $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, buktikan bahwa $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \subseteq \overline{B}$.

(17) Misalkan X ruang metrik dan $E \subseteq X$.

(a) Buktikan bahwa E^o terbuka.

(b) Buktikan E terbuka jika dan hanya jika $E = E^o$.

(c) Jika $G \subseteq E$ dan G terbuka, buktikan bahwa $G \subseteq E^o$. Dengan kata lain, E^o merupakan himpunan terbuka terbesar yang memuat E.

(18) Identifikasi apakah E termasuk himpunan terbuka, tertutup, atau tidak keduanya.

(a) $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)$.

(b) $E := \{(x,y) : xy = 0\}$.

(c) $E := \{(x,y) : x \in \mathbb{Q}\}$.

(d) $E := \{(x,0) : 1 < x < 4\}$.

(19) Misalkan himpunan bagian A dari suatu ruang metrik (X,d) dan $B \subseteq A$ berhingga. Jika A terbuka, apakah $A \setminus B$ terbuka?

(20) Jika A menyatakan salah satu dari interval $[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]$, buktikan bahwa:

(a) $\sup A = b$ dan $\inf A = a$.

(b) $A^o = (a,b)$ dan $A' = [a,b]$.

(21) Tentukan semua titik limit dan titik interior dari $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Q}$ pada ruang metrik $\mathbb{R}$.

(22) Misalkan A, B himpunan kompak dalam ruang metrik X. Buktikan bahwa $A \cup B$ dan $A \cap B$ kompak.

(23) Misalkan X adalah suatu metrik kompak dan K himpunan bagian tak berhingga dari X. Tunjukkan bahwa K mempunyai titik limit dalam X.

(24) Misalkan $K \subseteq \mathbb{R}$ kompak. Buktikan bahwa $\sup K, \inf K$ merupakan anggota dari K.

(25) Diberikan ruang metrik $(\mathbb{Q}, d)$ dengan $d(p, q) = |p - q|$. Misalkan E merupakan himpunan semua $p \in \mathbb{Q}$ yang memenuhi $2 < p^2 < 3$. Buktikan bahwa E tertutup dan terbatas, namun E tidak kompak.

5. Solusi

(1) Karena A terbilang, dapat dituliskan $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ dan $B = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots\}$ di mana $n_1, n_2, \cdots$ barisan di $\mathbb{N}$. Definisikan $f : B \to \mathbb{N}$ dengan $f(x_{n_i}) = i$ untuk setiap $x_{n_i} \in B$. Akan dibuktikan bahwa f bijektif.

- Akan dibuktikan f well-defined. Perhatikan bahwa $x_{n_i} = x_{n_j}$ berarti $n_i = n_j$. Ini berarti $f(x_{n_i}) = n_i = n_j = f(x_{n_j})$.
- Akan dibuktikan f onto. Perhatikan bahwa untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ terdapat $x_{n_k} \in B$ yang memenuhi $f(x_{n_k}) = k$.
- Akan dibuktikan f 1-1. Asumsikan $x_{n_i}, x_{n_j} \in B$ memenuhi $f(x_{n_i}) = f(x_{n_j})$ yang berarti $n_i = n_j$. Jadi, $x_{n_i} = x_{n_j}$.

Terbukti f bijektif sehingga B terbilang.

(2) Dari Teorema 1.3, pilih $E_1 := A$ dan $E_n := B$ untuk setiap $n \geqslant 2$. Maka $A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ terbilang.

(3) Akan dibuktikan dengan alur (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) Jelas dari definisi.

(b) $\Rightarrow$ (c) Misalkan $f : \mathbb{N} \to S$ onto, perhatikan bahwa $f^{-1}(s) = \{a \in \mathbb{N} : f(a) = s\}$ tak kosong. Dari $f^{-1}(s) \subseteq \mathbb{N}$, menurut Well-Ordering Principle $f^{-1}(s)$ memiliki elemen terkecil. Definisikan $g : S \to \mathbb{N}$ sebagai $g(s) = \min f^{-1}(s)$ yang menyatakan elemen terkecil di $f^{-1}(s)$. Mudah diverivikasi g well-defined. Akan dibuktikan bahwa g 1-1. Misalkan $a, b \in S$ memenuhi $g(a) = g(b)$. Ini berarti $\min f^{-1}(a) = \min f^{-1}(b) = k$ yang berarti $a = f(k) = b$ sehingga $a = b$, terbukti.

(c) $\Rightarrow$ (a) Misalkan $f : S \to \mathbb{N}$ 1-1. Perhatikan bahwa $g : S \to f(S)$ merupakan fungsi bijektif. Karena $f(S) \subseteq \mathbb{N}$ dan $\mathbb{N}$ terbilang, menurut Teorema 1.2 berlaku $f(S)$ terbilang. Maka terdapat $h : f(S) \to \mathbb{N}$ bijektif. Ini memberikan $h \circ g : S \to \mathbb{N}$ juga bijektif (buktikan!) sehingga S terbilang.

