PERSIAPAN UAS ANALISIS REAL II

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Pada modul ini tidak akan diberikan bukti pada sifat-sifat yang akan digunakan. Disebut sebagai rangkuman juga tidak tepat karena banyak bagian yang dihilangkan, namun bagian yang disertakan hanya berfokus pada aplikasi model soal yang biasa digunakan dalam ujian Analisis Real II di UB.

1. Integral Riemann-Stieltjes

Diberikan fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan fungsi g monoton naik di $[a, b]$. Himpunan $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ disebut titik partisi dari $[a, b]$ dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, sedangkan himpunan semua partisi di $[a, b]$ dinotasikan sebagai $\mathcal{P}[a, b]$. Pada partisi tersebut, didefinisikan

$$\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1}), \quad M_i(f) = \sup_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t), \quad m_i(f) = \inf_{x_{i-1} \leq t \leq x_i} f(t)$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Selanjutnya, didefinisikan

$$U(f; g, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta g_i, \quad L(f; g, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta g_i, \quad S(f; g, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g_i$$

dengan $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Didefinisikan pula norm dari partisi P didefinisikan sebagai

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

Definisi 1.1 (Penghalus/Refinement)**.**
Misalkan P dan P^* merupakan partisi dari $[a, b]$. Partisi P^* disebut *refinement* (penghalus) dari P jika $P \subseteq P^*$, yaitu setiap titik partisi dari P berada di P^*. Jika P_1 dan P_2 merupakan partisi dari $[a, b]$, *common refinement* dari P_1 dan P_2 didefinisikan sebagai $P^* = P_1 \cup P_2$.

Contoh 1.2. Diberikan tiga partisi $[0, 1]$, yaitu

$$P_1 := \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}, \quad P_2 := \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \quad P_3 := \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}.$$

Dalam hal ini P_3 merupakan penghalus dari P_1 dan P_2, P_1 merupakan penghalus dari P_2, sedangkan P_2 bukan penghalus dari P_1 karena $\frac{3}{4} \in P_1$ namun $\frac{3}{4} \notin P_2$.

Dapat dipahami bahwa Integral Riemann merupakan kasus khusus dari Integral Riemann-Stieltjes dengan memilih $g(x) = x$.

Date: Oktober 2024, `wildan-wicaksono.github.io`.

Proposisi 1.3. *Misalkan fungsi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *terbatas, fungsi monoton naik* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$*, dan* $P \in \mathcal{P}[a, b]$*. Jika* $m := \inf_{a \le t \le b} f(t)$ *dan* $M := \sup_{a \le t \le b} f(t)$*, maka*

$$m(g(b) - g(a)) \le L(f; g, P) \le S(f; g, P) \le U(f; g, P) \le M(g(b) - g(a)).$$

Ini menunjukkan bahwa $L(f; g, P)$ *dan* $U(f; g, P)$ *terbatas.*

Selanjutnya akan dijelaskan hubungan partisi dengan penghalusnya.

Teorema 1.4. *Misalkan* $P, P^* \in \mathcal{P}[a, b]$ *yang memenuhi* $P \subseteq P^*$*. Maka*

$$L(f; g, P) \le L(f; g, P^*) \quad \text{dan} \quad U(f; g, P^*) \le U(f; g, P).$$

Selain itu, $\|P\| \ge \|P^*\|$.

Dari Proposisi 1.3 menunjukkan bahwa $\sup_P L(f; g, P)$ dan $\inf_P U(f; g, P)$ masing-masing ada di mana nilai supremum dan infimum diambil dari sebarang partisi yang mungkin pada $[a, b]$. Selanjutnya, didefinisikan

$$\overline{\int_a^b} f \ \mathrm{d}g = \inf_P U(f; g, P), \qquad \underline{\int_a^b} f \ \mathrm{d}g = \sup_P L(f; g, P).$$

Teorema 1.5. *Diberikan fungsi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *terbatas dan fungsi monoton naik* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *pada* $[a, b]$*. Maka*

$$\underline{\int_a^b} f \ dg \le \overline{\int_a^b} f \ dg.$$

Akan diberikan definisi terintegeral Riemann-Stieltjes dari dua referensi yang relevan.

Definisi 1.6 (Rudin, Terintegral Riemann-Stieltjes)**.**
Diberikan fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terbatas dan fungsi monoton naik $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Fungsi f disebut *terintegral Riemann-Stieltjes* relatif terhadap g apabila

$$\overline{\int_a^b} f \ \mathrm{d}g = \underline{\int_a^b} f \ \mathrm{d}g.$$

Definisi 1.7 (Terintegral Riemann)**.**
Diberikan fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terbatas pada $[a, b]$. Integral Riemann atas dari f pada $[a, b]$ didefinisikan sebagai

$$\overline{\int_a^b} f(x) \ \mathrm{d}x := \inf_P U(f, P)$$

dengan nilai inifimum diambil dari sebarang partisi P pada $[a, b]$. Integral Riemann bawah dari f pada $[a, b]$ didefinisikan sebagai

$$\underline{\int_a^b} f(x) \ \mathrm{d}x := \sup_P L(f, P)$$

dengan nilai supremum diambil dari sebarang partisi P pada $[a,b]$. Jika nilai dari integral Riemann atas sama dengan nilai dari integral Riemann bawah, maka f disebut terintegral Riemann di $[a,b]$ dan ditulis

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Definisi 1.8 (Muslikh, Terintegral Riemann-Stieltjes)**.**
Diberikan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dan fungsi monoton naik $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan teintegral Riemann-Stieltjes (RS) terhadap fungsi g pada $[a,b]$, jika terdapat $A \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi $P_\varepsilon \in \mathcal{P}[a,b]$ sedemikian sehingga

$$|S(f;g,P) - A| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g_i - A \right| < \varepsilon$$

untuk setiap partisi P dengan $P_\varepsilon \subseteq P$ dan $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Himpunan $\mathcal{RS}(g)[a,b]$ merupakan himpunan semua fungsi yang terintegral RS terhadap g di $[a,b]$.

