PERSIAPAN UAS PENGANTAR PERSAMAAN DIFERENSIAL

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Pada modul ini tidak akan diberikan bukti pada sifat-sifat yang akan digunakan. Disebut sebagai rangkuman juga tidak tepat karena banyak bagian yang dihilangkan, namun bagian yang disertakan hanya berfokus pada aplikasi model soal yang biasa digunakan dalam ujian Pengantar Persamaan Diferensial di UB.

1. Tranformasi Laplace

Diberikan fungsi $f(t)$ yang terdefinisi dan terintegralkan untuk $t > 0$. Transformasi Laplace dari f, dinotasikan $\mathcal{L}(f)$ atau $F(s)$, didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t.$$

Dari hal tersebut, invers dari transformasi Laplace dari $F(s)$ adalah $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$. Transformasi Laplace dari beberapa fungsi disajikan oleh tabel berikut.

$f(t)$	$t^n (n \in \mathbb{N})$	e^{at}	$\sin(at)$	$\cos(at)$	$\sinh(at)$	$\cosh(at)$
$F(s)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Persamaan Diferensial Biasa dapat diselesaikan dengan transformasi Laplace yang memerlukan sifat-sifat berikut.

Teorema 1.1 (Sifat Transformasi Laplace)**.**
Misalkan $\mathcal{L}(f) = F(s)$ dan $\mathcal{L}(g) = G(s)$. Maka berlaku sifat-sifat berikut:

(1) Berlaku sifat linearitas, yaitu jika $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

(2) Jika n bilangan asli,

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right) = s^n \mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

(3) Pergeseran sepanjang sumbu-s, yaitu

$$\mathcal{L}\Big(f(t)e^{at}\Big) = F(s-a).$$

(4) Berlaku

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}.$$

(5) Konvolusi, yaitu berlaku $\mathcal{L}(f * g) = F(s)G(s)$ di mana

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau.$$

Oleh karena itu, PDB yang melibatkan transformasi Laplace akan diberikan nilai-nilai $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$.

Date: Oktober 2024, `wildan-wicaksono.github.io`.

2. Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Dalam pembahasan ini akan diperkhusus sistem PDB homogen dua dimensi, yaitu dengan bentuk

$$\frac{dx}{dt} = Px + Qy, \quad \frac{dy}{dt} = Rx + Sy.$$

Adapun langkah-langkah menyelesaikannya adalah sebagai berikut.

(1) Tulis ulang sistem sebagai

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

dengan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$.

(2) Cari nilai eigen dari matriks A, misalkan λ_1 dan λ_2. Hal ini dapat ditentukan dengan menyelesaikan $\det(A - \lambda I_2) = 0$ dengan $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(3) Dari masing-masing nilai eigen, cari vektor eigen $\mathbf{k}_1$ dan $\mathbf{k}_2$ yang bersesuaian.

(4) Ada tiga kasus yang mungkin untuk penyelesaiannya:

(a) Jika λ_1, λ_2 bernilai real yang berbeda. Maka penyelesaiannya adalah

$$\mathbf{x} = C_1\mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{k}_2 e^{\lambda_2 t}.$$

(b) Jika λ_1, λ_2 bernilai real dengan $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Tentu vektor eigen dari masing-masing nilai eigen yang bersesuaian menghasilkan vektor eigen yang sama, yaitu $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. Namun, diperlukan langkah tambahan, yaitu menyelesaikan $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$ yang memenuhi

$$(A - \lambda I_2)\mathbf{l} = \mathbf{k}.$$

Maka penyelesaiannya

$$\mathbf{x} = C_1\mathbf{k}e^{\lambda t} + C_2\left(\mathbf{k}t + \mathbf{l}\right)e^{\lambda t}.$$

(c) Jika λ_1, λ_2 tidak bernilai real. Nyatakan $\mathbf{x} = \mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t}$ dalam bentuk $\mathbf{M} + i\mathbf{N}$, diperoleh solusinya adalah

$$\mathbf{x} = C_1\mathbf{M} + C_2\mathbf{N}.$$

(5) Substitusikan pada nilai awal yang diberikan.

3. Persamaan Diferensial Parsial: Metode Karakteristik

3.1. **Masalah Pertama.** Misalnya diberikan permasalahan

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = uc(x,t) + d(x,t), \quad u(x,t_0) = f(x).$$

Untuk menyelesaikannya dapat mengikuti langkah-langkah berikut.

(1) Tentukan persamaan karakteristik dengan syarat awal:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = a(x,t), \quad x(0,\tau) = \tau,$$
$$\frac{\partial t}{\partial s} = b(x,t), \quad t(0,\tau) = t_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = uc(s) + d(s), \quad u(0, \tau) = u(x, t_0) = f(\tau).$$

(2) Selesaikan sistem di atas.