(4) Konstruksi $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ sebagai

$$f(x) = \begin{cases} y + (n+1)\sqrt{2}, & x = y + n\sqrt{2} \ (y \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}) \\ x, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

- Akan dibuktikan f well-defined. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $a = b$. Jika a, b berbentuk $y + n\sqrt{2}$ untuk suatu $y \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}$, misalkan $a = b = y' + n'\sqrt{2}$ dengan $y' \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}$. Ini berarti $f(a) = y' + (n'+1)\sqrt{2} = f(b)$ sehingga terbukti.
- Akan dibuktikan ada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ yang memenuhi $f \circ g = g \circ f = \text{id}$. Perhatikan bahwa

$$g(x) = \begin{cases} y + (n-1)\sqrt{2}, & x = y + n\sqrt{2} \ (y \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}) \\ x, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan g well-defined.

Jika $x = y + n\sqrt{2}$ untuk suatu $y \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}$, maka

$$f(g(x)) = f\left(y + (n-1)\sqrt{2}\right) = y + n\sqrt{2} = x$$
$$g(f(x)) = f\left(y + (n+1)\sqrt{2}\right) = y + n\sqrt{2} = x.$$

Jika tidak, maka $f(g(x)) = f(x) = x$ dan $g(f(x)) = x$. Jadi, $f(g(x)) = x = g(f(x))$. Ini berarti g merupakan fungsi invers dari f, yaitu $g = f^{-1}$. Akibatnya, f bijektif.

Terbukti $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(5) Definisikan fungsi $f : [0,1] \to (0,1)$ sebagai

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ x, & \text{selainnya} \end{cases}.$$

Mudah dibuktikan f well-defined (diserahkan kepada pembaca).

- Akan dibuktikan f onto. Ambil sebarang $y \in (0,1)$. Perhatikan bahwa $f(0) = \frac{1}{2}$ dan $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ini berarti untuk setiap $y = \frac{1}{k}$ dengan $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$ terdapat $x \in [0,1]$ yang memenuhi $f(x) = y$. Jika y tidak berbentuk $y = \frac{1}{k}$, ini berarti $f(y) = y$. Terbukti f onto.
- Akan dibuktikan f 1-1. Ambil sebarang $a, b \in [0,1]$ memenuhi $f(a) = f(b)$.
  Jika $a = \frac{1}{n}$ dan $b = \frac{1}{m}$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{N}$, maka $\frac{1}{n+2} = \frac{1}{m+2} \iff m = n$. Jika $b = 0$, maka $\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} \iff n = 0$ yang mana kontradiksi. Jika b selainnya, maka $\frac{1}{n+2} = b$. Namun, ini kontradiksi karena asumsi b tidak berbentuk $1/k$ maupun 0.
  Jika $a = b = 0$ maka selesai. Jika b tidak berbentuk $1/k$ maupun 0, maka $\frac{1}{2} = b$ yang mana kontradiksi. Jika a, b keduanya tidak berbentuk $1/k$ maupun 0, maka $a = b$. Terbukti.

Jadi, $[0,1] \sim (0,1)$.

(6) Karena A, B terbilang, dapat diindeksasi $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ dan $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$. Tinjau bahwa setiap bilangan asli dapat dinyatakan dalam bentuk $2^k l$ di mana k bilangan bulat tak negatif dan l bilangan ganjil. Konstruksi $f : A \times B \to \mathbb{N}$ dengan $f(a_i, b_j) = 2^{i-1}(2j-1)$. Mudah dibuktikan f well-defined (diserahkan kepada pembaca sebagai latihan).

- Untuk pembuktian f onto mudah diperoleh dengan fakta setiap bilangan asli dapat dinyatakan sebagai $2^k l$ dengan $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, l bilangan ganjil.
- Akan dibuktikan f 1-1. Misalkan $f(a_i, b_j) = f(a_x, b_y)$, maka $2^{i-1}(2j-1) = 2^{x-1}(2y-1)$. Andaikan $i \neq x$, tanpa mengurangi keumuman misalkan $i > x$. Ini berarti $2^{i-x}(2j-1) = 2y-1$. Karena $2^{i-x}(2j-1)$ genap dan $2y-1$ ganjil, tentu kontradiksi. Jadi, haruslah $i = x$. Ini memberikan $2j - 1 = 2y - 1$ sehingga $j = y$. Jadi, $(a_i, b_j) = (a_x, b_y)$ sehingga f 1-1.

Jadi, f bijektif sehingga $A \times B$ terbilang.

(7) Karena A, B terbatas, maka masing-masing memiliki batas atas dan batas bawah. Menurut Teorema 2.8 dan Akibat 2.11, maka $\sup A$ dan $\inf A$ ada. Misalkan $\sup A = a$ dan $\inf A = b$, serta $\sup A = p$ dan $\inf A = q$.

(a) Untuk $\sup(cA) = c \cdot \sup A$ telah dibuktikan pada Teorema 2.9. Akan dibuktikan $\inf(cA) = c \cdot \inf A = cb$. Akan dibuktikan cb batas bawah untuk cA. Perhatikan bahwa untuk setiap $cx \in cA$ dengan $x \in A$ berlaku $cx \geqslant cb$ mengingat $x \geqslant \inf A = b$ sehingga terbukti. Karena $\inf A = b$, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $y \in A$ yang memenuhi $y < b + \frac{\varepsilon}{c}$. Ini berarti $cy < cb + \varepsilon$ di mana $cy \in cA$. Terbukti bahwa $\inf(cA) = cb$.