Dalam buku Analisis Real II oleh Muslikh, definisi terintegral Riemann mengadaptasi dari Rudin, sedangkan definisi terintegral Riemann-Stieltjes dari referensi lain. Namun, kedua definisi dari Integral Riemann-Stieltjes ekivalen. Himpunan semua fungsi yang terintegral Riemann di $[a,b]$ dinotasikan sebagai $\mathcal{R}[a,b]$, sedangkan himpunan semua fungsi yang terintegral Riemann-Stieltjes relatif terhadap g dinotasikan sebagai $\mathcal{RS}(g)[a,b]$.

Teorema selanjutnya merupakan kriteria untuk mengecek apakah suatu fungsi f terintegral Riemann-Stieltjes relatif terhadap g pada $[a,b]$ atau tidak.

Teorema 1.9 (Uji Terintegral)**.**
Diberikan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi terbatas dan fungsi monoton naik $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ pada $[a,b]$. Fungsi f terintegral Riemann-Stieltjes relatif terhadap g jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $P \in \mathcal{P}[a,b]$ sedemikian sehingga

$$U(f;g,P) - L(f;g,P) < \varepsilon.$$

Teorema selanjutnya biasa digunakan untuk membuktikan suatu nilai dari $\int_a^b f\ dg$.

Teorema 1.10 (Uji Nilai Integral)**.**
Diberikan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dan fungsi monoton naik $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Fungsi $f \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat $A \in \mathbb{R}$, sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi P pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(f;g,P) - A| < \varepsilon.$$

Dalam hal ini, $\int_a^b f(x)\ dg = A$.

Berikutnya akan diberikan daftar beberapa sifat integral yang sebagaimana telah dipelajari di mata kuliah kalkulus. Misalkan $f \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$.

(1) Jika $c \in \mathbb{R}$, maka $cf \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$. Selain itu,
$$\int_a^b cf \text{ d}g = c\int_a^b f \text{ d}g.$$
(2) Jika $h \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$, maka $f+h \in \mathcal{RS}[a,b]$ serta berlaku
$$\int_a^b (f+h) \text{ d}g = \int_a^b f \text{ d}g + \int_a^b h \text{ d}g.$$
(3) Jika $h \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$ dengan $f(x) \leq h(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka
$$\int_a^b f \text{ d}g \leq \int_a^b h \text{ d}g.$$
(4) $f^2 \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$.

(5) $|f| \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$ dan berlaku
$$\left|\int_a^b f \text{ d}g\right| \leq \int_a^b |f| \text{ d}g.$$
(6) Jika $h \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$, maka $fh \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$ dan $f^n \in \mathcal{RS}[a,b]$ di mana $n \in \mathbb{N}$.

(7) Jika $c \in (a,b)$, maka $f \in \mathcal{RS}(g)[a,c]$ dan $f \in \mathcal{RS}(g)[c,b]$ serta berlaku
$$\int_a^b f \text{ d}g = \int_a^c f \text{ d}g + \int_c^b f \text{ d}g.$$

Contoh 1.11. Diberikan fungsi monoton naik $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, akan dibuktikan bahwa
$$\int_a^b \text{d}g = g(b) - g(a).$$
Akan dibuktikan bahwa $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 1$ untuk setiap $x \in [a,b]$ terintegral Riemann-Stieltjes. Akan digunakan Teorema 1.9. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih partisi $P = \{a = x_0, b = x_1\}$, diperoleh $M_1(f) = 1$ dan $m_1(f) = 1$. Jadi,
$$U(f;g,P) - L(f;g,P) = M_1(f)\Delta g_1 - m_1(f)\Delta g_1 = 0 < \varepsilon.$$
Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi P yang mungkin, menurut Teorema 1.9 berlaku $f \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$. Akan dibuktikan bahwa $\int_a^b \text{ d}g = g(b) - g(a)$. Misalkan $\int_a^b f \text{ d}g = A$. Karena $f \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$, menurut Teorema 1.10 untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $P \in \mathcal{P}[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku
$$\varepsilon > |S(f;g,P) - A| = \left|\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta g_i - A\right|, \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i].$$
Karena $f(t_i) = 1$,
$$\varepsilon > \left|\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta g_i - A\right| = \left|\sum_{i=1}^n \Delta g_i - A\right| = |g(b) - g(a) - A| \geq 0.$$
Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $|g(b) - g(a) - A| = 0$ sehingga $A = g(b) - g(a)$ seperti yang ingin dibuktikan.

Contoh 1.12. Fungsi Dirichlet $f : [0,1] \to \{0,1\}$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

tidak terintegral Riemann pada $[0,1]$. Pilih $\varepsilon = 1$. Pada sebarang interval $[a,b]$ dengan $a < b$ terdapat tak berhingga banyaknya bilangan rasional dan irasional, ini artinya

$$\sup_{a \le t \le b} f(x) = 1, \qquad \inf_{a \le t \le b} f(x) = 0.$$

Jadi, untuk sebarang partisi $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ pada $[0,1]$ berlaku

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1$$
$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i = 0$$

sehingga $U(f,P) - L(f,P) = 1 \ge \varepsilon$ untuk sebarang partisi P. Dari teorema 1.9, maka f tidak terintegral Riemann.

2. Barisan dan Deret Fungsi

Diberikan himpunan $E \subseteq \mathbb{R}$. Fungsi $f_n : E \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ disebut *barisan fungsi pada E* dan dinotasikan sebagai $\langle f_n \rangle$ atau (f_n). Jika nilai fungsi f_n dievaluasi di x, maka $\langle f_n(x) \rangle$ membentuk barisan bilangan real. Sebagaimana yang telah dipelajari pada bab barisan dan deret, suatu barisan dapat konvergen atau divergen. Demikian juga pada barisan fungsi, bisa jadi barisan $\langle f_n(x_0) \rangle$ konvergen ke suatu nilai sedangkan untuk $\langle f_n(x_1) \rangle$ divergen.

