PERSIAPAN UAS KALKULUS III

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Pada modul ini tidak akan diberikan bukti pada sifat-sifat yang akan digunakan. Disebut sebagai rangkuman juga tidak tepat karena banyak bagian yang dihilangkan, namun bagian yang disertakan hanya berfokus pada aplikasi model soal yang biasa digunakan dalam ujian Kalkulus III di UB.

1. Lintasan dan Permukaan Ekivalen

Definisi 1.1 (Lintasan Ekivalen)**.**
Diberikan fungsi lintasan $\phi_1 : [A, B] \to \mathbb{R}^n$ dan $\phi_2 : [C, D] \to \mathbb{R}^n$. Lintasan ϕ_1 dan ϕ_2 disebut *ekivalen* jika terdapat fungsi $h : [A, B] \to [C, D]$ yang bijektif dan $\phi_2 \circ h = \phi_1$. Jika h monoton naik (yaitu $h'(t) > 0$), maka ϕ_1 dan ϕ_2 memiliki orientasi yang sama. Sebaliknya, jika h monoton turun ($h'(t) < 0$) maka ϕ_1 dan ϕ_2 memiliki orientasi yang berbeda.

> **Note.** Dalam membuktikan dua lintasan tersebut ekivalen tidak cukup dengan gambar, melainkan harus berdasarkan Definisi 1.1.

Contoh 1.2. Diberikan fungsi lintasan $\phi_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dengan $\phi_1(t) = (\cos t, \sin t)$ dan $\phi_2 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ dengan $\phi_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$. Pilih $h : [0, \pi] \to [0, 2\pi]$ dengan $h(t) = 2t$. Akan dibuktikan bahwa h well-defined, misalkan $x_1, x_2 \in [0, \pi]$ dengan $x_1 = x_2$. Maka $h(x_1) = 2x_1 = 2x_2 = h(x_2)$ sehingga terbukti. Akan dibuktikan h injektif, cukup dibuktikan h monoton (naik atau turun). Karena $h'(t) = 2 > 0$ untuk setiap $t \in (0, \pi)$, maka h monoton naik sehingga h injektif. Akan dibuktikan h surjektif, ambil sebarang $k \in [0, 2\pi]$. Perhatikan bahwa $\frac{k}{2} \in [0, \pi]$ memenuhi $h\left(\frac{k}{2}\right) = 2\left(\frac{k}{2}\right) = k$ sehingga terbukti. Terakhir, akan dibuktikan $\phi_1 \circ h = \phi_2$. Perhatikan bahwa untuk setiap $t \in [0, \pi]$,

$$(\phi_1 \circ h)(t) = \phi_1(h(t)) = \phi_1(2t) = (\cos 2t, \sin 2t) = \phi_2(t)$$

seperti yang ingin dibuktikan.

Definisi 1.3 (Permukaan Ekivalen)**.**
Diberikan dua permukaan berparameter $\Phi_1 : R_1 \to \mathbb{R}^3$ dan $\Phi_2 : R_2 \to \mathbb{R}^3$ yang terdiferensial kontinu. Permukaan berparameter Φ_1 dan Φ_2 disebut *ekivalen* jika terdapat fungsi terdiferensial kontinu sepotong $h : R_1 \to R_2$ yang memenuhi kondisi h bijektif dan $\Phi_1 = \Phi_2 \circ h$. Jika $\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)} \geq 0$, maka Φ_1 dan Φ_2 memiliki orientasi searah. Jika $\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)} \leq 0$ permukaan Φ_1 dan Φ_2 memiliki orientasi yang berbeda.

2. Integral Fungsi Atas Lintasan

Definisi 2.1 (Integral Fungsi Skalar atas Lintasan)**.**
Misalkan suatu lintasan $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ dengan $\varphi(t) := \Big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\Big)$ merupakan fungsi lintasan yang

Date: Oktober 2024, `wildan-wicaksono.github.io`.

terdiferensial kontinu. Diketahui fungsi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan $f := f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ memenuhi $f \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu. Integral fungsi f atas lintasan φ didefinisikan sebagai

$$\int_\varphi f \text{ d}s = \int_a^b f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\| \text{ d}t.$$

Definisi 2.2 (Integral Fungsi Vektor atas Lintasan)**.**
iMisalkan suatu lintasan $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ dengan $\varphi(t) := \Big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\Big)$ merupakan fungsi lintasan yang terdiferensial kontinu. Diketahui fungsi $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dengan $\mathbf{F} := \mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ memenuhi $\mathbf{F} \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ merupakan fungsi kontinu. Integral fungsi f atas lintasan φ didefinisikan sebagai

$$\int_\varphi \mathbf{F} \cdot \text{d}\mathbf{S} = \int_\varphi \mathbf{F} \cdot (\text{d}x_1, \text{d}x_2, \dots, \text{d}x_n) = \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \text{ d}t.$$

Teorema 2.3 (Integral Fungsi pada Dua Lintasan Ekivalen)**.**
Diberikan C_1 dan C_2 merupakan dua lintasan yang ekivalen.

(1) *Integral fungsi skalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ atas lintasan C_1 dan C_2 selalu sama, yaitu*

$$\int_{C_1} f\ ds = \int_{C_2} f\ ds.$$

(2) *Integral fungsi vektor $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ atas lintasan C_1 dan C_2 nilainya bergantung orientasinya. Jika C_1, C_2 berorientasi sama,*

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Jika C_1, C_2 berorientasi berbeda,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Contoh 2.4. Diberikan fungsi lintasan $\phi : [0, 3] \to \mathbb{R}^3$ dengan $\phi(t) = (t, 2t, 3t)$. Akan ditentukan $\int_\phi yz \text{ d}s$. Diperoleh $\phi'(t) = (1, 2, 3)$ dan $f(\phi(t)) = 6t^2$. Selanjutnya,

$$\int_\phi yz \text{ d}s = \int_0^3 f(\phi(t)) \|\phi'(t)\| \text{ d}t = \int_0^3 6t^2\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \text{ d}t = 14 \int_0^3 6t^2 \text{ d}t = 14 \left[2t^3\right]_0^3 = 14 \cdot 54 = \boxed{756}.$$

Contoh 2.5. Misalkan $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2\big)$ dan C merupakan lintasan garis lurus di $\mathbb{R}^3$ dari $(0, 0, 0)$ ke $(1, 0, 0)$. Akan ditentukan $\int_C \mathbf{F} \cdot \text{d}\mathbf{S}$. Parameterisasi lintasan tersebut dengan $\phi(t) = (t, 0, 0)$ dengan $0 \le t \le 1$, diperoleh $\phi'(t) = (1, 0, 0)$ sehingga $\|\phi'(t)\| = 1$. Diperoleh