(b) Misalkan $c = -k$ di mana $k > 0$. Akan dibuktikan bahwa $\sup(-kA) = -kb$. Akan dibuktikan bahwa $-kb$ batas atas untuk $-kA$. Ambil sebarang $-kx \in (-kA)$ di mana $x \in A$, ini berarti $-kx \leqslant -kb$ karena $x \geqslant \inf A = b$, terbukti. Perhatikan bahwa terdapat $y \in A$ yang memenuhi $y < b + \frac{\varepsilon}{k}$. Ini berarti $-ky > -kb - \varepsilon$ untuk suatu $-ky \in (-kA)$. Terbukti bahwa $\sup(-kA) = -kb$.

Akan dibuktikan bahwa $\inf(-kA) = -ka$. Akan dibuktikan bahwa $-ka$ batas bawah untuk $-kA$. Ambil sebarang $-kx \in (-kA)$ di mana $x \in A$, ini berarti $-kx \geqslant -ka$ karena $x \leqslant \sup A = a$, terbukti. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $y \in A$ yang memenuhi $a - \frac{\varepsilon}{k} < y$ sehingga $-ka + \varepsilon > -ky$ untuk suatu $-ky \in (-kA)$. Jadi, $\inf(-kA) = -ka$.

(c) Akan dibuktikan bahwa $a + p$ batas atas untuk $A + B$. Ambil sebarang $(x + y) \in (A + B)$ di mana $x \in A, y \in B$. Karena $x \leqslant a$ dan $y \leqslant p$, maka $x + y \leqslant a + p$ seperti yang ingin dibuktikan. Menurut Teorema 2.8, $\sup(A + B)$ ada. Akan dibuktikan bahwa $\sup(A + B) = a + p$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $a' \in A, b' \in B$ yang memenuhi $a - \frac{\varepsilon}{2} < a'$ dan $p - \frac{\varepsilon}{2} < b'$. Ini berarti $a + p - \varepsilon < a' + b'$ untuk suatu $a' + b' \in (A + B)$. Terbukti bahwa $\sup(A + B) = a + p$.

Akan dibuktikan bahwa $b+q$ batas bawah untuk $A+B$. Ambil sebarang $(x+y) \in (A+B)$, perhatikan bahwa $x + y \geqslant b + q$ karena $x \geqslant b$ dan $y \geqslant q$, terbukti. Menurut Akibat 2.11, $\inf(A + B)$ ada. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $a' \in A, b' \in B$ yang memenuhi $a' < b + \frac{\varepsilon}{2}$ dan $b' < q + \frac{\varepsilon}{2}$ sehingga $a' + b' < b + q + \varepsilon$. Jadi, $\inf(A + B) = b + q$ seperti yang ingin dibuktikan.

(8) (a) Akan dibuktikan bahwa $\sup A = 1$. Perhatikan bahwa $1 - \frac{1}{n} < 1$ sehingga 1 merupakan batas atas untuk A. Berdasarkan Teorema 2.8, $\sup A$ ada. Dari Teorema 2.13, terdapat bilangan asli N yang memenuhi $N\varepsilon > 1 \iff \varepsilon > \frac{1}{N}$. Ini berarti $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{N}$ untuk suatu $\left(1 - \frac{1}{N}\right) \in A$. Jadi, $\sup A = 1$.

Akan dibuktikan bahwa $\inf A = 0$. Perhatikan bahwa $1 - \frac{1}{n} \geqslant 0$ untuk setiap bilangan asli n sehingga 0 merupakan batas bawah untuk A. Menurut Akibat 2.11, $\inf A$ ada. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, perhatikan bahwa $0 \in A$ memenuhi $0 < \varepsilon$. Ini menunjukkan bahwa $\inf A = 0$.

(b) Akan dibuktikan bahwa A tidak terbatas ke atas, yaitu untuk setiap $M \in \mathbb{R}$ terdapat $a \in A$ yang memenuhi $a \geqslant M$. Ambil sebarang $M \in \mathbb{R}$. Dari Akibat 2.14 berlaku terdapat $q \in \mathbb{Q}^+$ yang memenuhi $q > M - \sqrt{2}$ sehingga $q + \sqrt{2} > M$, terbukti A tidak terbatas ke atas. Akan dibuktikan bahwa $\inf A = \sqrt{2}$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\sqrt{2} + q \in A$ dengan $q \in \mathbb{Q}^+$ berlaku $\sqrt{2} + q > \sqrt{2}$ sehingga $\sqrt{2}$ batas bawah untuk A. Menurut Akibat 2.11, $\inf A$ ada. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, menurut Akibat 2.14 terdapat $q \in \mathbb{Q}$ yang memenuhi $0 < q < \varepsilon$. Oleh karena itu, $q \in \mathbb{Q}^+$ dan $q + \sqrt{2} < \varepsilon + \sqrt{2}$ untuk suatu $q + \sqrt{2} \in A$. Jadi, $\inf A = \sqrt{2}$.