(3) Ubahlah $u(s, \tau)$ menjadi $u(x, t)$.

Masalah Kedua. Misalnya diberikan permasalahan

$$a(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial t} = c(x, t, u), \quad u(x, t_0) = f(x).$$

(1) Tentukan persamaan karakteristik dengan syarat awal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= a(x, t, u), \quad x(0, \tau) = \tau, \\ \frac{\partial t}{\partial s} &= b(x, t, u), \quad y(0, \tau) = t_0, \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= c(x, t, u), \quad u(0, \tau) = f(\tau). \end{aligned}$$

(2) Selesaikan sistem di atas.

(3) Ubahlah $u(s, \tau)$ menjadi $u(x, t)$.

4. Latihan Soal

(1) (UAS 2021). Selesaikan masalah nilai awal berikut menggunakan Transformasi Laplace.

$$y'' + y = 8\cos(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

(2) (UAS 2022). Dengan menggunakan transformasi Laplace, selesaikanlah masalah nilai awal berikut:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2t = 3\cos(3t) - 11\sin(3t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$$

(3) (UAS 2023). Dengan menggunakan transformasi Laplace, selesaikan masalah nilai awal berikut:

$$y'' + y = \cos(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(4) (UAS Mat 2023). Selesaikan masalah nilai awal berikut menggunakan transformasi Laplace:

$$y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 4e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

(5) (UAS 2021). Tentukan solusi umum sistem persamaan diferensial biasa berikut ini.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + y. \end{aligned}$$

(6) (UAS 2022). Tentukan solusi sistem PDB berikut dengan nilai awal yang diberikan:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 2y, \quad x(0) = 1, \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + 5y, \quad y(0) = 0. \end{aligned}$$

(7) (UAS 2023). Diberikan sistem PDB orde 1 linear berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y,$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 3y.$$

Tentukan solusi dari sistem jika kondisi awal diberikan sebagai $x(0) = 1$ dan $y(0) = 2$.

(8) (UAS Mat 2023). Tentukan solusi umum sistem persamaan diferensial biasa berikut dengan menggunalan nilai eigen dan vektor eigen matriks koefisien dalam sistem PDB:

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2y.$$

(9) (UAS 2022). Dengan menggunakan metode karakteristik, tentukan solusi PDP berikut dengan syarat awal yang diberikan

$$\frac{\partial u}{\partial t} - t^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2u = 0, \quad u(x, 0) = \sin(x).$$

(10) (UTS Mat 2022). Tentukan solusi $u(x, t)$ untuk masalah nilai awal berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - t \frac{\partial u}{\partial x} = x, \quad u(x, 0) = \sin(x).$$

(11) (UTS Mat 2023). Tentukan solusi $u(x, t)$ untuk masalah nilai awal berikut dan buktikan bahwa solusi yang Anda peroleh benar.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t \frac{\partial u}{\partial x} = -2u, \quad u(x, 0) = e^x.$$

(12) (UTS Mat 2023). Tentukan solusi $u(x, t)$ untuk masalah nilai awal

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \le -\frac{1}{2} \\ -2x, & -\frac{1}{2} < x \le 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}.$$

(13) (UTS Mat 2023). Selesaikan PDP kuasi-linear dengan nilai awal sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 1 + x, & 0 < x < 1 \\ 2, & x \ge 1 \end{cases}.$$

5. Solusi

(1) Misalkan $\mathcal{L}(y(x)) = Y(s)$. Mengambil $\mathcal{L}$ pada kedua ruas,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(y'' + y\right) &= \mathcal{L}(8\cos x) \\
\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) &= 8\mathcal{L}(\cos x) \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) &= 8 \cdot \frac{s}{s^2+1} \\
\left(s^2+1\right)Y(s) - s + 1 &= \frac{8s}{s^2+1} \\
Y(s)\left(s^2+1\right) &= \frac{8s}{s^2+1} + (s-1) \\
Y(s) &= \frac{8s}{s^2+1} + \frac{s-1}{s^2+1} \\
&= \frac{8s}{\left(s^2+1\right)^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Dengan mengambil invers dari $\mathcal{L}$ kedua ruas,

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8s}{\left(s^2+1\right)^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right] \\
&= 8\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] \\
&= 8\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right] + \cos(x) - \sin(x).
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$. Misalkan $F(s) = \frac{s}{s^2+1}$ dan $G(s) = \frac{1}{s^2+1}$, ini berarti

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \cos(x), \quad g(x) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin(x).$$

Dari Teorema Konvolusi berlaku

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = f(x) * g(x) = \int_0^x f(\tau)g(x-\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_0^x \cos(\tau)\sin(x-\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

Menggunakan identtias $\cos(a)\sin(b) = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \cos(\tau)\sin(x-\tau)\ \mathrm{d}\tau &= \int_0^x \frac{\sin(x) - \sin(2\tau - x)}{2}\ \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\tau\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2\tau - x)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{2}\left[x\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x) - 0 - \frac{1}{2}\cos(-x)\right] \\
&= \frac{x\sin(x)}{2}.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$y(x) = 4x\sin(x) + \cos(x) - \sin(x).$$

Cek kembali!