Contoh 2.1. Diberikan $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) := x^n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Perhatikan bahwa

$$\left\langle f_n\left(\frac{1}{2}\right)\right\rangle = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$$

yang barisannya konvergen ke 0. Sedangkan,

$$\langle f_n(2) \rangle = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$$

yang barisannya divergen. Ini menunjukkan bahwa jika f_n dievaluasi di titik yang berbeda bisa menghasilkan konvergen maupun divergen. Kondisi tersebut yang dimaksud *konvergen titik demi titik*.

Definisi 2.2 (Konvergen Titik Demi Titik)**.**
Diberikan barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ pada $E \subseteq \mathbb{R}$. Barisan $\langle f_n \rangle$ dikatakan *konvergen titik demi titik* ke f pada E, jika untuk setiap $x \in E$ berlaku $\langle f_n(x) \rangle$ konvergen ke $f(x)$, yaitu

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Dengan kata lain, barisan $\langle f_n \rangle$ dikatakan konvergen ke $f : E \to \mathbb{R}$ jika untuk setiap $x \in E$ dan $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definisi 2.3 (Konvergen Seragam)**.**

Barisan fungsi real $\langle f_n \rangle$ pada $E \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan *konvergen seragam* ke fungsi $f : E \to \mathbb{R}$ pada E, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in E$ dan $n \geq N$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Teorema 2.4 (Kriteria Cauchy)**.**

Barisan fungsi real $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada E jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m, n \geq N$ dan setiap $x \in E$ berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Teorema 2.5. *Misalkan untuk setiap $x \in E$ berlaku $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan*

$$M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Barisan f_n konvergen seragam ke f jika dan hanya jika $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$.

Definisi 2.6 (Deret Fungsi)**.**

Diberikan barisan fungsi $f_k : E \to \mathbb{R}$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Didefinisikan

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

(1) Deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ dikatakan *konvergen titik demi titik* jika barisan $\langle s_n \rangle$ konvergen titik demi titik.
(2) Deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ dikatakan *konvergen seragam* jika barisan $\langle s_n \rangle$ konvergen seragam.

Teorema 2.7 (Uji M-Weiestrass)**.**

Dimisalkkan $\langle f_n \rangle$ barisan fungsi yang terdefinisi pada E dan $\langle M_n \rangle$ barisan bilangan real positif. Jika

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

untuk setiap $x \in E$ dan $n \in \mathbb{N}$, serta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergen, maka $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergen seragam pada E.

3. Latihan Soal

(1) (UAS 2019). Hitung integral Riemann fungsi f pada $[0,2]$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{2}, & x = 2 \end{cases}.$$

(2) (UAS 2021). Jika $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$, buktikan bahwa

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) (UAS 2019). Periksa pada interval mana barisan berikut:

$$f_n = \frac{x}{1+nx^2}$$

konvergen sergam, konvergen titik demi titik, atau divergen.

(4) (UAS 2019). Apakah deret berikut konvergen seragam? Jelaskan jawaban Anda.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

(5) (UAS 2021). Jika $f \in \mathcal{RS}(g)[a,b]$ dan $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [a,b]$, buktikan

$$\left| \int_a^b f(x)\, dg \right| \leq M|g(a) - g(b)|.$$

(6) (UAS 2021). Periksa apakah barisan $\langle f_n \rangle$ dan $\langle g_n \rangle$ dengan $f_n(x) = \frac{1}{n}$ dan $g_n(x) = \frac{1}{x}$ untuk $n = 1, 2, \ldots$ konvergen seragam pada interval $(0,1)$.

(7) (UAS 2022). Diberikan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Selidiki apakah f terintegral Riemann pada $[0,2]$.

(8) (UAS 2022). Misalkan $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan

$$g(x) = \begin{cases} 5, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Buktikan g teintegral Riemann dan

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(9) (UAS 2022). Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan $f_n(x) = 1 - \frac{x^2}{n}$ untuk semua $x \in [-1,1]$. Jika $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan $f(x) = 1$ untuk semua $x \in [-1,1]$, buktikan bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen titik demi titik f.

(10) (UAS 2023). Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, misalkan $g_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$ untuk semua $x \in [-1,1]$. Jika $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan $g(x) = 0$ untuk semua $x \in [-1,1]$, buktikan bahwa $\langle g_n \rangle$ konvergen seragam ke g.

(11) (Kuis 2023). Jika

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 1.5, \\ 2, & 1.5 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

Tentukan apakah f terintegral Riemann-Stieltjes pada $[-1,1]$ relatif terhadap g. Jika ya, hitung integralnya.

(12) (UAS 2023). Misalkan fungsi f non-negatif dan kontinu apda $[a,b]$ yang memenuhi $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Buktikan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

(13) (UAS 2023). Diandaikan fungsi g naik pada $[a,b]$, $a \leq c \leq b$, g kontinu di c dengan $f(c) = 1$ dan $f(x) = 0$ jika $x \neq c$. Buktikan bahwa f terintegral Riemann-Stieljes terhadap g dan

$$\int_a^b f\ \mathrm{d}g = 0.$$

(14) (UAS 2023). Tentukan fungsi limit barisan f untuk barisan $\langle f_n \rangle$ dengan

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

untuk $0 \leq x \leq 1$ dan $n \in \mathbb{N}$. Masing-masing f_n kontinu pada $[0,1]$, apakah f juga kontinu? Apakah $f_n \to f$ seragam pada $[0,1]$?

(15) (UAS 2023). Buktikan bahwa deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + x}{n^2}$$

konvergen seragam pada setiap selang tertutup dan terbatas.

(16) (UAS 2024) Periksa apakah barisan fungsi $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ untuk setiap bilangan asli konvergen titik demi titik atau tidak.

(17) (UAS 2024) Diberikan fungsi $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{dan} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Periksa apakah $\int_{-1}^1 f\ \mathrm{d}g$ dan $\int_{-1}^1 g\ \mathrm{d}f$ ada atau tidak. Jika ada, hitung nilai integralnya.