(9) Karena S terbatas, maka $\sup S, \inf S$ ada. Misalkan $\sup S = p$ dan $\inf S = q$. Akan dibuktikan $a+S$ juga terbatas. Ambil sebarang $a+s \in (a+S)$ di mana $s \in S$, ini berarti $a+q \leqslant a+s \leqslant a+p$ karena $q \leqslant s \leqslant p$. Jadi, $a + S$ terbatas sehingga $\sup(a + S)$ dan $\inf(a + S)$ juga ada. Akan dibuktikan bahwa $\sup(a + S) = a + p$. Telah dibuktikan bahwa $a + p$ batas atas untuk $a + S$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $s' \in S$ yang memenuhi $p-\varepsilon < s'$ sehingga $(a+p)-\varepsilon < a+s'$ untuk suatu $(a + s') \in (a + S)$. Ini membuktikan bahwa $\sup(a + S) = a + p$. Akan dibuktikan bahwa $\inf(a + S) = a + q$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $s'' \in S$ yang memenuhi $s'' < q + \varepsilon$ sehingga $a + s'' < (a + q) + \varepsilon$ untuk suatu $(a + s'') \in (a + S)$. Ini membuktikan $\inf(a + S) = a + q$.

(10) Karena A terbatas, maka $\sup A, \inf A$ ada.

(a) Tinjau bahwa untuk $a \in A$ berlaku $\inf A \leqslant a \leqslant \sup A$ dan kita selesai.

(b) Karena A terbatas, maka B juga terbatas (why?) sehingga $\sup B, \inf B$ ada. Ambil sebarang $b \in B$, perhatikan bahwa $b \in A$ sehingga $\inf A \leqslant b$. Ini berarti $\inf A$ merupakan batas bawah untuk B sehingga berlaku $\inf A \leqslant \inf B$. Secara analog, diperoleh $\sup B \leqslant \sup A$. Menggabungkan dengan (a), kita selesai.

(11) Akan dibuktikan bahwa A singleton. Andaikan $|A| \geqslant 2$, misalkan $a, b \in A$ dengan $a \neq b$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $a < b$. Ini memberikan $\inf A \leqslant a < b \leqslant \sup A$ sehingga $\inf A < \sup A$, tidak memenuhi. Jadi, haruslah $|A| = 1$ yang berarti $A = \{x\}$ untuk suatu $x \in \mathbb{R}$.

(12) Tetapkan $b \in B$. Ambil sebarang $a \in A$, perhatikan bahwa $a \leqslant b$. Ini berarti b batas atas untuk A sehingga $\sup A$ ada. Secara analog, diperoleh $\inf B$ ada. Perhatikan bahwa terdapat $b' \in B$ yang memenuhi $b' < \inf B + \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Karena b' batas atas untuk A, dari sini diperoleh

$$\sup A \leqslant b' < \inf B + \varepsilon \implies \sup A < \inf B + \varepsilon$$

untuk setiap $\varepsilon > 0$. Menurut Lema 2.1, $\sup A \leqslant \inf B$ seperti yang ingin dibuktikan.

(13) Jelas bahwa $d(p, q) = d(q, p)$ dan $d(p, q) \geqslant 0$ di mana $d(p, q) = 0$ jika dan hanya jika $p = q$. Akan dibuktikan bahwa $d(p, q) \leqslant d(p, r) + d(r, q)$ untuk setiap $p, q, r \in X$. Jika ada dari $p = q$, maka jelas bahwa $0 \leqslant d(p, r) + d(r, q)$. Jika $p \neq q$, maka r pasti berbeda dari p atau q yang memberikan $d(p, r) + d(r, q) \geqslant 1 = d(p, q)$, terbukti. Jadi, X ruang metrik.

(14) (a) Misalkan $p \in (A \cup B)'$, maka untuk setiap $r > 0$ berlaku

$$N_r(p) \cap (A \cup B) = (N_r(p) \cap A) \cup (N_r(p) \cap B)$$

mengandung elemen yang berbeda dengan p. Namun, elemen tersebut juga elemen dari $N_r(p) \cap A$ atau $N_r(p) \cap B$ yang menunjukkan $p \in A'$ atau $p \in B'$. Jadi, $p \in A' \cup B'$. Sebaliknya, dapat dilakukan cara yang sama. Terbukti bahwa $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

(b) Akan dibuktikan $A' \subseteq B'$. Misalkan $p \in A'$. Untuk setiap $r > 0$, terdapat $q \neq p$ yang memenuhi $q \in N_r(p) \cap A$. Karena $N_r(p) \cap A \subseteq N_r(p) \cap B$ (buktikan!), maka $q \in N_r(p) \cap B$ yang menunjukkan $p \in B'$, terbukti.

Akan dibuktikan $A^o \subseteq B^o$. Misalkan $x \in A^o$. Terdapat $r > 0$ sehingga berlaku $N_r(x) \subseteq A$. Ini berakibat $N_r(x) \subseteq B$ sehingga berlaku $x \in B^o$. Terbukti.