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\text{d}\mathbf{S} = \int_0^1 \mathbf{F}(\phi(t))\cdot\phi(t)\text{d}t = \int_0^1 \mathbf{F}(t, 0, 0)\cdot(1, 0, 0) \text{ d}t = \int_0^1 \big(3t^2, 0, 0\big)\cdot(1, 0, 0) \text{ d}t = \int_0^1 3t^2 \text{ d}t = \left[t^3\right]_0^1 = \boxed{1}.$$

3. Integral Fungsi Atas Permukaan

Suatu permukaan S diparameterisasi dengan fungsi $\Phi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^3$, tulis

$$\Phi(u, v) = \Big(\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)\Big), \quad \Phi_i : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}.$$

Vektor $\mathbf{t}_u$ dan $\mathbf{t}_v$ didefinisikan dengan

$$\mathbf{t}_u = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\right), \quad \mathbf{t}_v = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\right).$$

Vektor normal dari permukaan S dapat ditentukan dengan $\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$. Vektor $\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$ bisa jadi searah atau berbeda dengan arah vektor permukaan, bergantung terhadap parameterisasi Φ yang dilakukan.

Definisi 3.1 (Integral Fungsi Skalar atas Permukaan)**.**
Fungsi $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ di mana $D \subseteq \mathbb{R}^2$ adalah permukaan berparameter dengan $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ dan $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu yang didefinisikan pada permukaan $\Phi(D)$. Integral fungsi f atas permukaan $\Phi(D) = S$ didefinisikan sebagai

$$\iint_{\Phi} f \, \mathrm{d}s = \iint_{\Phi} f(x, y, z) \, \mathrm{d}S = \iint_{D} f\left(\Phi(u, v)\right) \|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Definisi 3.2 (Luas Permukaan)**.**
Misalkan $\Phi : A \to \mathbb{R}^3$ dimana $A \subseteq \mathbb{R}^2$ adalah permukaan berparameter yang terdiferensial kontinu, maka kuantitas

$$\mathcal{A} = \iint_{A} \|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

adalah luas permukaan dari permukaan Φ.

Definisi 3.3 (Integral Fungsi Vektor atas Permukaan)**.**
Misalkan $\Phi : D \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ adalah permukaan berparameter dan $\mathbf{F}(x, y, z)$ adalah medan vektor kontinu yang didefinisikan pada permukaan $\Phi(D) = S$. Integral medan vektor $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ atas Φ didefinisikan sebagai

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{D} \mathbf{F}(\Phi(u, v)) \cdot (\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Teorema 3.4 (Integral Fungsi pada Dua Permukaan Ekivalen)**.**
Diberikan S_1 dan S_2 dua permukaan yang ekivalen.

(1) Integral fungsi skalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ atas permukaan S_1 dan S_2 selalu sama, yaitu

$$\iint_{S_1} f \, ds = \iint_{S_2} f \, ds.$$

(2) Integral fungsi vektor $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ atas permukaan S_1 dan S_2 bergantung orientasinya. Jika S_1, S_2 berorientasi searah,

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Jika S_1, S_2 berorientasi berbeda,

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Note. Penting dalam menentukan integral fungsi vektor atas permukaan untuk memperhatikan arah vektor $\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$ karena bisa saja searah maupun berbeda arah. Jika kesulitan meninjau arah vektor tersebut secara langsung, lihat dari vektor unit

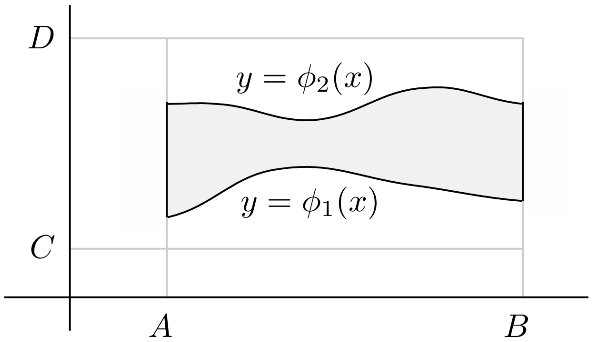
$$\frac{\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\|}.$$

4. Teorema Pengintegralan

Definisi 4.1 (Daerah Tipe I/II/III)**.**

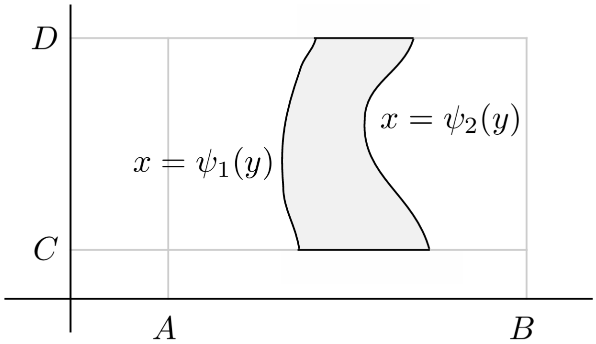
(a) Diberikan fungsi kontinu $\phi_1 : [A, B] \to \mathbb{R}$ dan $\phi_2 : [A, B] \to \mathbb{R}$ di interval $[A, B]$ dan $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ untuk setiap $x \in [A, B]$. *Daerah elementer tipe pertama* merupakan himpunan

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [A, B], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}.$$



(b) Diberikan fungsi kontinu $\psi_1 : [C, D] \to \mathbb{R}$ dan $\psi_2 : [C, D] \to \mathbb{R}$ di interval $[C, D]$ dan $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ untuk setiap $y \in [C, D]$. Daerah elementer tipe kedua merupakan himpunan

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [C, D], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$



(c) Daerah elementer tipe ketiga merupakan daerah yang merupakan tipe pertama sekaligus tipe kedua.

Teorema 4.2 (Green)**.**
Misalkan D daerah tipe ketiga dan ∂D menyatakan pembatas (boundary) untuk D yang berorientasi positif. Diberikan pula fungsi $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, maka

$$\int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA.$$

Teorema 4.3 (Stokes)**.**
Misalkan $S \subseteq \mathbb{R}^3$ permukaan berparameter $\Phi : R \to \mathbb{R}^3$ dengan berorientasi positif. Jika medan vektor $\mathbf{F}$ terdiferensial kontinu di S dan S dibatasi oleh kurva C, maka

$$\int_C F \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Teorema 4.4 (Gauss)**.**
Misalkan $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ruang tertutup dan S merupakan batas permukaan dari V. Jika S memiliki vektor normal ke arah luar permukaan dan $\mathbf{F}$ terdiferensial kontinu pada V, maka
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV.$$

5. Latihan Soal

(1) (UAS 2020). Tentukan $\iint_S f \text{ d}S$ jika diberikan $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ dan permukaan S adalah bagian tabung $x^2 + y^2 = 4$ antara bidang $z = 0$ dan $z = 3$.