(18) (Kuis 2025) Didefiniiskan fungsi $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ sebagai

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Apakah fungsi f terintegral Riemann pada $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$? Jelaskan jawaban Saudara.

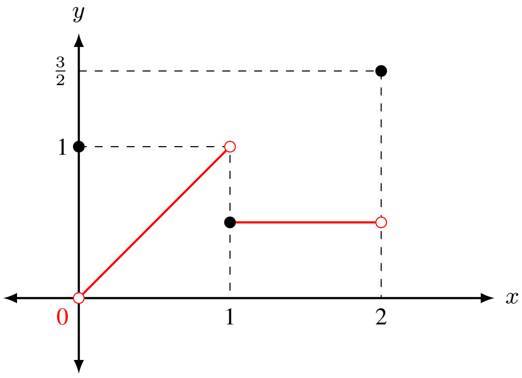
(19) (Kuis 2025) Untuk sebarang bilangan real $a > 0$, diketahui $f \in \mathcal{R}[-a, a]$. Jika f merupakan fungsi genap, yaitu $f(-x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [-a, a]$, buktikan dengan definisi integral Riemann buktikan bahwa

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

(20) Periksa apakah barisan fungsi $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dengan $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ untuk setiap $0 \leq x \leq 1$ konvergen seragam atau tidak.

4. Solusi

(1) Akan dibuktikan bahwa $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Pertama, akan dibuktikan $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dengan teorema 1.9. Misalkan $\varepsilon > 0$, akan dibuktikan terdapat $P \in \mathcal{P}[a,b]$ yang memenuhi $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.



Pilih partisi

$$P := \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n} = 2\}, \quad x_i = \frac{i}{n}.$$

Dengan kata lain,

$$P := \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1, \frac{n+1}{n}, \ldots, 2\right\}$$

sehingga $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. Perhatikan bahwa

$$M_i(f) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ x_i, & 2 \le i \le n, \\ \frac{1}{2}, & n+1 \le i \le 2n-1 \\ 2, & i = 2n \end{cases}, \quad m_i(f) = \begin{cases} x_{i-1}, & 1 \le i \le n-1, \\ 1, & i = n \\ \frac{1}{2}, & n < i \le 2n \end{cases}.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} U(f,P) &= M_1(f)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} M_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=n+1}^{2n-1} M_i(f)\Delta x_i + M_{2n}(f)\Delta x_{2n} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n-1} \frac{1}{2n} + \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n} \frac{i}{n^2} + \frac{n-1}{2n} + \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{\frac{n(n-1)}{2} - 1}{n^2} + \frac{n-1}{2n} + \frac{2}{n} \\ &= \frac{n^2 + 2n - 1}{n^2}. \end{aligned}$$

Selain itu,

$$\begin{aligned}
L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n-1} m_i(f)\Delta x_i + m_n(f)\Delta x_n + \sum_{i=n+1}^{2n} m_i(f)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{i-1}}{n} + \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i-1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{2n^2 - n + 2}{2n^2}.
\end{aligned}$$

Ini memberikan

$$U(f,P) - L(f,P) = \frac{5n-4}{2n^2} \to 0$$

untuk $n \to \infty$. Dengan kata lain, untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditemukan n yang cukup besar sedemikian sehingga

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Terbukti bahwa f terintegral Riemann. Misalkan $A = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$. Maka

$$A = \inf_P U(f,P) \leq \inf_n \frac{n^2 + 2n - 1}{n^2} = 1$$

dan

$$A = \sup_p L(f,P) \geq \sup_n \frac{2n^2 - n + 2}{2n^2} = 1.$$

Jadi, $A = \boxed{1}$.

Solusi Alternatif 2. Karena $f \in \mathcal{R}[0,2]$, berlaku $f \in \mathcal{R}[0,1]$ dan $f \in \mathcal{R}[1,2]$ dengan

$$\int_0^2 f\ \mathrm{d}x = \int_0^1 f\ \mathrm{d}x + \int_1^2 f\ \mathrm{d}x.$$

Akan dibuktikan bahwa $\int_0^1 f\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Misalkan $\int_0^1 f\ \mathrm{d}x = A$. Menurut teorema 1.10, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $P \in \mathcal{P}[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku $|S(f,P) - A| < \varepsilon$. Dengan kata lain,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - A \right| < \varepsilon, \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

dengan $P := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pilih $t_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, maka

$$\varepsilon > \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}) - A \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2} - A \right| = \left| \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} - A \right|.$$

Karena $x_n = 1$ dan $x_0 = 0$, maka $\varepsilon > \left|\frac{1}{2} - A\right|$. Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, haruslah $\left|\frac{1}{2} - A\right| = 0$ sehingga $A = \frac{1}{2}$.

Akan dibuktikan bahwa $\int_1^2 f\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Misalkan $\int_1^2 f\ \mathrm{d}x = B$. Menurut teorema 1.10 terdapat

$\delta > 0$ sehingga untuk setiap $P \in \mathcal{P}[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku $|S(f,P) - B| < \varepsilon$. Dengan kata lain,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - B \right| < \varepsilon, \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

dengan $P := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pilih $t_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, maka

$$\varepsilon > \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}) - A \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2} - B \right| = \left| \frac{x_n - x_0}{2} - B \right|.$$

Karena $x_n = 2$ dan $x_0 = 1$, maka $\varepsilon > \left| \frac{1}{2} - B \right|$. Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, haruslah $\left| \frac{1}{2} - B \right| = 0$ sehingga $B = \frac{1}{2}$.

Jadi, $\int_0^2 f \, \mathrm{d}x = A + B = \boxed{1}$.

(2) Misalkan $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = A$ dan $\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = B$. Akan dibuktikan bahwa $A \leq B$. Misalkan $P \in \mathcal{P}[a,b]$ dengan $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dan tinjau bahwa $A = \sup\limits_P L(f,P)$ dan $B = \sup\limits_P L(g,P)$. Karena $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka $m_i(f) \leq m_i(g)$. Ini berarti

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(g)\Delta x_i = L(g,P).$$

Karena ini berlaku untuk sebarang $P \in \mathcal{P}[a,b]$,

$$A = \sup_P L(f,P) \leq \sup_P L(g,P) = B$$

seperti yang ingin dibuktikan.