(2) Tulis ulang persamaan sebagai $y'' + y' - 2t = 3\cos(3t) - 11\sin(3t)$ dengan $y(0) = 0$ dan $y'(0) = -6$. Misalkan $\mathcal{L}(y(x)) = Y(s)$. Mengambil $\mathcal{L}$ pada kedua ruas,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(y'' + y - 2t\right) &= \mathcal{L}(3\cos 3t - 11\sin 3t) \\
\mathcal{L}\left(y''\right) + \mathcal{L}(y') - 2\mathcal{L}(t) &= 3\mathcal{L}(\cos 3t) - 11\mathcal{L}(\sin 3t) \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) - \frac{2}{s^2} &= 3 \cdot \frac{s}{s^2+9} - 11 \cdot \frac{3}{s^2+9} \\
s^2Y(s) - 0 - 6 + sY(s) - \frac{2}{s^2} &= \frac{3s}{s^2+9} - \frac{33}{s^2+9} \\
\left(s^2+s\right)Y(s) - \frac{2}{s^2} - 6 &= \frac{3s}{s^2+9} - \frac{33}{s^2+9} \\
\left(s^2+s\right)Y(s) &= \frac{3s}{s^2+9} - \frac{33}{s^2+9} + \frac{2}{s^2} + 6 \\
Y(s) &= \frac{3}{\left(s^2+9\right)(s+1)} - \frac{33}{\left(s^2+9\right)\left(s^2+s\right)} + \frac{2}{s^2\left(s^2+s\right)} + \frac{6}{s^2+s}
\end{aligned}$$

Dengan mengambil $\mathcal{L}^{-1}$ kedua ruas,

$$y(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s^2+9\right)(s+1)}\right] - 33\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s^2+9\right)s(s+1)}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3(s+1)}\right] + 6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right].$$

Misalkan

$$\frac{1}{\left(s^2+9\right)(s+1)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{C}{s+1} = \frac{(A+C)s^2 + (A+B)s + (B+9C)}{(s+1)\left(s^2+9\right)}.$$

Jadi, $A + C = 0$, $A + B = 0$, dan $B + 9C = 1$. Diperoleh $B = \frac{1}{10}$, $C = \frac{1}{10}$, dan $A = -\frac{1}{10}$. Jadi,

$$\begin{aligned}
3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s^2+9\right)(s+1)}\right] &= 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{10}s + \frac{1}{10}}{s^2+9} + \frac{\frac{1}{10}}{s+1}\right] \\
&= -\frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] + \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] + \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\
&= -\frac{3}{10}\cos(3t) + \frac{1}{10}\sin(3t) + \frac{3}{10}e^{-t}.
\end{aligned}$$

Misalkan

$$\frac{1}{\left(s^2+9\right)s(s+1)} = \frac{Cs+D}{s^2+9} + \frac{E}{s} + \frac{F}{s+1} \implies 1 = (Cs+D)s(s+1) + E\left(s^2+9\right)(s+1) + Fs\left(s^2+9\right).$$

Untuk $s = 0$ berlaku $1 = 0 + E(9)(1) + 0$ sehingga $E = \frac{1}{9}$. Substitusi $s = -1$ berlaku $1 = 0 + 0 + F(-1)(10)$ sehingga $F = -\frac{1}{10}$. Substitusi $s = 1$ berlaku

$$1 = (C+D)(1)(2) + E(10)(2) + F(1)(10) = 2(C+D) + \frac{20}{9} - 1$$

sehingga $C + D = -\frac{1}{9}$. Untuk $s = -2$,

$$1 = (-2C+D)(-2)(-1) + E(13)(-1) + F(-2)(13) = 2(-2C+D) - 13E - 26F$$

sehingga $D - 2C = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{13}{9} - \frac{13}{5}\right) = -\frac{7}{90}$. Kurangkan,

$$(C+D) - (D-2C) = -\frac{1}{9} - \left(-\frac{7}{90}\right) = -\frac{3}{90} \implies C = -\frac{1}{90}.$$

Diperoleh $D = -\frac{1}{9} - C = -\frac{1}{10}$. Jadi,

$$33\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left(s^2+9\right)s(s+1)}\right] = 33\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{90}s - \frac{1}{10}}{s^2+9} + \frac{1}{9s} - \frac{1}{10(s+1)}\right]$$

$$= -\frac{33}{90}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] - \frac{33}{10}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] + \frac{33}{9}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{33}{10}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]$$
$$= -\frac{33}{90}\cos(3t) - \frac{11}{10}\sin(3t) + \frac{33}{9} - \frac{33}{10}e^{-t}.$$