(15) (a) Misalkan p titik limit dari E', akan dibuktikan $p \in E'$. Untuk setiap $r > 0$ terdapat $q \neq p$ yang memenuhi $q \in N_r(p) \cap E'$ sehingga $q \in E'$. Misalkan $r_0 = d(p, q) < r$, maka terdapat $s \neq q$ yang memenuhi $s \in N_k(q) \cap E$ dengan $k = \min\{r_0, r - r_0\}$. Karena $s \in N_k(q)$ dan $q \in N_r(p)$, maka $d(q, s) < k \leqslant r - r_0$ sehingga

$$d(p, s) \leqslant d(p, q) + d(q, s) = r_0 + d(q, s) < r$$

yang menunjukkan $s \in N_r(p)$. Mengingat $s \in N_k(q)$ yang berarti $d(s, q) < k \leqslant r_0 = d(p, q) \implies d(s, q) < d(p, q)$, ini berarti $s \neq p$. Selain itu, $s \in E$ sehingga $s \neq p$ memenuhi $s \in N_r(p) \cap E$ untuk setiap $r > 0$. Jadi, $p \in E'$ yang membuktikan E' tertutup.

(b) Akan dibuktikan bahwa $E' = \overline{E}'$. Perhatikan bahwa $\overline{E}' = (E \cup E')' = E' \cup (E')'$ berdasarkan soal (14). Dari sini diperoleh $E' \subseteq \overline{E}'$. Akan dibuktikan bahwa $\overline{E}' \subseteq E'$. Misalkan $p \in \overline{E}'$. Jika $p \in E'$, maka selesai. Jika $p \in (E')'$, berdasarkan (a) berlaku $p \in E'$ dan kita selesai.

(16) (a) Akan dibuktikan dengan induksi. Untuk $n = 1$ jelas dan untuk $n = 2$, dengan soal (14) berlaku

$$\overline{B_2} = (A_1 \cup A_2) \cup (A_1 \cup A_2)' = (A_1 \cup A_2) \cup (A_1' \cup A_2') = (A_1 \cup A_1') \cup (A_2 \cup A_2') = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$$

Asumsikan untuk suatu $n = k$ berlaku $\overline{B_k} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i}$. Untuk $n = k + 1$,

$$\overline{B_{k+1}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i} = \overline{B_k \cup A_{k+1}} = \overline{B_k} \cup \overline{A_{k+1}} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i} \cup \overline{A_{k+1}} = \bigcup_{i=1}^{k+1} \overline{A_i}.$$

Menurut induksi, terbukti $\overline{B_n} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

(b) Misalkan $p \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$, maka $p \in \overline{A_n}$ untuk suatu bilangan asli n sehingga $p \in A_n$ atau $p \in A_n'$. Jika $p \in A_n$ maka selesai karena $A_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$. Jika $p \in A_n'$, untuk setiap

$r > 0$ terdapat $q \neq p$ yang memenuhi $q \in N_r(p) \cap A_n$. Tinjau bahwa

$$N_r(p) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (N_r(p) \cap A_i) \implies N_r(p) \cap A_n \subseteq N_r(p) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \subseteq N_r(p) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Oleh karena itu, $q \in N_r(p) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ dengan $q \neq p$ untuk setiap $r > 0$. Jadi, $p \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)'$ sehingga $p \in \overline{B}$. Terbukti.

(17) (a) Misalkan $p \in E^o$, terdapat $r > 0$ yang memenuhi $N_r(p) \subseteq E$. Akan dibuktikan bahwa $N_r(p) \subseteq E^o$. Jika $N_r(p) = \{p\}$ maka selesai. Jika tidak, misalkan $q \in N_r(p)$ dengan $q \neq p$ dan misalkan pula $r_0 = d(p,q) < r$. Pilih $k = \frac{1}{2} \min\{r_0, r - r_0\}$, perhatikan bahwa untuk setiap $x \in N_k(q)$ berlaku

$$d(p,x) \leqslant d(p,q) + d(q,x) = r_0 + \frac{r - r_0}{2} = \frac{r + r_0}{2} < \frac{r + r}{2} = r$$

sehingga $x \in N_r(p)$. Ini membuktikan bahwa $N_k(q) \subseteq N_r(p) \subseteq E \implies N_k(q) \subseteq E$. Artinya, $q \in E^o$ sehingga menunjukkan pula bahwa $N_r(p) \subseteq E^o$. Ini membuktikan bahwa E^o terbuka.

(b) Jika $E = E^o$, jelas E terbuka berdasarkan (a). Asumsikan E terbuka, akan dibuktikan $E = E^o$. Dari sini jelas bahwa $E \subseteq E^o$ (why?). Misalkan $p \in E^o$, terdapat $r > 0$ yang memenuhi $N_r(p) \subseteq E$. Padahal, $p \in N_r(p)$ yang membuktikan $p \in E$. Jadi, $E^o \subseteq E$ sehingga terbukti $E = E^o$.

(c) Karena G terbuka, untuk setiap $p \in G$ terdapat $r > 0$ yang memenuhi $N_r(p) \subseteq G \subseteq E \implies N_r(p) \subseteq E$ sehingga $p \in E^o$. Terbukti $G \subseteq E^o$.

(18) (a) Perhatikan bahwa $(n, n+1)$ terbuka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Teorema 3.9, berlaku $\bigcup_{i=1}^{\infty} (n, n+1)$ terbuka.
Akan dibuktikan E tidak tertutup. Akan dibuktikan bahwa $1 \in E'$, perhatikan bahwa untuk setiap $r > 0$, $\frac{r+1}{2} \in N_r(1)$. Namun, $1 \notin E$ sehingga E tidak tertutup.