(2) (UAS 2021). Periksa apakah kasus berikut memenuhi Teorema Green jika $P(x,y) = x + y$ dan $Q(x,y) = y$ dengan C berupa lingkaran dengan pusat $(0,0)$ dan jari-jari 1.

(3) (UAS 2022). Misalkan G adalah hemisphere bagian atas $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, dengan vektor normal keluar permukaan. Hitunglah
$$\iint_G F(x,y,z) \cdot \text{d}S,$$
dengan $F(x,y,z) = (2y, 3x, -z^2)$.

(4) (UAS 2023). Diketahui kurva berupa lingkaran di $\mathbb{R}^2$ dengan jari-jari sama dengan 1 dan berpusat di titik $(0,0)$.
   (a) Cari dua lintasan ϕ_1 dan ϕ_2 yang merepresentasikan lingkaran tersebut. Buktikan bahwa dua lintasan yang Anda cari ekivalen.
   (b) Diketahui $\mathbf{F}(x,y) = (-y, x)$. Hitung $\int\limits_{\phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ dan $\int\limits_{\phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

(5) (UAS 2022). Jika kurva C adalah kurva yang diberikan oleh $x = e^t, y = e^{-t}, z = e^{2t}$ dengan $0 \leq t \leq 1$, hitunglah
$$\int_C xz \text{ d}x + (y+z) \text{ d}y + x \text{ d}z.$$

(6) (Kuis 2023). Misalkan $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2\right)$ dan C merupakan lintasan garis lurus di $\mathbb{R}^3$ dari $(0,0,0)$ ke $(1,0,0)$ ke $(1,1,0)$ ke $(1,1,1)$. Hitung $\int_C \mathbf{F} \cdot \text{d}\mathbf{S}$.

(7) (UAS 2023). Diketahui fungsi $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$ dan permukaan S merupakan bagian kerucut $z^2 = x^2 + y^2$ yang dibatasi oleh $z = 1$ dan $z = 2$ dengan vektor normal mengarah keluar dari kerucut. Hitunglah $\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

(8) (UAS 2023). Diketahui sebuah permukaan dengan permukaan $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$.
   (a) Carilah parameterisasi dari permukaan tersebut.
   (b) Gunakan jawaban nomor a untuk mencari luas permukaannya.

(9) Misalkan S menyatakan permukaan paraboloida yang memiliki persamaan $z = x^2 + y^2$ untuk $z \leq 2$. Tentukan luas permukaan S.

(10) (UAS 2023). Verivikasi teorema Gauss jika diketahui $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ dan V adalah daerah yang dibatasi oleh silinder $x^2 + y^2 = 9$ dan bidang $z = 0, z = 3$.

(11) (UAR 2024/C). Diberikan lintasan C merupakan busur seperempat lingkaran dengan jari-jari 4 dan dapat ditentukan dengan parameter $(x,y) = (4\cos t, 4\sin t)$ untuk $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
   (a) Tentukan parameterisasi lain yang ekivalen dengan lintasan C.

(b) Mengunakan bagian (a), hitunglah nilai

$$\int_C \left(x^2 - y^2\right) \, \mathrm{d}s.$$

(12) (UAR 2024/C). Diketahui lintasan C berupa garis lurus dari $(0,0)$ ke $(2,0)$, ke $(3,1)$, ke $(3,3)$, dan kembali ke $(0,0)$. Jika $\mathbf{F}(x,y) := \left(x^2+y^2, xy\right)$, tentukan

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

(13) (UAR 2024/C). Diberikan $O = (0,0,0), A = (2,0,0), B = (0,3,0)$, dan $C = (0,0,5)$. Diketahui S_1, S_2, S_3, dan S_4 berturut-turut menyatakan permukaan segitiga OAC, OBC, OAB, dan ABC dengan vektor normal mengarah keluar. Jika $S := S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, tentukan

$$\iint_S \left(x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2\right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

6. Solusi

(1) Parameterisasi permukaan S sebagai $\phi(u,v) = (2\cos u, 2\sin u, v)$ dengan $0 \le u \le 2\pi$ dan $0 \le v \le 3$.

Diperoleh

$$\mathbf{t}_u = (-2\sin u, 2\cos u, 0), \quad \mathbf{t}_v = (0,0,1).$$

Ini berarti

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2\sin u & 2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2\cos u, 2\sin u, 0)$$

sehingga diperoleh

$$\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\| = \sqrt{(2\cos u)^2 + (2\sin u)^2 + 0^2} = \sqrt{4\cos^2(u) + 4\sin^2(u)} = 2.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \iint_S f \, \mathrm{d}S &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} f(u\cos v, u\sin v, v)\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(4\cos^2(u) + 4\sin^2(u) + v^2\right)(2) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= 2\int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(4 + v^2\right) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= 2\int_0^3 \left[4u + uv^2\right]_0^{2\pi} \, \mathrm{d}v \\ &= 2\int_0^3 \left(8\pi + 2\pi v^2\right) \, \mathrm{d}v \\ &= 2\left[8\pi v + \frac{2\pi}{3}v^3\right]_0^3 \\ &= 2\,(24\pi + 18\pi) \\ &= \boxed{84\pi}. \end{aligned}$$

(2) Akan ditentukan nilai dari $\int_C P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y$ dengan dua cara.

Parameterisasi lintasan C dengan $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ dengna $0 \leq t \leq 2\pi$. Perhatikan bahwa $x = \cos(t) \implies \mathrm{d}x = -\sin(t) \, \mathrm{d}t$ dan $y = \sin(t) \implies \mathrm{d}y = \cos(t) \, \mathrm{d}t$. Diperoleh

$$\begin{aligned}\int_C (x+y) \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \Big((\cos t + \sin t)(-\sin t) + \sin(t)\cos t \Big) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t) - 1}{2} \, \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\frac{1}{2}\sin(2t) - t}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

Akan diperiksa dengan Teorema Green. Perhatikan bahwa

$$\int_C P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y) \, \mathrm{d}A = \iint_D (0-1) \, \mathrm{d}y = -\iint_D \, \mathrm{d}A$$

di mana D adalah daerah yang dibatasi C. Dengan kata lain, D merupakan daerah lingkaran. Mengonversi ke koordinat polar,

$$\iint_D \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r \, \mathrm{d}r = [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^1 = \pi.$$

Jadi,

$$\int_C (x+y) \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y = -\iint_D \mathrm{d}A = -\pi$$

dan diperoleh hasil yang sama.