Dengan cara yang sama,

$$\begin{aligned}
2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3\,(s+1)}\right] &= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}\right] \\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \\
&= 2\cdot\frac{t^2}{2!} - 2\cdot\frac{t}{1!} - 2e^{-t} + 2 \\
&= t^2 - 2t - 2e^{-t} + 2.
\end{aligned}$$

Terakhir,

$$\begin{aligned}
6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] &= 6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] \\
&= 6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \\
&= 6 - 6e^{-t}.
\end{aligned}$$

Diperoleh hasilnya adalah

$$y(t) = t^2 - 2t + \frac{38}{5}e^{-6} + \frac{6}{5}\sin(3t) + \frac{1}{15}\cos(3t) - \frac{23}{3}.$$

(3) Ambil $\mathcal{L}$ pada kedua ruas,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(y''+y\right) &= \mathcal{L}(\cos 2t)\\
\mathcal{L}(y'')+\mathcal{L}(y) &= \frac{s}{s^2+4}\\
s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s) &= \frac{s}{s^2+4}\\
s^2Y(s)-s-0+Y(s) &= \frac{s}{s^2+4}\\
\left(s^2+1\right)Y(s) &= \frac{s}{s^2+4}+s\\
Y(s) &= \frac{s}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}+\frac{s}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Dengan mengambil $\mathcal{L}^{-1}$ pada kedua ruas,

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right]+\cos(t).$$

Misalkan

$$\frac{s}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}=\frac{As+B}{s^2+4}+\frac{Cs+D}{s^2+1}=\frac{(As+B)\left(s^2+1\right)+(Cs+D)\left(s^2+4\right)}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}.$$

Didapatkan

$$s=(A+C)s^3+(B+D)s^2+(A+4C)s+(B+4D).$$

Ini berarti $A+C=0, B+D=0, A+4C=1$, dan $B+4D=0$ sehingga diperoleh $A=-\frac{1}{3}, B=0, C=\frac{1}{3}, D=0$. Jadi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}s}{s^2+1}-\frac{\frac{1}{3}s}{s^2+4}\right]\\
&= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]\\
&= \frac{1}{3}\cos(t)-\frac{1}{3}\cos(2t).
\end{aligned}$$

Jadi,

$$y(t)=\frac{1}{3}\cos(t)-\frac{1}{3}\cos(2t)+\cos(t)=\frac{4}{3}\cos(t)-\frac{1}{3}\cos(2t).$$

(4) Misalkan $\mathcal{L}\ y(t) = Y(s)$. Ambil transformasi Laplace di kedua ruas,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(4e^t\right) &= \mathcal{L}\left(y''' - 2y'' + 9y' - 18y\right) \\
4\mathcal{L}\left(e^t\right) &= \mathcal{L}\left(y'''\right) - \mathcal{L}\left(2y''\right) + \mathcal{L}\left(9y'\right) - \mathcal{L}(18y) \\
4 \cdot \frac{1}{s-1} &= \mathcal{L}\left(y'''\right) - 2\mathcal{L}\left(y''\right) + 9\mathcal{L}\left(y'\right) - 18\mathcal{L}(y) \\
\frac{4}{s-1} &= s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) - 2\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) \\
&\quad + 9\left(sY(s) - y(0)\right) - 18Y(s) \\
\frac{4}{s-1} &= s^3Y(s) - 1 - 2s^2Y(s) + 9sY(s) - 18Y(s) \\
\frac{4}{s-1} &= (s^3 - 2s^2 + 9s - 18)Y(s) - 1 \\
\left(s^3 - 2s^2 + 9s - 18\right)Y(s) &= \frac{4}{s-1} + 1 \\
Y(s) &= \frac{4 + s - 1}{(s-1)\left(s^3 - 2s^2 + 9s - 18\right)} \\
&= \frac{s+3}{(s-1)(s-2)\left(s^2+9\right)}.
\end{aligned}$$

Misalkan

$$\frac{s+3}{(s-1)(s-2)(s^2+9)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{Cs+D}{s^2+9}$$

di mana A, B, C, D suatu konstan. Dengan menyamakan penyebut,

$$s + 3 = A(s-2)\left(s^2+9\right) + B(s-1)\left(s^2+9\right) + (s-1)(s-2)(Cs+D)$$

untuk setiap s. Untuk $s = 1$ diperoleh

$$4 = A(-1)(10) + B(0)(10) + (0)(-1)(C+D) = -10A \iff A = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}.$$