(3) Akan dibuktikan f_n konvergen titik demi titik di sebarang interval. Misalkan $x \in \mathbb{R}$, perhatikan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0$ sehingga f konvergen titik demi titik.

Akan dibuktikan juga $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke f pada sebarang interval I. Perhatikan bahwa

$$M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in I} \left| \frac{x}{1+nx^2} \right|.$$

Perhatikan bahwa $\left(1 - \sqrt{n}|x|\right)^2 \geq 0$ yang memberikan

$$0 \leq 1 - 2|x|\sqrt{n} + nx^2 \implies nx^2 + 1 \geq 2|x|\sqrt{n} \implies \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{|x|}{1+nx^2}.$$

Karena $1 + nx^2 > 0$, maka

$$\frac{|x|}{1+nx^2} = \frac{|x|}{|1+nx^2|} = \left| \frac{x}{1+nx^2} \right|.$$

Diperoleh

$$M_n = \sup_{x\in I} \left| \frac{x}{1+nx^2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Karena $0 \leq M_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, dengan teorema apit berlaku $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$. Menurut Teorema 2.5 berlaku $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam ke $f(x) = 0$. Jadi, barisan fungsi tersebut konvergen titik demi titik dan konvergen seragam di sebarang interval (artinya di $\mathbb{R}$), dan tidak ada interval yang menyebabkan barisan fungsi tersebut divergen.

(4) Akan digunakan Teorema 2.7. Misalkan $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$ dan

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| = \frac{|\sin(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Dalam hal ini, $M_n = \frac{1}{n^2}$. Karena deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, ini menunjukkan

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

konvergen seragam.

Note. Didefinisikan $\zeta(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$. Deret tersebut konvergen apabila $s > 1$ dan divergen apabila $s \leq 1$.

(5) Perhatikan bahwa

$$\left|\int_a^b f \text{ d}g\right| \leq \int_a^b |f| \text{ d}g \leq \int_a^b M \text{ d}g = M(g(b) - g(a))$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Tambahan. Akan dibuktikan $\int_a^b M \text{ d}g = M(g(b) - g(a))$. Akan dibuktikan dengan teorema 1.10. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \varepsilon$. Untuk setiap partisi $P \in \mathcal{P}[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku (serta $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$),

$$\begin{aligned}
|S(f; g, P) - M(g(b) - g(a))| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g_i - M(g(b) - g(a))\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} M\Delta g_i - M(g(b) - g(a))\right| \\
&= |M(g(x_n) - g(x_0)) - M((g(b) - g(a))| \\
&= 0 \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\int_a^b M \text{ d}g = M(g(b) - g(a))$.

(6) Akan dibuktikan bahwa $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, menurut Archimedes terdapat bilangan asli N yang memenuhi $\frac{2}{\varepsilon} < N$. Perhatikan bahwa untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m \geq n \geq N$ dan setiap $x \in (0,1)$ berlaku

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon.$$

Menurut Teorema 2.4, $\langle f_n \rangle$ konvergen seragam pada $(0,1)$.

Akan dibuktikan bahwa $\langle g_n \rangle$ konvergen seragam pada interval $(0,1)$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $N = 1$. Untuk setiap bilangan asli $m, n \geq 1$ dan setiap $x \in (0,1)$ berlaku

$$|g_n(x) - g_m(x)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right| = 0 < \varepsilon.$$

Menurut Teorema 2.4, $\langle g_n \rangle$ konvergen seragam pada $(0,1)$.

(7) Akan dibuktikan f terinteigral Riemann dengan teorema 1.9. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ dan partisi $P := \{x_0 = 0, x_1 = 1 - \delta, x_2 = 1 + \delta, x_3 = 2\}$. Perhatikan bahwa

$$M_1(f) = 1, \quad M_2(f) = 1, \quad M_3(f) = 0$$

dan

$$m_1(f) = 1, \quad m_2(f) = 0, \quad m_3(f) = 0.$$

Ini berarti

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{3}(M_i(f) - m_i(f))\Delta x_i = 0 + (1-0)\cdot 2\delta + 0 = 2\delta < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Terbukti f terintegral Riemann.

(8) Akan dibuktikan dengan teorema 1.9. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{5}\right\}$ dan $P := \{x_0 = 0, x_1 = \delta, x_2 = 1\}$. Diperoleh

$$M_1(g) = 5, M_2(g) = 0, \quad m_1(g) = m_2(g) = 0.$$

Ini berarti

$$U(g,P) - L(g,P) = (M_1(g) - m_1(g))\delta + (M_2(g) - m_2(g))(1-\delta) = 5\delta < 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Terbukti g terintegral Riemann. Akan dibuktikan $\int_0^1 g \; \mathrm{d}x = 0$. Misalkan $\int_0^1 g \; \mathrm{d}x = A$. Karena g terintegral Riemann, menurut teorema 1.10 berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $P \in \mathcal{P}[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku

$$\varepsilon > |S(f,P) - A| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - A\right|, \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Pilih $t_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, maka $f(t_i) = 0$ sehingga

$$\varepsilon > \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - A\right| = |0 - A| = |A| \geq 0.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $|A| = 0$ sehingga $A = 0$ seperti yang ingin dibuktikan.

(9) Ambil sebarang $x \in [-1,1]$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, dari Archimedes terdapat bilangan asli N yang memenuhi $\frac{x^2}{N} < \varepsilon$. Untuk setiap bilangan asli $n \geq N$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|1 - \frac{x^2}{n} - 1\right| = \frac{x^2}{n} \leq \frac{x^2}{N} < \varepsilon.$$

Terbukti bahwa $\langle f_n(x) \rangle$ konvergen titik demi titik ke $f(x)$.