(3) Misalkan suatu parameterisasi permukaan

$$\Phi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \mapsto (3 \sin u \cos v, 3 \sin u \sin v, 3 \cos u)$$

diperoleh

$$\mathbf{t_u} = (3 \cos u \cos v, 3 \cos u \sin v, -3 \sin u) \quad \text{dan} \quad \mathbf{t_v} = (-3 \sin u \sin v, 3 \sin u \cos v, 0)$$

sehingga

$$\mathbf{t_u} \times \mathbf{t_v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 \cos u \cos v & 3 \cos u \sin v & -3 \sin u \\ -3 \sin u \sin v & 3 \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \left(9 \sin^2(u) \cos(v), 9 \sin^2(u) \sin(v), 9 \cos(u) \sin(u)\right)$$

yang berarti vektor normalnya mengarah keluar permukaann. Integral medan vektor F atas permukaan Φ adalah

$$\begin{aligned}\iint_\Phi F\, d\mathbf{S} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} F(3 \sin u \cos v, 3 \sin u \sin v, 3 \cos u) \cdot \left(9 \sin^2 u \cos v, 9 \sin^2 u \sin v, 9 \cos u \sin u\right)\, dv\, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (6 \sin u \sin v, 9 \sin u \cos v, -9 \cos^2 u) \cdot \left(9 \sin^2 u \cos v, 9 \sin^2 u \sin v, 9 \cos u \sin u\right)\, dv\, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 135 \sin^3 u \sin v \cos v - 81 \cos^3 u \sin u\, dv\, du\end{aligned}$$

Tinjau $\sin(v)\cos(v) = \frac{1}{2}\sin(2v)$, maka

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 135 \sin^3(u) \sin(v) \cos(v)\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}u = \frac{135}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(u)\ \mathrm{d}u \int_0^{2\pi} \sin(2v)\ \mathrm{d}v.$$

karena $\int_0^{2\pi} \sin(2v)\ \mathrm{d}v = \left[-\frac{1}{2}\cos(2v)\right]_0^{2\pi} = \frac{\cos(4\pi) - \cos(0)}{2} = 0$, diperoleh

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 135 \sin^3(u) \sin(v) \cos(v)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = 0.$$

Jadi,

$$\iint_\Phi F \cdot \mathbf{dS} = -81 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos^3(u) \sin(u)\ \mathrm{d}v\ \mathrm{d}u = -162\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(u) \sin(u)\ \mathrm{d}u.$$

Misalkan $p = \cos(u)$, maka $\mathrm{d}p = -\sin(u)\ \mathrm{d}u$ sehingga

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(u) \sin(u)\ \mathrm{d}u = \int_1^0 p^3 (-\mathrm{d}p) = \int_0^1 p^3\ \mathrm{d}p = \frac{1}{4}.$$

Jadi, nilai yang diminta adalah $-162\pi \cdot \frac{1}{4} = \boxed{-\frac{81}{2}\pi}$.

(4) (a) Tinjau $\phi_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dan $\phi_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ dengan

$$\phi_1(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad \text{dan} \quad \phi_2(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Akan dibuktikan bahwa ϕ_1 dan ϕ_2 ekivalen. Pandang $f : [0, 1] \to [0, 2\pi]$ dengan $f(t) = 2\pi t$. Akan dibuktikan f *well-defined*. Ambil sebarang $t_1, t_2 \in [0, 1]$ sedemikian sehingga $t_1 = t_2$, tinjau

$$f(t_1) = 2\pi t_1 = 2\pi t_2 = f(t_2) \implies f(t_1) = f(t_2).$$

Perhatikan bahwa $f'(t) = 2\pi > 0$ untuk setiap $t \in (0, 1)$, ini artinya f monoton naik tegas di interval $[0, 1]$ yang menunjukkan bahwa f injektif di interval tersebut. Karena f' ada di setiap $t \in [0, 1]$, maka f kontinu di $[0, 1]$ yang menunjukkan f surjektif di interval tersebut. Kemudian, $\phi_1 \circ t : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ dan untuk setiap $t \in [0, 1]$ berlaku

$$(\phi_1 \circ f)(t) = \phi_1(f(t)) = \phi_1(2\pi t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) = \phi_2(t).$$

Karena berlaku untuk sebarang $t \in [0, 1]$, maka $\phi_1 \circ t = \phi_2$. Jadi, terbukti ϕ_1 dan ϕ_2 ekuivalen.

(b) Tinjau $f'(t) > 0$ (sebagaimana pada bagian a) yang berarti ϕ_1 dan ϕ_2 lintasan ekivalen dengan orientasi searah, hal ini berakibat

$$\begin{aligned}
\int_{\phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\phi_1(t)) \cdot \phi_1'(t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\ dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1\ dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

Catatan. Hasil pada bagian (b) diperoleh bergantung pada lintasan yang dibuat dan hasilnya 2π atau -2π. Apabila parameterisasi lintasan ϕ_1 dan ϕ_2 ekivalen namun memiliki orientasi yang berbeda, maka hasil yang diperoleh 2π dan yang lainnya -2π. Kemungkinan lainnya, jika ϕ_1 dan ϕ_2 memiliki orientasi yang searah memungkinkan juga memberikan jawaban -2π.

(5) Perhatikan bahwa $\mathrm{d}x = e^t, \mathrm{d}y = -e^{-t}$, dan $\mathrm{d}z = 2e^{2t}$. Ini berarti

$$\begin{aligned}
\int_C xz \ \mathrm{d}x + (y+z) \ \mathrm{d}y + x \ \mathrm{d}z &= \int_0^1 e^t \cdot e^{2t} \cdot e^t \ \mathrm{d}t + \left(e^{-t} + e^{2t}\right)\left(-e^{-t}\right) \ \mathrm{d}t + e^t \cdot 2e^{2t} \ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(e^{4t} - e^{-2t} - e^t + 2e^{3t}\right) \ \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{4}e^{4t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^t + \frac{2}{3}e^{3t}\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{2e^2} - e + \frac{2}{3}e^3\right] - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{2}{3}\right] \\
&= \boxed{\frac{1}{4}e^4 + \frac{2}{3}e^3 - e + \frac{1}{2e^2} - \frac{5}{12}}.
\end{aligned}$$

(6) Misalkan ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 berturut-turut menyatakan lintasan garis dari $(0,0,0)$ ke $(1,0,0)$, $(1,0,0)$ ke $(1,1,0)$, dan $(1,1,0)$ ke $(1,1,1)$. Parameterisasi $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ dengan

$$\phi_1(t) = (t,0,0), \quad \phi_2(t) = (1,t,0), \quad \phi_3(t) = (1,1,t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Maka $C = \phi_1 \cup \phi_2 \cup \phi_3$ yang mana ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 disjoin kecuali di titik ujung. Diperoleh