Untuk $s = 2$,

$$5 = A(0)(13) + B(1)(13) + (1)(0)(2s+D) = 13B \iff B = \frac{5}{13}.$$

Untuk $s = 3$,

$$6 = A(1)(18) + B(2)(18) + (2)(1)(3C+D) = 18\left(-\frac{2}{5}\right) + 36\left(\frac{5}{13}\right)2 + (3C+D)$$

sehingga diperoleh $3C + D = -\frac{21}{65}$. Untuk $s = 0$,

$$3 = A(-2)(9) + B(-1)(9) + (-1)(-2)D = -18\left(-\frac{2}{5}\right) - 9\left(\frac{5}{!3}\right) + 2D$$

sehingga $D = -\frac{24}{65}$. Diperoleh

$$C = \frac{1}{3}\left(-\frac{21}{65} - D\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{21}{65} + \frac{24}{65}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{65} = \frac{1}{65}.$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
Y(s) &= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{5}{13} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{\frac{1}{65}s - \frac{24}{65}}{s^2+9} \\
&= -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{5}{13}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{1}{65}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) - \frac{8}{65}\left(\frac{3}{s^2+9}\right).
\end{aligned}$$

Ini berarti

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{s-1}\right)+\frac{5}{13}\left(\frac{1}{s-2}\right)+\frac{1}{65}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)-\frac{8}{65}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s-1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{13}\cdot\frac{1}{s-2}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{65}\cdot\frac{s}{s^2+9}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{65}\cdot\frac{3}{s^2+9}\right) \\
&= -\frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+\frac{5}{13}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)+\frac{1}{65}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)-\frac{8}{65}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) \\
&= \boxed{-\frac{2}{5}e^{t}+\frac{5}{13}e^{2t}+\frac{1}{5}\cos(3t)-\frac{8}{65}\sin(3t)}.
\end{aligned}$$

(5) Tulis sistem persamaan sebagai

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Misalkan λ nilai eigen dari A, maka

$$0 = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1).$$

Jadi, $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = -1$ (akar real berbeda). Vektor eigen $\mathbf{k}_1$ untuk nilai eigen $\lambda_1 = 4$ adalah

$$\mathbf{0} = (A - \lambda_1 I_2)\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \implies \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vektor eigen $\mathbf{k}_2$ untuk nilai eigen $\lambda_2 = -1$ adalah

$$\mathbf{0} = (A - \lambda_1 I_2)\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \implies \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jadi, solusi umumnya adalah

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}e^{4t} + C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t} = \begin{bmatrix} 3C_1e^{4t} + C_2e^{-t} \\ -2C_1e^{4t} + C_2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Diperoleh

$$x(t) = 3C_1e^{4t} + C_2e^{-t}, \quad y(t) = -2C_1e^{4t} + C_2e^{-t}$$

dengan C_1, C_2 suatu konstan.

(6) Tulis sistem persamaan sebagai

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Misalkan λ nilai eigen dari A, maka

$$0 = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Diperoleh $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (akar real kembar). Vektor eigen $\mathbf{k}$ untuk nilai eigen $\lambda = 3$ adalah

$$\mathbf{0} = (A - \lambda I_2)\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \implies \mathbf{k} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Diperlukan langkah tambahan, yaitu menyelesaikan $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ yang memenuhi

$$(A - \lambda I_2)\mathbf{l} = \mathbf{k} \implies \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Jadi,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{3t} + C_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}\right)e^{3t} = \begin{bmatrix} C_1e^{3t} + C_2(t+1)e^{3t} \\ C_1e^{3t} + C_2\left(t + \frac{3}{2}\right)e^{3t}. \end{bmatrix}$$

yang berarti

$$x(t) = C_1e^{3t} + C_2(t+1)e^{3t}, \quad y(t) = C_1e^{3t} + C_2\left(t + \frac{3}{2}\right)e^{3t}.$$

Substitusikan ke nilai awal,

$$1 = x(0) = C_1 + C_2, \quad 0 = y(0) = C_1 + \frac{3}{2}C_2.$$

Diperoleh $C_1 = 3$ dan $C_2 = -2$ sehingga diperoleh solusi akhirnya adalah

$$x(t) = 3e^{3t} - 2(t+1)e^{3t} = (1-2t)e^{3t}, \quad y(t) = 3e^{3t} - (2t+3)e^{3t} = -2te^{3t}.$$