(10) Akan dibuktikan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$, yaitu $\langle g_n \rangle$ konvergen titik demi titik ke g. Ambil sebarang $x \in [-1, 1]$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, menurut Archimedes terdapat bilangan asli N yang memenuhi $\frac{1}{\varepsilon} < N$. Untuk setiap bilangan asli $n \geq N$ berlaku

$$|g_n(x) - g(x)| = \left|\frac{x^n}{n} - 0\right| = \frac{|x^n|}{n} = \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

terbukti. Sekarang, perhatikan bahwa

$$M_n = \sup_{x\in[-1,1]} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} \frac{|x|^n}{n} = \frac{1}{n}.$$

Ini menunjukkan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Menurut Teorema 2.5, maka g_n konvergen seragam ke g.

(11) Akan dibuktikan dengan teorema 1.9. Misalkan $\varepsilon > 0$, pilih partisi $P := \left\{-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right\}$. Diperoleh

$$M_1(f) = 1, M_2(f) = 3, M_3(f) = 3, \quad m_1(f) = 1, m_2(f) = 1, m_3(f) = 3.$$

Ini berarti

$$U(f; g, P) - L(f; g, P) = \sum_{i=1}^{3} (M_i(f) - m_i(f)) \Delta g_i = 0 + 2\left(g(1/4) - g(-1/4)\right) + 0 = 0 < \varepsilon.$$

Terbukti f terintegral Riemann-Stieltjes relatif terhadap g. Misalkan $\int_{-1}^{1} f \ \mathrm{d}g = A$, menurut teorema 1.10 untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $P \in \mathcal{P}[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku $|S(f; g, P) - A| < \varepsilon$. Dengan kata lain,

$$\varepsilon > \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta g_i - A \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(0 - 0) - A \right| = |A| \geq 0.$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $|A| = 0 \iff A = \boxed{0}$.

(12) Andaikan terdapat $c \in [a, b]$ yang memenuhi $f(c) > 0$. Karena f kontinu di c, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$. sehingga untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $|x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Lemma. Terdapat $p > 0$ sedemikian sehingga $f(x) > \frac{f(c)}{2}$ untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $|x - c| < p$.

Bukti. Pilih $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$, terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $|x - c| < \delta_1$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2}$. Ini berakibat

$$\frac{f(c)}{2} > |f(x) - f(c)| = |f(c) - f(x)| \geq |f(c)| - |f(x)| = f(c) - f(x)$$

sehingga $f(x) > \frac{f(c)}{2}$. Jadi, untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $|x - c| < \delta_1$ berlaku $f(x) > \frac{f(c)}{2}$. □

Pilih $w = \frac{1}{2} \min\{\delta, \delta_1, c - a, b - c\} > 0$. Akan dibagi menjadi tiga kasus.

- Jika $c \in (a, b)$, dengan kondisi f tak negatif berlaku

$$0 = \int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^{c-w} f \, \mathrm{d}x + \int_{c-w}^{c+w} f \, \mathrm{d}x + \int_{c+w}^{b} f \, \mathrm{d}x \geq 0 + \int_{c-w}^{c+w} f \, \mathrm{d}x + 0 = \int_{c-w}^{c+w} f \, \mathrm{d}x.$$

  Perhatikan bahwa untuk $c - w \leq x \leq c + w$ berarti

$$|x - c| \leq w \leq \frac{1}{2}\delta_1 < \delta_1$$

  sehingga menurut lemma berlaku $f(x) > \frac{f(c)}{2}$. Ini berarti

$$\int_{c-w}^{c+w} f \, \mathrm{d}x \geq \int_{c-w}^{c+w} \frac{f(c)}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{f(c)}{2}((c + w) - (c - w)) = 2wf(c).$$

  Diperoleh hubungan

$$0 = \int_a^b f \, \mathrm{d}x \geq 2wf(c) > 0$$

  sehingga kontradiksi.
- Jika $c = a$, pilih $w = \frac{1}{2} \min\{\delta, \delta_1, b - a\} > 0$. Dengan cara yang sama berlaku

$$0 = \int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^{a+w} f \, \mathrm{d}x + \int_{a+w}^{b} f \, \mathrm{d}x \geq \int_a^{a+w} \frac{f(a)}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{wf(a)}{2} > 0$$

  sehingga kontradiksi.
- Jika $c = b$, pilih $w = \frac{1}{2} \min\{\delta, \delta_1, b - a\} > 0$. Dengan cara yang sama berlaku

$$0 = \int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^{b-w} f \, \mathrm{d}x + \int_{b-w}^{b} f \, \mathrm{d}x \geq \int_{b-w}^{b} \frac{f(b)}{2} > \frac{wf(b)}{2} > 0$$

  sehingga kontradiksi.

Jadi, $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

(13) Karena g kontinu di c, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in [a, b]$ dengan $|x - c| < \delta$ berlaku $|g(x) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Akan dibagi menjadi tiga kasus.

Kasus 1. Jika $c \in (a, b)$.

Pilih $h = \frac{1}{2}\min\{c - a, b - c, \delta\}$ dan partisi

$$P := \{x_0 = a, x_1 = c - h, x_2 = c + h, x_3 = b\}$$

Diperoleh

$$M_1(f) = 0, M_2(f) = 1, M_3(f) = 0, \quad m_1(f) = m_2(f) = m_3(f) = 0.$$

Dari sini diperoleh

$$U(f; g, P) - L(f; g, P) = \sum_{i=1}^{3}(M_i(f) - m_i(f))\Delta g_i = \Delta g_2 = g(x_2) - g(x_1) = g(c + h) - g(c - h).$$

Perhatikan bahwa

$$|(c + h) - c| = |h| \leq \frac{1}{2}\delta < \delta$$

sehingga berakibat $|g(c + h) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dengan alasan yang sama, $|g(c - h) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} |g(c + h) - g(c - h)| &= \left|\Big(g(c + h) - g(c)\Big) - \Big(g(c - h) - g(c)\Big)\right| \\ &\leq |g(c + h) - g(c)| + |g(c - h) - g(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

sehingga $U(f; g, P) - L(f; g, P) < \varepsilon$ yang membuktikan $f \in \mathcal{RS}(g)[a, b]$. Menurut teorema 1.10, terdapat $\delta' > 0$ sehingga untuk setiap $P \in \mathcal{P}[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta'$ berlaku $|S(f; g, P) - A| < \varepsilon$. Dengan memilih $t_i \neq c$,

$$\varepsilon > \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta g_i - A\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta g_i - A\right| = |-A| = |A| \geq 0.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $A = 0$.