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}.$$

Akan ditentukan $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$. Perhatikan bahwa $\phi_1'(t) = (1,0,0)$, maka

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\phi_1(t)) \cdot \phi_1'(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathbf{F}(t,0,0) \cdot (1,0,0)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(3t^2,0,0\right) \cdot (1,0,0)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 3t^2\ \mathrm{d}t = \left[t^3\right]_0^1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Akan ditentukan $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$. Perhatikan bahwa $\phi_2'(t) = (0,1,0)$, maka

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\phi_2(t)) \cdot \phi_2'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathbf{F}(1,t,0) \cdot (0,1,0)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (3+6t,0,0) \cdot (0,1,0)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 0\ \mathrm{d}t \\ &= 0.\end{aligned}$$

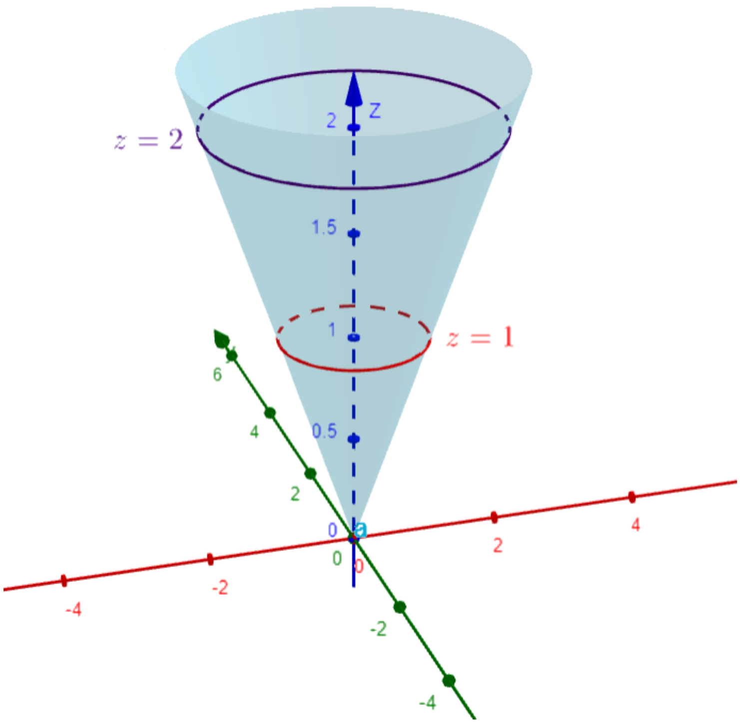
Akan ditentukan $\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}$. Perhatikan bahwa $\phi_3'(t) = (0,0,1)$, maka

$$\begin{aligned}\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\phi_3(t)) \cdot \phi_3'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathbf{F}(1,1,t) \cdot (0,0,1)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(9,-14t,20t^2\right) \cdot (0,0,1)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 20t^2\ \mathrm{d}t = \left[\frac{20}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{20}{3}.\end{aligned}$$

Jadi, $\int\limits_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \boxed{\frac{23}{3}}$.

(7) Untuk setiap $(x, y, z) \in S$, parameterisasi titik-titik tersebut dengan

$$(x, y, z) = \phi(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), u), \quad \phi : [1, 2] \times [0, 2\pi].$$



Perhatikan bahwa

$$\mathbf{t}_u = (\cos(v), \sin(v), 1) \quad \text{dan} \quad \mathbf{t}_v = (-u\sin(v), u\cos(v), 0).$$

Dari sini diperoleh

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 1 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{vmatrix} = \left(-u\cos(v), -u\sin(v), u\cos^2(v) + u\sin^2(v)\right) = (-u\cos(v), -u\sin(v), u).$$

Oleh karena itu, vektor normal satuan dari permukaan tersebut berdasarkan parameterisasi tersebut adalah

$$\frac{\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\|} = \frac{(-u\cos(v), -u\sin(v), u)}{\sqrt{u^2\cos^2(v) + u^2\sin^2(v) + u^2}} = \left(-\frac{\cos(v)}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin(v)}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

yang berarti mengarah ke dalam kerucut. Karena vektor normal S mengarah keluar dari kerucut, maka $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int_\phi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Didapatkan

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= -\int_\phi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathbf{F}(\phi(u, v)) \cdot (\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v)\, du\, dv \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathbf{F}\left(u\cos(v), u\sin(v), u\right) \cdot (-u\cos(v), -u\sin(v), u)\, du\, dv \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(u^2\cos^2(v), u^2\sin^2(v), u^2\right)\cdot(-u\cos(v), -u\sin(v), u)\ du\ dv \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 -u^3\cos^3(v) - u^3\sin^3(v) + u^3\ du\ dv \\
&= -\int_0^{2\pi}\left[-\frac{u^4}{4}\cos^3(v) - \frac{u^4}{4}\sin^3(v) + \frac{u^4}{4}\right]_{u=1}^{u=2}\ dv \\
&= -\frac{15}{4}\int_0^{2\pi}\left(-\cos^3(v) - \sin^3(v) + 1\right)\ dv.
\end{aligned}
$$

Akan ditentukan $\int_0^{2\pi}\cos^3(v)\ dv$ dan $\int_0^{2\pi}\sin^3(v)\ dv$. Tinjau $\int_0^{2\pi}\cos^3(v)\ dv = \int_0^{\pi}\cos^3(v)\ dv + \int_{\pi}^{2\pi}\cos^3(v)\ dv$. Misalkan $v = a+\pi \iff y = v-\pi$, maka $dv = da$ sehingga diperoleh

$$\int_{\pi}^{2\pi}\cos^3(v)\ dv = \int_0^{\pi}\cos^3(a+\pi)\ da = \int_0^{\pi}(-\cos(a))^3\ dy = -\int_0^{\pi}\cos^3(a)\ da = -\int_0^{\pi}\cos^3(v)\ dv.$$

Ini berarti

$$\int_0^{2\pi}\cos^3(v) = \int_0^{\pi}\cos^3(v)\ dv + \int_{\pi}^{2\pi}\cos^3(v)\ dv = \int_0^{\pi}\cos^3(v) - \int_0^{\pi}\cos^3(v)\ dv = 0.$$