(7) Tulis sistem persamaan sebagai

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Misalkan λ nilai eigen dari A, maka

$$0 = |A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 7 \implies \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-28}}{2} = \frac{5 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Diperoleh $\lambda_1 = \frac{5+i\sqrt{3}}{2}$ dan $\lambda_2 = \frac{5-i\sqrt{3}}{2}$ (akar tidak real). Akan (cukup) ditentukan vektor eigen $\mathbf{k}_1$ dari nilai eigen λ_1,

$$\mathbf{0} = (A - \lambda_1 I_2)\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \implies \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \mathbf{k}_1 e^{\lambda_1 t} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} e^{\frac{5+i\sqrt{3}}{2}t} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} e^{\frac{5t}{2}} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot i} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} e^{\frac{5t}{2}} \left(\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} + i\sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \begin{bmatrix} e^{\frac{5t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2}e^{\frac{5t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{5t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} e^{\frac{5t}{2}}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2}e^{\frac{5t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{5t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} e^{\frac{5t}{2}}\cos\frac{t\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2}e^{\frac{5t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} e^{\frac{5t}{2}}\sin\frac{t\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2}e^{\frac{5t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{5t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Substitusikan solusi awalnya,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ -\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix} \implies C_1 = 1, \quad C_2 = -\frac{5}{3}\sqrt{3}.$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{\frac{5t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{5}{3}\sqrt{3}e^{\frac{5t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\
y(t) &= -\frac{1}{2}e^{\frac{5t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{5}{6}\sqrt{3}e^{\frac{5t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{5}{2}e^{\frac{5t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 2e^{\frac{5t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{4}{3}\sqrt{3}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

(8) Sistem PDB dapat ditulis ulang sebagai

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

sehingga $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Misalkan nilai eigen A adalah λ, maka

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 1 \implies \lambda = 2 \pm i.$$

Vektor eigen $\mathbf{k}_1$ dari nilai eigen $\mathbf{k}_1$ adalah

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \implies \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Ini berarti

$$\mathbf{x} = e^{\lambda_1 t}\mathbf{k}_1 = e^{(2+i)t}\mathbf{u} = e^{2t}\Big(\cos(t) + i\sin(t)\Big)\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos(t) + ie^{2t}\sin(t) \\ -ie^{2t}\cos(t) + e^{2t}\sin(t) \end{bmatrix}$$

yang memberikan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e^{2t}\cos(t) \\ e^{2t}\sin(t) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} e^{2t}\sin(t) \\ -e^{2t}\cos(t) \end{bmatrix}$. Jadi, solusi umum untuk $\mathbf{x}$ adalah

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x} = C_1\begin{bmatrix} e^{2t}\cos(t) \\ e^{2t}\sin(t) \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} e^{2t}\sin(t) \\ -e^{2t}\cos(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1e^{2t}\cos(t) + C_2e^{2t}\sin(t) \\ C_1e^{2t}\sin(t) - C_2e^{2t}\cos(t) \end{bmatrix}.$$

Jadi, solusi umum untuk sistem PDB tersebut adalah

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{2t}\cos(t) + C_2e^{2t}\sin(t) \\ y(t) &= C_1e^{2t}\sin(t) - C_2e^{2t}\cos(t) \end{aligned}, \quad C_1, C_2 \text{ konstan.}$$

(9) Diberikan

$$\frac{\partial u}{\partial t} - t^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -2u, \quad u(x,0) = \sin(x).$$

Maka persamaan karakteristiknya adalah

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -t^2, \quad x(0,\tau) = \tau,$$
$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1, \quad t(0,\tau) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial s} = -2u, \quad u(0,\tau) = \sin(\tau).$$

Perhatikan bahwa $\frac{\partial t}{\partial s} = 1$ memberikan $t = s + C_1(\tau)$. Karena $t(0,\tau) = 0$, maka $0 = 0 + C_1(\tau) = C_1(\tau)$ sehingga diperoleh $t = s$. Dari

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -t^2 = -s^2 \implies x = -\frac{1}{3}s^3 + C_2(\tau).$$

Karena $x(0,\tau) = \tau$, maka

$$\tau = -\frac{1}{3} \cdot 0^3 + C_2(\tau) = C_2(\tau) \implies x(s,\tau) = -\frac{1}{3}s^3 + \tau.$$

Terakhir,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -2u \iff \frac{\partial u}{u} = -2\partial s$$

sehingga $\ln(u) = -2s + C_3(\tau) \implies u = e^{-2s}C_4(\tau)$ dengan $C_4(\tau) = e^{C_3(\tau)}$. Karena $u(0,\tau) = \sin(\tau)$, maka

$$\sin(\tau) = u(0,\tau) = C_4(\tau) \implies u(s,\tau) = \sin(\tau)e^{-2s}.$$

Perhatikan bahwa $s = t$ dan

$$x = -\frac{1}{3}s^3 + \tau = -\frac{1}{3}t^3 + \tau \implies \tau = x + \frac{1}{3}t^3.$$

Jadi, solusinya adalah

$$u(x,t) = \sin\left(x + \frac{t^3}{3}\right)e^{-2t}.$$

(10) Diberikan $\frac{\partial u}{\partial t} - t\frac{\partial u}{\partial x} = x$ dengan $u(x,0) = \sin(x)$. Diperoleh persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial s} &= -t, \quad x(0,\tau) = \tau \\ \frac{\partial t}{\partial s} &= 1, \quad t(0,\tau) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= x, \quad u(0,\tau) = \sin(\tau).\end{aligned}$$