Kasus jika $c = a$ atau $c = b$ diserahkan kepada pembaca sebagai latihan (baca: penulis malas).

(14) Untuk setiap $x \in [0,1]$, akan dibuktikan bahwa $f(x) = 0$. Untuk $x = 0$, perhatikan bahwa $f_n(0) = 1 - n(0) = 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ sehingga $f_n(0)$ konvergen ke 1. Untuk $x \in (0,1]$, akan dibuktikan bahwa f_n konvergen ke 0. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, menurut Archimedes terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{x} < N$. Untuk setiap bilangan asli $n \geq N$, yaitu $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < x$ sehingga berlaku

$$|f_n(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$$

yang menunjukkan $f_n(x) \to 0$. Jadi,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases} .$$

Ini menunjukkan f tidak kontinu, yaitu tidak kontinu di $x = 0$. Akan ditunjukkan f_n tidak konvergen seragam ke f. Perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan memilih $x = \frac{1}{2n}$ yang mana $0 \leq x < \frac{1}{n}$ berlaku

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left|1 - n \cdot \frac{1}{2n} - 0\right| = \frac{1}{2}.$$

Karena ini berlaku untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n \geq \frac{1}{2}$ yang mana $\lim\limits_{n\to\infty} M_n \neq 0$. Menurut Toerema 2.5, f_n tidak konvergen seragam ke f.

(15) Misalkan $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2+x}{n}$ merupakan barisan fungsi pada interval tertutup $[a, b]$. Perhatikan bahwa

$$|f_n(x)| = \left|(-1)^n \frac{x^2+x}{n}\right| = \frac{|x^2+x|}{n}.$$

Karena $x^2 + x$ merupakan fungsi kontinu dan $[a, b]$ kompak, maka $x^2 + x$ mencapai nilai minimum dan maksimum di $[a, b]$. Misalkan p dan P berturut-turut menyatakan nilai minimum dan maksimum dari $x^2 + x$ di $[a, b]$, diperoleh $|x^2 + x| \leq \max\{|p|, |P|\} = Y$ untuk suatu $Y \geq 0$. Oleh karena itu,

$$|f_n(x)| = \frac{|x^2+x|}{n^2} \leq \frac{Y}{n^2}.$$

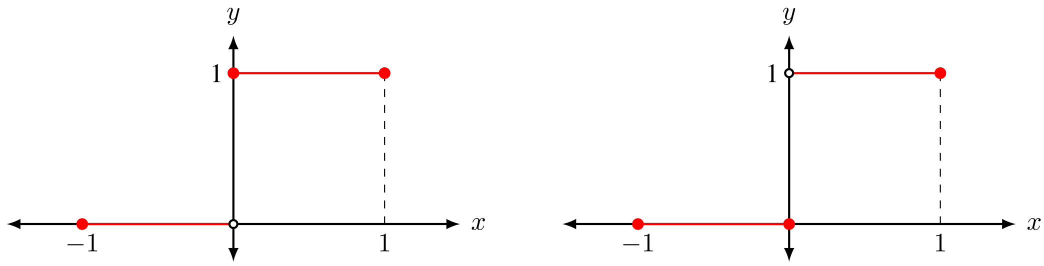
Dalam hal ini, $M_n = \frac{Y}{n^2}$ yang mana deret $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = Y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen. Menurut Teorema 2.7, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergen seragam pada $[a, b]$.

(16) Akan dibuktikan bahwa $f_n(x)$ konvergen titik demi titik dengan $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ di mana $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$. Perhatikan bahwa $f_n(0) = 0$ untuk setiap bilangan asli n sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Akan ditinjau untuk setiap $x \in (0,1]$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, dari properti Archimedes terdapat bilangan asli N yang memenuhi $\frac{x-\varepsilon}{x\varepsilon} < N$ atau ekivalen dengan $\frac{x}{1+Nx} < \varepsilon$. Untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{1+nx} - 0\right| = \frac{x}{1+nx} \leq \frac{x}{1+Nx} < \varepsilon$$

yang menunjukkan $f_n(x)$ konvergen ke $f(x)$, seperti yang ingin dibuktikan.

(17) Akan dibuktikan bahwa $\int_{-1}^{1} f \ \mathrm{d}g = 1$.



Akan dibuktikan $f \in \mathcal{RS}(g)[-1,1]$. Misalkan $\varepsilon > 0$ dan pilih partisi $P = \{x_0 = -1, x_1, x_2, \cdots, x_{2n} = 1\}$ dengan $x_k = -1 + \frac{k}{n}$ untuk setiap bilangan bulat k dengan $0 \le k \le 2n$. Jadi,

$$M_i(f) = \begin{cases} 0, & 1 \le i \le n-1 \\ 1, & n \le i \le 2n \end{cases}, \quad m_i(f) = \begin{cases} 0, & 1 \le i \le n \\ 1, & n+1 \le i \le 2n \end{cases}.$$

Ini berarti

$$U(f;g,P) = \sum_{i=1}^{2n} M_i(f)\Delta g_i = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(f)\Delta g_i + \sum_{i=n}^{2n} M_i(f)\Delta g_i = 0 + \sum_{i=n}^{2n} \Delta g_i = g(x_{2n}) - g(x_{n-1}) = 1,$$

$$L(f;g,P) = \sum_{i=1}^{2n} m_i(f)\Delta g_i = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta g_i + \sum_{i=n+1}^{2n} m_i(f)\Delta g_i = 0 + \sum_{i=n+1}^{2n} \Delta g_i = g(x_{2n}) - g(x_n) = 1.$$

Jadi, $U(f;g,P) - L(f;g,P) = 0 < \varepsilon$ sehingga terbukti. Ini berarti

$$\int_{-1}^{1} f \ \mathrm{d}g = \overline{\int_{-1}^{1}} f \ \mathrm{d}g = \inf_{P^*} U(f;g,P^*) \le U(f;g,P) = 1$$

dan

$$\int_{-1}^{1} f \ \mathrm{d}g = \underline{\int_{-1}^{1}} f \ \mathrm{d}g = \sup_{P^*} L(f;g,P^*) \ge L(f;g,P) = 1.$$

Jadi, $\int_{-1}^{1} f \ \mathrm{d}g = 1$.