Akan ditentukan $\int_0^{2\pi}\sin^3(v)\ dv = \int_0^{\pi}\sin^3(v)\ dv + \int_{\pi}^{2\pi}\sin^3(v)\ dv$. Dengan cara yang sama sebagaimana sebelumnya,

$$\int_{\pi}^{2\pi}\sin^3(v)\ dv = \int_0^{\pi}\sin^3(b+\pi)\ d(b+\pi) = \int_0^{\pi}(-\sin(b))^3\ db = -\int_0^{\pi}\sin^3(b)\ db = -\int_0^{\pi}\sin^3(v)\ dv$$

sehingga dapat diperoleh $\int_0^{2\pi}\sin^3(v)\ dv = 0$. Jadi,

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{15}{4}\left(-\int_0^{2\pi}\cos^3(v)\ dv - \int_0^{2\pi}\sin^3(v)\ dv + \int_0^{2\pi}\ dv\right) = -\frac{15}{4}(-0-0+2\pi) = \boxed{-\frac{15\pi}{2}}.$$

Alternatif Solusi. Nilai dari $\int_0^{2\pi}\cos^3(v)\ dv$ dan $\int_0^{2\pi}\sin^3(v)\ dv$ dapat ditentukan dengan menentukan $\int\cos^3(v)\ dv$ dan $\int\sin^3(v)\ dv$ menggunakan identitas berikut:

$$
\begin{aligned}
\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) &\iff \cos^3(x) = \frac{3\cos(x)+\cos(3x)}{4} \\
\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) &\iff \sin^3(x) = \frac{3\sin(x)-\sin(3x)}{4}.
\end{aligned}
$$

Identitas tersebut dapat dibuktikan sebagaimana berikut:

$$
\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\
&= \left(2\cos^2(x)-1\right)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\cdot\sin(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\
&= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\left(1-\cos^2(x)\right)\cos(x)
\end{aligned}
$$

$$= 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x) + 2\cos^3(x)$$

$$= 4\cos^3(x) - 3\cos(x).$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan untuk $\sin(3x)$.

(8) (a) Tinjau untuk

$$(x,y,z)=\phi(u,v)=(3\cos(u)\sin(v),3\sin(u)\sin(v),3\cos(v)),\quad \phi:[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

merupakan parameterisasi untuk permukaan tersebut karena

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=9\cos^2(u)\sin^2(v)+9\sin^2(u)\sin^2(v)+9\cos^2(v)\\&=9\sin^2(v)\left(\cos^2(u)+\sin^2(u)\right)+9\cos^2(v)\\&=9\sin^2(v)+9\cos^2(v)\\&=9.\end{aligned}$$

(b) Tinjau

$$\mathbf{t}_u=(-3\sin(u)\sin(v),3\cos(u)\sin(v),0)\quad\text{dan}\quad\mathbf{t}_v=(3\cos(u)\cos(v),3\sin(u)\cos(v),-3\sin(v)).$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v&=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-3\sin(u)\sin(v)&3\cos(u)\sin(v)&0\\3\cos(u)\cos(v)&3\sin(u)\cos(v)&-3\sin(v)\end{vmatrix}\\&=\left(-9\cos(u)\sin^2(v),-9\sin(u)\sin^2(v),-9\sin^2(u)\sin(v)\cos(v)-9\cos^2(u)\sin(v)\cos(v)\right)\\&=(-9\cos(u)\sin^2(v),-9\sin(u)\sin^2(v),-9\sin(v)\cos(v)).\end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}\|\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v\|&=\sqrt{81\cos^2(u)\sin^4(v)+81\sin^2(u)\sin^4(v)+81\sin^2(v)\cos^2(v)}\\&=9\sqrt{\sin^4(v)\left(\cos^2(u)+\sin^2(u)\right)+\sin^2(v)\cos^2(v)}\\&=9\sqrt{\sin^4(v)+\sin^2(v)\cos^2(v)}\\&=9\sqrt{\sin^2(v)\left(\sin^2(v)+\cos^2(v)\right)}\\&=9\sqrt{\sin^2(v)}\\&=9|\sin(v)|=9\sin(v)\end{aligned}$$

karena untuk setiap $v\in[0,\pi]$ berlaku $\sin(v)\geq 0$. Diperoleh luas permukaannya adalah

$$\int_S dS=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\|\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v\|\,du\,dv=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}9\sin(v)\,du\,dv=\int_0^{\pi}18\pi\sin(v)\,dv=18\pi[-\cos(v)]_{v=0}^{v=\pi}$$

sehingga diperoleh hasilnya $18\pi(-\cos(\pi)+\cos(0))=18\pi(1+1)=\boxed{36\pi}$.

(9) Parameterisasi $(x, y, z) = \big(u\cos v, u\sin v, u^2\big)$ dengan $0 \le u \le \sqrt{2}$ dan $0 \le v \le 2\pi$. Diperoleh

$$\mathbf{t}_u = (\cos v, \sin v, 2u), \quad \mathbf{t}_v = (-u\sin v, u\cos v, 0).$$

Luas permukaan S ditentukan oleh

$$\iint_S \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Ini memberikan

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \big(-2u^2\cos v, 2u^2\sin v, u\big)$$

sehingga

$$\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\| = \sqrt{4u^4\cos^2(v) + 4u^4\sin^2(v) + u^2} = u\sqrt{4u^2+1}.$$

Ini berarti

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} u\sqrt{4u^2+1} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} u\sqrt{4u^2+1} \, \mathrm{d}u.$$

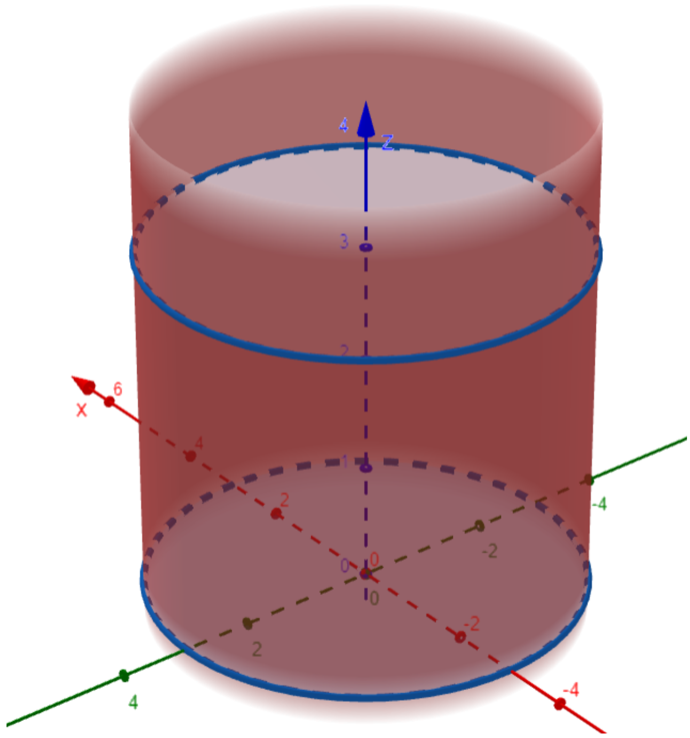
Misalkan $p = 4u^2 + 1$, maka $\mathrm{d}p = 8u \, \mathrm{d}u$. Ini memberikan

$$\iint_S \mathrm{d}S = \int_0^{\sqrt{2}} u\sqrt{4u^2+1} \, \mathrm{d}u = \int_1^9 \frac{1}{8}\sqrt{p} \, \mathrm{d}p = \left[\frac{1}{12}p^{3/2}\right]_1^9 = \frac{27-1}{12} = \boxed{\frac{13}{6}}.$$