Dari $\frac{\partial t}{\partial s} = 1$ memberikan $t(s,\tau) = s + C_1(\tau)$. Karena $t(0,\tau) = 0$, diperoleh $0 = t(s,\tau) = 0 + C_1(\tau) = C_1(\tau)$ sehingga $t = s$. Diperoleh

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -t = -s \implies x(s,\tau) = -\frac{1}{2}s^2 + C_2(\tau).$$

Karena $x(0,\tau) = \tau$,

$$\tau = x(0,\tau) = -0 + C_2(\tau) \implies x(s,\tau) = -\frac{1}{2}s^2 + \tau.$$

Terakhir,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = x = -\frac{1}{2}s^2 + \tau \implies u(s,\tau) = -\frac{1}{6}s^3 + s\tau + C_3(\tau).$$

Karena $u(0,\tau) = \sin(\tau)$, maka

$$\sin(\tau) = u(0,\tau) = -\frac{1}{6}\cdot 0 + 0\cdot\tau + C_3(\tau) = C_3(\tau)$$

dan diperoleh $u(s,\tau) = -\frac{1}{6}s^3 + s\tau + \sin(\tau)$. Tinjau $s = t$ dan

$$x = -\frac{1}{2}s^2 + \tau = -\frac{1}{2}t^2 + \tau \implies \tau = x + \frac{t^2}{2}.$$

Jadi, solusinya adalah

$$u(x,t) = -\frac{1}{6}t^3 + t\left(x + \frac{t^2}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{t^2}{2}\right) = tx + \frac{t^3}{3} + \sin\left(x + \frac{t^2}{2}\right).$$

(11) Diberikan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + t\frac{\partial u}{\partial x} = -2u, \quad u(x,0) = e^x.$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$\frac{\partial x}{\partial s} = t, \quad x(0,\tau) = \tau,$$
$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1, \quad t(0,\tau) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial s} = -2u, \quad u(0,\tau) = e^\tau.$$

Dari $\frac{\partial t}{\partial s} = 1$ memberikan $t(s,\tau) = s + C_1(\tau)$. Karena $t(0,\tau) = 0$, maka $0 = t(0,\tau) = 0 + C_1(\tau)$ sehingga $t = s$. Diperoleh

$$\frac{\partial x}{\partial s} = t = s \implies x(s,\tau) = \frac{1}{2}s^2 + C_2(\tau).$$

Karena $x(0,\tau) = \tau$, maka $\tau = 0 + C_2(\tau)$ sehingga $x = \frac{1}{2}s^2 + \tau$. Terakhir, perhatikan bahwa

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -2u \implies \frac{\partial u}{u} = -2\,\partial s \implies \ln(u) = -2s + C_3(\tau) \implies u(s,\tau) = e^{-2s}C_4(\tau)$$

dengan $C_4(\tau) = e^{C_3(\tau)}$. Karena $u(0,\tau) = e^\tau$, maka

$$e^\tau = u(0,\tau) = C_4(\tau) \implies u(s,\tau) = e^{-2s}e^\tau = e^{\tau-2s}.$$

Perhatikan bahwa $s = t$ dan

$$x = \frac{1}{2}s^2 + \tau = \frac{1}{2}t^2 + \tau \implies \tau = x - \frac{1}{2}t^2.$$

Diperoleh solusinya adalah

$$u(x,t) = e^{x-\frac{1}{2}t^2-2t}.$$

(12) Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -\frac{1}{2} \\ -2x, & -\frac{1}{2} < x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Diberikan persamaan diferensial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = f(x).$$

Diperoleh persamaan karakteristiknya adalah

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 4u, \quad x(0,\tau) = \tau,$$
$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1, \quad t(0,\tau) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0, \quad u(0,\tau) = f(\tau).$$

Dari $\frac{\partial t}{\partial s} = 1$ memberikan $t(s,\tau) = s + C_1(\tau)$. Karena $t(0,\tau) = 0$, maka $0 = t(0,\tau) = C_1(\tau)$ sehingga $t = s$. Dari $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ maka $u(s,\tau) = C_2(\tau)$. Karena $u(0,\tau) = f(\tau)$, maka

$$C_2(\tau) = u(0,\tau) = f(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \leq -\frac{1}{2} \\ -2\tau, & -\frac{1}{2} < \tau \leq 0 \\ 0, & \tau > 0 \end{cases}.$$

Ini memberikan

$$u(s,\tau) = C_2(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \leq -\frac{1}{2} \\ -2\tau, & -\frac{1}{2} < \tau \leq 0 \\ 0, & \tau > 0 \end{cases}.$$