(b) Ini berarti E merepresentasikan titik-titik pada sumbu-X atau sumbu-Y pada bidang kartesian, yaitu

$$E = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Akan dibuktikan E tidak terbuka. Ambil sebarang $r > 0$ dan tinjau $\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right) \in N_r(0,0)$ karena $\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{2}} < r$. Karena $(0,0) \in E$ bukan titik interior, maka E tidak terbuka.

Akan dibuktikan E tertutup. Berdasarkan Teorema 3.8, hal ini ekivalen dengan membuktikan E^c terbuka. Tinjau bahwa E^c merepresentasikan titik-titik (a,b) dengan $a \neq 0$ atau $b \neq 0$. Akan ditinjau untuk $a, b > 0$, sedangkan kasus (a,b) di kuadran lain dapat ditinjau secara analog. Pilih $r = \frac{1}{2} \min a, b$. Untuk setiap $(x,0)$ dengan $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} \geqslant b > \frac{1}{2} \min\{a,b\} = r$$

sehingga $(x,0) \notin N_r(a,b)$. Secara analog, diperoleh $(0,y) \notin N_r(a,b)$ untuk setiap $y \in \mathbb{R}$. Jadi, $N_r(a,b) \subseteq E^c$. Jadi, E^c terbuka.

(c) Akan dibuktikan E tidak terbuka. Tinjau $(0,0) \in E$ dan tinjau setiap $r > 0$. Jika $r \notin \mathbb{Q}$, maka $\frac{r}{2} \notin \mathbb{Q}$. Karena $\frac{r}{2} \in N_r(0,0)$, maka $\left(\frac{r}{2}, 0\right) \nsubseteq E$. Jadi, $(0,0) \notin E^o$ sehingga E tidak terbuka.

Akan dibuktikan E tidak tertutup. Akan dibuktikan bahwa $E' = \mathbb{R}^2$. Misalkan $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ dan tinjau sebarang $r > 0$. Berdasarkan Akibat 2.14, terdapat $q \in \mathbb{Q}$ yang memenuhi $a < q < a + r$. Ini berarti $(q,b) \in E$ yang menunjukkan $(q,b) \neq (a,b)$ memenuhi $(q,b) \in N_r(a,b) \cap E$. Jadi, $(a,b) \in E'$ sehingga $\mathbb{R}^2 \subseteq E'$. Jelas $E' \subseteq \mathbb{R}^2$ sehingga $E' = \mathbb{R}^2$. Jadi, $\overline{E} = \mathbb{R}^2 \neq E$ yang berarti menurut Teorema 3.11, E tidak tertutup.

(d) Akan dibuktikan E tidak terbuka. Tinjau $(2,0) \in E$ dan ambil sebarang $r > 0$. Tinjau bahwa $\left(2 + \frac{r}{2}, 0\right) \in N_r(2,0)$ namun $2 + \frac{r}{2} \notin E$. Jadi, $N_r(2,0) \nsubseteq E$ sehingga E tidak terbuka.

Akan dibuktikan E tidak tertutup. Akan dibuktikan $(1,0) \in E'$. Ambil sebarang $r > 0$. Jika $r \leqslant 3$ tinjau $\left(\frac{r+1}{2}, 0\right) \in N_r(1,0)$, sedangkan untuk $r > 3$ tinjau $2 \in N_r(1,0)$. Ini berarti $(1,0) \in E'$ namun $(1,0) \notin E$ sehingga E tidak tertutup.

(19) Akan dibuktikan $A \setminus B$ terbuka. Misalkan $p \in A \setminus B$, ini berarti $p \in A$ sehingga terdapat $r > 0$ yang memenuhi $N_r(p) \subseteq A$. Misalkan $B = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, pilih

$$r' = \min\{r, d(p,a_1), d(p,a_2), \cdots, d(p,a_n)\}.$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $q \in N_{r'}(p)$ berlaku $d(p,q) < r' \leqslant r \implies d(p,q) < r$ sehingga $N_{r'}(p) \subseteq A$. Diperoleh juga $r' \leqslant d(p,a_i)$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$ sehingga $a_i \notin N_{r'}(p)$. Ini artinya $N_{r'}(p) \subseteq A \setminus B$ sehingga diperoleh $A \setminus B$ terbuka.

(20) (a) Tinjau bahwa untuk setiap $x \in A$ berlaku $x \leqslant b$ sehingga b batas atas untuk A. Jadi, $\sup A$ ada. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Jika $\varepsilon < b - a$ tinjau bahwa $b - \frac{\varepsilon}{2} \in A$ dan $b - \varepsilon < b - \frac{\varepsilon}{2}$, sedangkan $\varepsilon \geqslant b - a$ tinjau $b - \varepsilon < \frac{a+b}{2}$ dan $\frac{a+b}{2} \in A$. Jadi, $\sup A = b$ dan secara analog untuk $\inf A = a$.