Akan dibuktikan bahwa $\int_{-1}^{1} g \ \mathrm{d}f = 0$. Misalkan $\varepsilon > 0$, pilih partisi P yang sama dengan sebelumnya. Diperoleh

$$M_i(g) = \begin{cases} 0, & 1 \le i \le n \\ 1, & n+1 \le i \le 2n \end{cases}, \quad m_i(g) = \begin{cases} 0, & 1 \le i \le n+1 \\ 1, & n+2 \le i \le 2n \end{cases}.$$

Ini berarti

$$U(g;f,P) = \sum_{i=1}^{2n} M_i(g)\Delta f_i = \sum_{i=1}^{n} M_i(g)\Delta f_i + \sum_{i=n+1}^{2n} M_i(g)\Delta f_i = \sum_{i=n+1}^{2n} \Delta f_i = f(x_{2n}) - f(x_n) = 0,$$

$$L(g;f,P) = \sum_{i=1}^{2n} m_i(g)\Delta f_i = \sum_{i=1}^{n+1} m_i(g)\Delta f_i + \sum_{i=n+2}^{2n} m_i(g)\Delta f_i = \sum_{i=n+2}^{2n} \Delta f_i = f(x_{2n}) - f(x_{n+1}) = 0.$$

Jadi, $U(g;f,P) - L(g;f,P) = 0 < \varepsilon$ sehingga terbukti $g \in \mathcal{RS}(f)[-1,1]$. Dengan cara yang sama,

$$0 = L(g;f,P) \le \int_{-1}^{1} g \ \mathrm{d}f \le U(g;f,P) = 0 \implies \int_{-1}^{1} g \ \mathrm{d}f = 0.$$

(18) Akan dibuktikan f tidak terintegral Riemann pada $[0, \pi/2]$. Pilih $\varepsilon_0 = \pi/4$. Untuk sebarang partisi $P = \{x_0 = 0, x_1, x_2, \cdots, x_n = \pi/2\}$ dari $[0, \pi/2]$, perhatikan bahwa pada setiap interval $[x_i, x_{i+1}]$ mengandung bilangan irasional sehingga

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Selain itu, di setiap interval ini mengandung bilangan rasional sehingga pasti diperoleh

$$M_i(f) = \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t) = \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i]} \cos^2(t) = M_i(\cos^2 x).$$

Jadi,

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i(\cos^2 x)\Delta x_i = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

sehingga $U(f, P) - L(f, P) = \pi/4 \geq \varepsilon_0$ seperti yang ingin dibuktikan.

(19) Karena $f \in \mathcal{R}[-a,a]$, misalkan $\int_{-a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x = 2A$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat partisi $P_\varepsilon \in \mathcal{P}[-a,a]$ sehingga $|S(f,P) - 2A| < \varepsilon$ untuk setiap partisi $P = \{x_0, \cdots, x_n\}$ dengan $P_\varepsilon \subseteq P$. Dengan kata lain,

$$2\varepsilon > |S(f,P) - 2A| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i - 2A \right|, \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Akan dipilih

$$P = \{-x_n = -a, -x_{n-1}, \cdots, -x_1, 0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = a\}$$

dengan $P_\varepsilon \subseteq P$ sehingga $\varepsilon > |S(f,P) - 2A|$.

Akan dibuktikan bahwa $\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x = A$. Pilih $P'_\varepsilon = \{0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ dan misalkan Q dengan $P'_\varepsilon \subseteq Q = \{0, y_1, y_2, \cdots, y_m = a\}$. Konstruksi

$$Q' = Q \cup \{-Q\} = \{-a = -y_m, -y_{m-1}, \cdots, -y_1, y_0 = 0, y_1, \cdots, y_{m-1}, y_m\}$$

memenuhi $P_\varepsilon \subseteq P \subseteq Q' \implies P_\varepsilon \subseteq Q'$. Jadi,

$$\begin{aligned} 2\varepsilon > |S(f,Q') - 2A| &= \left| \sum_{i=1}^{m} f(-t_i)(y_i - y_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m} f(t_i)(y_i - y_{i-1}) - 2A \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{m} f(t_i)\Delta y_i + \sum_{i=1}^{m} f(t_i)\Delta y_i - 2A \right| \\ \implies \varepsilon &> \left| \sum_{i=1}^{m} f(t_i)\Delta y_i - A \right|, \quad t_i \in [y_{i-1}, y_i] \end{aligned}$$

Karena Q sebarang dengan $P'_\varepsilon \subseteq Q$, maka $f \in \mathcal{R}[0,a]$ dengan $\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x = A$ seperti yang ingin dibuktikan.

(20) Akan dibuktikan bahwa f_n tidak konvergen seragam. Perhatikan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ untuk $0 < x \leq 1$. Perhatikan bahwa

$$M_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{1+nx} - f(x)\right| = 1.$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 1 \neq 0$, maka f_n tidak konvergen seragam.

Solusi Alternatif. Pilih $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$. Perhatikan bahwa untuk setiap bilangan asli N, tinjau untuk $x = 1/N$ dan $m = 3N$, $n = N$ berlaku

$$|f_{3N}(1/N) - f_N(1/N)| = \frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \geq \varepsilon_0.$$

Jadi, (f_n) tidak konvergen seragam.