Karena $\frac{\partial x}{\partial s} = 4u$, maka

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \begin{cases} 4, & \tau \leq -\frac{1}{2} \\ -8\tau, & -\frac{1}{2} < \tau \leq 0 \\ 0, & \tau > 0 \end{cases} \implies x(s,\tau) = \begin{cases} 4s + C_3(\tau), & \tau \leq -\frac{1}{2} \\ -8s\tau + C_4(\tau), & -\frac{1}{2} < \tau \leq 0 \\ C_5(\tau), & \tau > 0 \end{cases}.$$

Karena $x(0,\tau) = \tau$, ini memberikan $C_3(\tau) = C_4(\tau) = C_5(\tau) = \tau$. Jadi,

$$x(s,\tau) = \begin{cases} 4s + \tau, & \tau \leq -\frac{1}{2} \\ -8s\tau + \tau, & -\frac{1}{2} < \tau \leq 0 \\ \tau, & \tau > 0 \end{cases}.$$

Perhatikan bahwa $s = t$.

- Untuk $x = 4s + \tau = 4t + \tau$, maka $\tau = x - 4t$ dengan $x - 4t = \tau \leq -\frac{1}{2}$. Dengan kata lain, $x \leq 4t - \frac{1}{2}$.
- Untuk $x = -8s\tau + \tau = (1 - 8t)\tau$, maka $\tau = \frac{x}{1-8t}$ dengan $-\frac{1}{2} < \frac{x}{1-8t} \leq 0$ sehingga $4t - \frac{1}{2} < x \leq 0$.
- Untuk $x = \tau$, maka $\tau = x$ dengan $x = \tau > 0$.

Oleh karena itu,

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leq 4t - \frac{1}{2} \\ -\frac{2x}{1-8t}, & 4t - \frac{1}{2} < \tau \leq 0 \\ 0, & \tau > 0 \end{cases}.$$

(13) Misalkan $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1+x, & 0 < x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$. Diberikan persamaan diferensial

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = f(x).$$

Diperoleh persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= 2u, \quad x(0,\tau) = \tau, \\ \frac{\partial t}{\partial s} &= 1, \quad t(0,\tau) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= 0, \quad u(0,\tau) = f(\tau). \end{aligned}$$

Dari $\frac{\partial t}{\partial s} = 1$ memberikan $t = s + C_1(\tau)$. Karena $t(0,\tau) = 0$, maka $0 = t(0,\tau) = C_1(\tau)$ sehingga $t = s$. Karena $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$, maka $u(s,\tau) = C_2(\tau)$. Dari $u(0,\tau) = f(\tau)$ memberikan

$$C_4(\tau) = u(0,\tau) = f(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \leq 0 \\ 1+\tau, & 0 < \tau < 1 \\ 2, & \tau \geq 1 \end{cases} \implies u(s,\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \leq 0 \\ 1+\tau, & 0 < \tau < 1 \\ 2, & \tau \geq 1 \end{cases}.$$

Karena $\frac{\partial x}{\partial s} = 2u$, maka

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 2u = \begin{cases} 2, & \tau \leq 0 \\ 2+2\tau, & 0 < \tau < 1 \\ 4, & \tau \geq 1 \end{cases} \implies x(s,\tau) = \begin{cases} 2s + C_3(\tau), & \tau \leq 0 \\ 2s + 2s\tau + C_4(\tau), & 0 < \tau < 1 \\ 4s + C_5(\tau), & \tau \geq 1 \end{cases}.$$

Karena $x(0,\tau) = \tau$, maka $C_3(\tau) = C_4(\tau) = C_5(\tau) = \tau$. Perhatikan bahwa $t = s$ dan

$$x(s,\tau) = \begin{cases} 2s + \tau, & \tau \leq 0 \\ 2s + 2s\tau + \tau, & 0 < \tau < 1 \\ 4s + \tau, & \tau \geq 1 \end{cases}.$$

- Untuk $x = 2s + \tau = 2t + \tau$ diperoleh $\tau = x - 2t$ untuk $x - 2t = \tau \leq 0$. Jadi, $x \leq 2t$.
- Untuk $x = 2s + 2s\tau + \tau = 2t + (2t+1)\tau$ diperoleh $\tau = \frac{x-2t}{2t+1}$ dengan $0 < \tau = \frac{x-2t}{2t+1} < 1$ sehingga $2t < x < 4t + 1$.
- Untuk $x = 4s + \tau = 4t + \tau$ yang berarti $\tau = x - 4t$ dengan $x - 4t = \tau \geq 1$, yaitu $x \geq 4t + 1$.

Jadi,

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \leq 2t \\ 1 + \frac{x-2t}{2t+1}, & 2t < x < 4t+1 \\ 2, & \tau \geq 4t+1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \leq 2t \\ \frac{x+1}{2t+1}, & 2t < x < 4t+1 \\ 2, & \tau \geq 4t+1 \end{cases}.$$