(10) Misalkan:

- S_1 merupakan permukaan alas silinder, yaitu $x^2 + y^2 = 9$ di bidang $z = 0$,
- S_2 merupakan selimut silinder yang dibatasi oleh $z = 0$ dan $z = 3$,
- S_3 merupakan permukaan tutup slinider, yaitu $x^2 + y^2 = 9$ di bidang $z = 3$.

Asumsikan vektor normal masing-masing permukaan S_1, S_2, S_3 mengarah keluar, akan dibuktikan bahwa $\int\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV$ di mana $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.



Tinjau $\int\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int\limits_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

- Akan ditentukan $\int\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$. Untuk setiap $(x, y, z) \in S_1$, parameterisasi $(x, y, z) = \phi_1(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), 0)$ di mana $\phi_1 : [0, 3] \times [0, 2\pi]$. Diperoleh $\mathbf{t}_u = (\cos(v), \sin(v), 0)$ dan $\mathbf{t}_v = (-u\sin(v), u\cos(v), 0)$, maka

$$\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 0 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, u\cos^2(v) + u\sin^2(v)\right) = (0, 0, u)$$

sehingga

$$\frac{\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v\|} = \frac{(0, 0, u)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + u^2}} = \frac{(0, 0, u)}{\sqrt{u^2}} = \frac{(0, 0, u)}{|u|} = (0, 0, 1)$$

karena $|u| = u$ untuk $u \in [0, 3]$. Jadi, vektor normalnya mengarah ke dalam silinder. Maka

$$\int\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int\limits_{\phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^3 \mathbf{F}(\phi_1(u, v)) \cdot (\mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v)\, du\, dv$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^3 (u\cos(v), u\sin(v), 0) \cdot (0, 0, u)\, du\, dv = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^3 0 + 0 + 0\, du\, dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 0\ du\ dv = 0.$$

- Akan ditentukan $\int_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$. Untuk setiap $(x,y,z)\in S_2$, parameterisasi $(x,y,z)=\phi_2(u,v)=(3\cos(u),3\sin(u),v)$ dengan $\phi_2:[0,2\pi]\times[0,3]$. Diperoleh $\mathbf{t}_u=(-3\sin(u),3\cos(u),0)$ dan $\mathbf{t}_v=(0,0,1)$ sehingga

$$\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -3\sin(u) & 3\cos(u) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(3\cos(u),3\sin(u),0)$$

sehingga diperoleh $\frac{\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v\|}=\frac{(3\cos(u),3\sin(u),0)}{\sqrt{9\cos^2(u)+9\sin^2(u)+0}}=(\cos(u),\sin(u),0)$ yang berarti vektor normalnya mengarah keluar silinder. Maka

$$\begin{aligned}\int_{S_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\int_{\phi_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}&=\int_0^{2\pi}\int_0^3 \mathbf{F}(\phi_2(u,v))\cdot(\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v)\ du\ dv\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^3 (3\cos(u),3\sin(u),v)\cdot(3\cos(u),3\sin(u),0)\ du\ dv\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^3 9\cos^2(u)+9\sin^2(u)+0\ du\ dv\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^3 9\ du\ dv\\
&=9(2\pi)(3)=54\pi.\end{aligned}$$

- Akan ditentukan $\int_{S_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$. Untuk setiap $(x,y,z)\in S_3$, parameterisasi $(x,y,z)=\phi_3(u,v)=(u\cos(v),u\sin(v),3)$ dengan $\phi_3:[0,3]\times[0,2\pi]$. Diperoleh $\mathbf{t}_u=(\cos(v),\sin(v),0)$ dan $\mathbf{t}_v=(-u\sin(v),u\cos(v),0)$, maka

$$\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \cos(v) & \sin(v) & 0\\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0\end{vmatrix}=\left(0,0,u\cos^2(v)+u\sin^2(v)\right)=(0,0,u)$$

sehingga

$$\frac{\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v}{\|\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v\|}=\frac{(0,0,u)}{\sqrt{0^2+0^2+u^2}}=\frac{(0,0,u)}{\sqrt{u^2}}=\frac{(0,0,u)}{|u|}=(0,0,1)$$

karena $|u|=u$ untuk $u\in[0,3]$. Jadi, vektor normalnya mengarah ke luar silinder. Maka

$$\begin{aligned}\int_{S_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=-\int_{\phi_3}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}&=\int_0^{2\pi}\int_0^3 \mathbf{F}(\phi_3(u,v))\cdot(\mathbf{t}_u\times\mathbf{t}_v)\ du\ dv\\
&=-\int_0^{2\pi}\int_0^3 (u\cos(v),u\sin(v),3)\cdot(0,0,u)\ du\ dv=\int_0^{2\pi}\int_0^3 0+0+3u\ du\ dv\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^3 3u\ du\ dv=\int_0^{2\pi}\left[\frac{3u^2}{2}\right]_{u=0}^{u=3} dv\end{aligned}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{27}{2} = 27\pi.$$

Diperoleh bahwa $\int\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0 + 54\pi + 27\pi = 81\pi$. Karena vektor normal masing-masing permukaan, menurut teorema Gauss berlaku

$$\int\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z \right) dV = 3 \iiint\limits_V dV = 3 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 81\pi$$

yang mana sesuai. Nilai dari $\iiint\limits_V dV$ menyatakan volume silinder dengan tinggi 3 dan jari-jari alas 3. Apabila vektor normal masing-masing permukaan mengarah ke dalam silinder, dengan parameterisasi yang sama berlaku

$$\int\limits_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\limits_{\phi_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad \int\limits_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int\limits_{\phi_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad \int\limits_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\int\limits_{\phi_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

sehingga $\int\limits_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0 - 54\pi - 27\pi = -81\pi$. Karena masing-masing permukaan mengarah ke dalam silinder, menurut teorema Gauss berlaku

$$\int\limits_S \mathbf{F} = -\iiint\limits_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = -\iiint 3\, dV = -3 \iiint dV = -81\pi$$

yang mana juga sesuai.