(b) Akan dibuktikan bahwa $A^o = (a,b)$. Jika $p \in (a,b)$, pilih $r = \min\{p - a, b - p\}$. Diperoleh $N_r(p) = (p - r, p + r)$ dengan

$$p - r \geqslant p - (p - a) = a, \quad p + r \leqslant p + (b - p) = b$$

sehingga $N_r(p) \subseteq (a,b) \subseteq A \implies N_r(p) \subseteq A$. Jadi, $p \in A^o \implies (a,b) \subseteq A^o$. Akan dibuktikan selainnya bukan titik interior. Akan dibuktikan $p \notin A^o$ untuk setiap $p \leqslant a$. Untuk setiap $r > 0$, perhatikan bahwa $\frac{a-r}{2} \in N_r(p)$ namun $\frac{a-r}{2} \notin A$. Jadi, $p \notin A^o$. Untuk $p \geqslant b$, cukup tinjau $\frac{a+r}{2} \in N_r(p)$ namun $\frac{a+r}{2} \notin A$. Jadi, terbukti bahwa $A^o = (a,b)$.

Untuk pembuktian $A' = [a,b]$ bisa memodifikasi dari Contoh 3.7.

(21) (a) Akan ditentukan $\mathbb{Z}'$ dan $\mathbb{Z}^o$. Pertama, akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}^o = \varnothing$. Misalkan $p \in \mathbb{Z}$, perhatikan bahwa untuk setiap $r > 0$, $p + \frac{r}{2} \in N_r(p)$ namun $p + \frac{r}{2} \notin \mathbb{Z}$. Jadi, $p \notin \mathbb{Z}^o$.
Akan dibuktikan $\mathbb{Z}' = \varnothing$. Pilih $r = \frac{1}{2}$, perhatikan bahwa $N_r(p) \cap \mathbb{Z} = \{p\}$ sehingga $(N_r(p) \cap \mathbb{Z}) \setminus \{p\} = \varnothing$. Jadi, $p \notin \mathbb{Z}'$.

(b) Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Q}^o = \varnothing$. Akan dibuktikan pernyataan berikut.

> Diberikan dua bilangan real x dan y. Maka terdapat bilangan irasional c yang memenuhi $x < c < y$.

Bukti. Dari Akibat 2.14, terdapat bilangan rasional q yang memenuhi $\frac{x}{\sqrt{2}} < q < \frac{y}{\sqrt{2}}$ sehingga $x < q\sqrt{2} < y$. Di sini, $c = q\sqrt{2}$ merupakan bilangan irasional dan kita selesai. □

Misalkan $p \in \mathbb{Q}$. Untuk setiap r, pada $N_r(p) = (p - r, p + r)$ memuat suatu bilangan irasional sehingga $N_r(p) \not\subseteq \mathbb{Q}$. Jadi, $p \notin \mathbb{Q}^o$.
Akan dibuktikan $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Misalkan $p \in \mathbb{R}$. Untuk setiap $r > 0$, menurut Akibat 2.14, terdapat bilangan rasional q di interval $(p, p + r)$. Ini berarti $q \in N_p(r) = (p - r, p + r)$ yang mana $q \neq p$ dan $q \in \mathbb{Q}$. Ini berarti $p \in \mathbb{Q}'$ yang berarti $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

(22) Akan dibuktikan $A \cup B$ kompak. Ambil sebarang koleksi open cover $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ untuk $A \cup B$. Karena $A \subseteq A \cup B$, tentu $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ juga open cover untuk A. Karena A kompak, terdapat berhingga open subcover $\{S_{n_1}, S_{n_2}, \cdots, S_{n_x}\}$ untuk A. Secara analog, terdapat berhingga open subcover $\{S_{m_1}, S_{m_2}, \cdots, S_{m_y}\}$ untuk B. Akan dibuktikan bahwa

$$A \cup B \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{x} S_{n_i} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{y} S_{m_j} \right).$$

Misalkan $p \in A \cup B$, perhatikan bahwa $p \in A$ atau $p \in B$. Jika $p \in A$, maka $p \in \bigcup_{i=1}^{x} S_{n_i} \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{x} S_{n_i} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{y} S_{m_j} \right)$ sehingga $p \in \left(\bigcup_{i=1}^{x} S_{n_i} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{y} S_{m_j} \right)$. Untuk $p \in B$, dapat diperoleh hasil yang sama dengan cara yang sama pula. Jadi, $\{S_{n_1}, \cdots, S_{n_x}\} \cup \{S_{m_1}, \cdots, S_{m_y}\}$ merupakan open subcover berhingga dari $\{S_i\}$ untuk $A \cup B$. Jadi, $A \cup B$ kompak.
Akan dibuktikan $A \cap B$ kompak. Ambil sebarang koleksi open cover $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ untuk $A \cap B$. Menurut Teorema 3.15, A tertutup. Ini berarti A^c terbuka menurut Teorema 3.8. Perhatikan bahwa $A^c \cup \{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ merupakan koleksi open cover untuk B dan karena B kompak, ada open subcover $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \subseteq A^c \cup \{S_1, S_2, \cdots\}$ untuk B. Karena $A \cap B \subseteq B$, ini berarti $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ merupakan open cover berhingga untuk $A \cap B$. Jika $\{X_1, \cdots, X_n\} \subseteq \{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ maka selesai. Andaikan ada i sehingga $X_i = A^c$, buang X_i dan tersisa
$\mathcal{X} := \{X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n\}$. Akan dibuktikan $A \cap B \subseteq \mathcal{X}$. Misalkan $p \in A \cap B$,

maka $p \in A$ dan $p \in B$. Karena $p \in B$, maka $p \in \mathcal{X} \cup A^c$. Karena $p \in A$, maka haruslah $p \in \mathcal{X}$ dan terbukti. Karena $\mathcal{X} \subseteq \{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dan berhingga, maka $A \cap B$ kompak.