(11) (a) Parameterisasi di soal dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\psi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (4\cos t, 4\sin t)\,.\end{aligned}$$

Parameterisasi lain dapat dimisalkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\phi : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (4\cos 2t, 4\sin 2t)\,.\end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa lintasan ϕ dan ψ ekivalen dengan fungsi $h(t)$ well-defined, terdiferensial kontinu di $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, monoton naik tegas, dan $h\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Tinjau fungsi $h : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dimana $h(t) = 2t$. Perhatikan bahwa $h'(t) = 2 > 0$ untuk $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sehingga h monoton naik tegas di $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ serta terdiferensial kontinu di $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Selanjutnya ambil sembarang $k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, perhatikan bahwa $\frac{k}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ memenuhi $h\left(\frac{k}{2}\right) = k$. Ini artinya untuk setiap $k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ terdapat $t = \frac{k}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sehingga memenuhi $h(t) = k$ yang berarti h surjektif. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\phi = \psi \circ h : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$. Perhatikan

$$(\psi \circ h)(t) = \psi(h(t)) = \psi(2t) = (4\cos 2t, 4\sin 2t) = \phi(t)$$

sehingga terbukti bahwa ϕ dan ψ ekivalen.

(b) Diperoleh $\phi'(t) = (-8\sin 2t, 8\cos t)$ dan $\|\phi'(t)\| = \left\|(-8\sin 2t)^2 + (8\cos t)^2\right\| = 8$ sehingga integral dapat dihitung dengan

$$\begin{aligned}\int_C \left(x^2 - y^2\right)\, \mathrm{d}s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((4\cos 2t)^2 - (4\sin 2t)^2\right) 8\ \mathrm{d}t \\ &= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} 16(\cos^2 2t - \sin^2 2t)\ \mathrm{d}t \\ &= 128\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4t\ \mathrm{d}t \\ &= 128\left[\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \boxed{0}.\end{aligned}$$

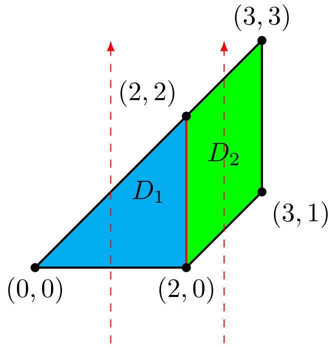
(12) Perhatikan bahwa

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s = \int_C (x^2 + y^2)\ \mathrm{d}x + xy\ \mathrm{d}y.$$

Misalkan $P(x,y) = x^2 + y^2$ dan $Q(x,y) = xy$. Karena C berorientasi positif, menurut Teorema Green berlaku

$$\int_C P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y = \iint_D (Q_x - P_y)\ \mathrm{d}A = \iint_D (y - 2y)\ \mathrm{d}A = -\iint_D y\ \mathrm{d}A$$

di mana D adalah daerah yang dibatasi C. Untuk menghitung pengintegralan tersebut, bagi daerah D menjadi dua bagian, yaitu D_1 dan D_2.



Ini berarti

$$\iint_D y\ \mathrm{d}A = \iint_{D_1} y\ \mathrm{d}A + \iint_{D_2} y\ \mathrm{d}A.$$

- Akan ditentukan $\iint_{D_1} y\ \mathrm{d}A$ dengan $\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$. Persamaan garis yang melalui $(0,0)$ dan $(2,2)$ adalah $y = x$. Dari arah y, yaitu dari bawah ke atas akan diperoleh batas untuk y adalah $0 \le y \le x$. Diperoleh batas untuk x adalah $0 \le x \le 2$. Diperoleh
$$\iint_{D_1} y\ \mathrm{d}A = \int_0^2 \int_0^x y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$
- Akan ditentukan $\iint_{D_2} y\ \mathrm{d}A$ dengan $\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$. Persamaan garis yang melalui $(2,2)$ dan $(3,3)$ adalah $y = x$, sedangkan persamaan garis yang melalui $(2,0)$ dan $(3,1)$ adalah $y = x - 2$. Dari arah y, diperoleh batas untuk y adalah $x - 2 \le y \le x$ dengan $2 \le x \le 3$. Jadi,
$$\iint_{D_2} y\ \mathrm{d}A = \int_2^3 \int_{x-2}^x y\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_2^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x-2}^x = \int_2^3 \frac{4x-4}{2}\ \mathrm{d}x = \left[x^2 - 2x\right]_2^3 = 3.$$

Jadi,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}s = -\iint_D y\ \mathrm{d}A = -\left(\frac{4}{3} + 3\right) = \boxed{-\frac{13}{3}}.$$

(13) Misalkan V menyatakan ruang yang dibatasi oleh S. Ini berarti

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\ \mathrm{d}V = \iiint_V (2x + 2y + 2z)\ dV.$$

Akan dipilih $\mathrm{d}V$ sebagai $\mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$. Akan ditinjau untuk batas z, ditinjau dari bawah ke atas. Diperoleh batas untuk z adalah $0 \leq z \leq \frac{30-15x-10y}{6}$. Akan ditinjau untuk batas y dengan memerhatikan pada bidang XY, diperoleh batas y adalah $0 \leq y \leq \frac{6-3x}{2}$. Terakhir, batas untuk x adalah $0 \leq x \leq 2$. Jadi,

$$\iiint_V (2x + 2y + 2z)\ \mathrm{d}V = \int_0^2 \int_0^{\frac{6-3x}{2}} \int_0^{\frac{30-15x-10y}{6}} (2x + 2y + 2z)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z.$$

Perhatikan bahwa

$$\int_0^{\frac{30-15x-10y}{6}} (2x + 2y + 2z)\ \mathrm{d}z = \left[2xz + 2yz + z^2\right]_0^{\frac{30-15x-10y}{6}} = \frac{5x^2}{9} - 15x - \frac{5}{9}y^2 - \frac{20}{3}y + 25.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{6-3x}{2}} \left(\frac{5x^2}{9} - 15x - \frac{5}{9}y^2 - \frac{20}{3}y + 25\right)\ \mathrm{d}y &= \left[\frac{5x^2y}{4} - 15xy - \frac{5}{27}y^3 - \frac{10y^2}{3} + 25y\right]_0^{\frac{6-3x}{2}} \\ &= -\frac{5x^3}{4} + 15x^2 - 45x + 40.\end{aligned}$$

Terakhir,

$$\int_0^2 \left(-\frac{5x^3}{4} + 15x^2 - 45x + 40\right)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{5x^4}{16} + 5x^3 - \frac{45}{2}x^2 + 40x\right]_0^2 = \boxed{25}.$$