(23) Andaikan K tidak memiliki titik limit dalam X. Untuk setiap $p \in X$, terdapat $r > 0$ yang memenuhi $(N_r(p) \cap K) \setminus \{p\} = \varnothing$. Dengan kata lain, dapat dibuat suatu persekitaran dari $p \in X$ sehingga $N_r(p) \cap K \subseteq \{p\}$. Karena K ada tak berhingga, maka ada tak berhingga banyaknya persekitaran yang dibuat yang merupakan open cover bagi K. Meningat $K \subseteq X$, akibatnya ada suatu koleksi open cover bagi X yang memiliki tak berhingga banyaknya open cover. Kontradiksi dengan X kompak.

(24) Karena K kompak, maka K tertutup dan terbatas. Karena terbatas, ini berakibat $\sup K, \inf K$ ada. Misalkan $a = \sup K$. Andaikan $a \notin K$. Ini berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $y \in K$ dengan $y \neq a$ yang memenuhi $a - \varepsilon < y \implies y \in (N_\varepsilon(a) \cap K) \setminus \{a\}$. Ini berarti $a \in K'$ dan karena K tertutup, maka $a \in K$. Kontradiksi. Jadi, $a \in K$ dan dengan cara yang sama berlaku $\inf K \in K$.

(25) Tinjau bahwa $-2 < p < 2$ berlaku $p^2 < 4$ dan selainnya berlaku $p^2 \geqslant 4$. Ini berarti E terbatas ke atas oleh 2 dan terbatas ke bawah oleh -2 sehingga E terbatas. Akan dibuktikan E tertutup, ekivalen dengan membuktikan E^c terbuka. Misalkan $a \in \mathbb{Q}$ memenuhi $a^2 < 2$. Jika $a > 0$, terdapat $b \in \mathbb{Q}$ yang memenuhi $a < b < \sqrt{2}$. Pilih $r := b - a$, maka $y \in N_r(a)$ memenuhi

$$r > |y - a| \geqslant |y| - |a| = |y| - a \implies y^2 < (a + r)^2 = b^2 < 2.$$

Jadi, $N_r(a) \subseteq E^c$. Jika $a < 0$, terdapat $b \in \mathbb{Q}$ memenuhi $-\sqrt{2} < b < a$, lalu dilakukan dengan cara yang sama dengan memilih $r := a - b$. Dengan cara yang sama pula, dapat dibuktikan untuk $a \in \mathbb{Q}$ dengan $a^2 > 3$. Jadi, E^c terbuka sehingga E tertutup.

Akan dibuktikan E tidak kompak. Andaikan E kompak. Mudah dibuktikan bahwa jika $A \subseteq B$ maka $A \cap C \subseteq B \cap C$ (diserahkan kepada pembaca). Dari sini diperoleh akibat berikut.

> Misalkan G terbuka di $\mathbb{R}$, maka $\mathbb{Q} \cap G$ terbuka di $\mathbb{Q}$.

Bukti. Sebagai latihan. □

Misalkan

$$I_n := \mathbb{Q} \cap \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}}, \sqrt{3 - \frac{1}{n}} \right), \quad n \in \mathbb{N}_{\geqslant 3}$$

yang mana dari pernyataan sebelumnya berlaku I_n terbuka. Misalkan $x \in E$, maka $2 < x^2 < 3$. Dari Teorema 2.13, terdapat $N \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $\frac{1}{x^2-2} < N \iff 2 + \frac{1}{N} < x^2$. Selain itu, terdapat $M \in \mathbb{N}$ yang memenuhi $\frac{1}{3-x^2} < M \iff 3 - \frac{1}{M} > x^2$. Pilih $K = \max\{M, N\}$, maka

$$2 + \frac{1}{K} \leqslant 2 + \frac{1}{N} < x^2 < 3 - \frac{1}{M} \leqslant 3 - \frac{1}{K}$$

sehingga $x \in I_K$ untuk suatu bilangan asli K. Ini menunjukkan $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ yang berarti $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merupakan koleksi open cover untuk E. Karena E kompak, terdapat $\mathcal{K} := \{I_{n_1}, I_{n_2}, \cdots, I_{n_k}\}$ yang merupakan open cover untuk E. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Misalkan $p = n_k$, tinjau terdapat $q \in \mathbb{Q}$ (Akibat 2.14) yang memenuhi

$$\sqrt{3-\frac{1}{p}} < q < \sqrt{3-\frac{1}{p+1}} \implies 2 < 3-\frac{1}{p} < q^2 < 3-\frac{1}{p+1} < 3$$

sehingga $2 < q^2 < 3 \implies q \in E$. Namun, $q \notin I_{n_i}$ untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, k$ sehingga kontradiksi. Jadi, E tidak kompak.