Kompetisi Sains Nasional Jenjang SMA/MA Sederajat Tingkat Kota/Kabupaten Tahun 2021

Muhammad Jilan Wicaksono

Reswara Anargya Dzakirullah

Wildan Bagus Wicaksono

Updated 7 Juni 2021

Catatan

Saran, koreksi, maupun kritik dapat dikirimkan melalui `wildanarteji@gmail.com`. *Special thanks* kepada Audrey Felicio Anwar yang telah menyumbangkan solusinya untuk nomor 9 Kemampuan Lanjut.

Daftar Isi

§1 Soal

§1.1 Kemampuan Dasar

Terdiri dari 10 soal. Setiap soal yang dijawab benar bernilai 2 poin dan tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab (kosong).

1. Misalkan $u_1, u_2, u_3, \cdots$ barisan aritmetika dengan suku-suku real positif. Jika $\dfrac{u_1+u_2}{u_3} = \dfrac{11}{21}$, maka nilai $\dfrac{u_2+u_3}{u_1}$ adalah . . . .

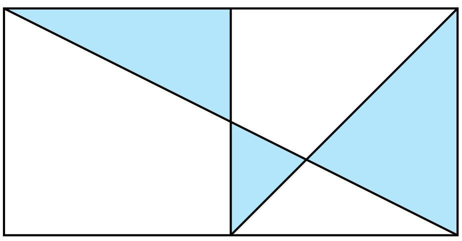
2. Koefisien x^7 dari penjabaran
$$(1+x)\left(2+x^2\right)\left(3+x^3\right)\left(4+x^4\right)\left(5+x^5\right)$$
adalah . . . .

3. Diberikan bilangan bulat positif A dan Bbila dibagi 5 berturut-turut bersisa 2 dan 3. Sisa pembagian $A(A+1)+5B$ jika dibagi 25 adalah . . . .

4. Diberikan fungsi f terdefinisi di semua bilangan real x selain 0 dan 1, memenuhi
$$(x+1)f(-x) + \frac{1-x}{4x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{100\left(x^2+4\right)}{x}.$$
Nilai dari $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(400)$ adalah . . . .

5. Diketahui ada 6 pasang suami-isteri. Dari keenam pasangan tersebut akan dipilih 6 orang secara acak. Banyaknya cara untuk memilih 6 orang tersebut sehingga paling banyak terdapat sepasang suami-isteri adalah . . . .

6. Pada gambar ini sebuah persegi panjang dibagi menjadi dua buah persegi yang panjang sisinya 6 cm. Luas total daerah yang diarsir adalah . . . cm^2.



7. Bilangan $1, 2, 3, \cdots, 999$ digit-digitnya disusun membentuk angka baru m dengan menuliskan semua digit bilangan-bilangan asli tadi dari kiri ke kanan. Jadi,
$$m = 12345\cdots998999.$$
Jumlah digit ke-2021, ke-2022, dan ke-2023 dari m adalah . . . .

8. Pada suatu lingkaran dengan jari-jari r, terdapat segiempat talibusur $ABCD$ dengan $AB = 8$ dan $CD = 5$. Sisi AB dan DC diperpanjang dan berpotongan di luar lingkaran di titik P. Jika $\angle APD = 60^\circ$ dan $BP = 6$, maka nilai r^2 adalah . . . .

9. Bilangan asli n dikatakan *menarik* jika terdapat suku banyak (polinom) dengan koefisien bulat $P(x)$ sehingga $P(7) = 2021$ dan $P(n) = 2045$. Banyaknya bilangan **prima** *menarik* adalah . . . .

10. Diketahui segitiga ABC dengan $AB > AC$. Garis bagi sudut BAC memotong BC di titik D. Titik E dan F berturut-turut terletak pada sisi AC dan AB sehingga DE sejajar AB dan DF sejajar AC. Lingkaran luar segitiga BCE memotong sisi AB di titik K. Jika luas segitiga CDE adalah 75 dan luas segitiga DEF adalah 85, maka luas segiempat $DEKF$ adalah . . . .

§1.2 Kemampuan Lanjut

1. Jika $a > 1$ suatu bilangan asli sehingga hasil penjumlahan semua bilangan riil x yang memenuhi persamaan
$$\lfloor x \rfloor^2 - 2ax + a = 0$$
adalah p, maka a adalah . . . .

2. Diketahui bilangan real $a, b,$ dan c memenuhi ketaksamaan $\left|ax^2 + bx + c\right| \leq 1$ untuk setiap bilangan riil x dengan $0 \leq x \leq 1$. Nilai maksimum yang mungkin dari $23a + 22b + 21c$ adalah . . . .

3. Diketahui dua digit terakhir dari a^{777} adalah 77, maka dua digit terkahir dari a adalah . . . .

4. Bilangan asli ganjil b terbesar sehingga barisan bilangan asli $a_n = n^2 + 19n + b$ memenuhi
$$\gcd(a_n, a_{n+1}) = \gcd(a_{n+2}, a_{n+1})$$
untuk setiap bilangan asli n adalah . . . .

5. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 6, BC = 7,$ dan $CA = 8$. TJika I adalah titik potong ketiga garis bagi segitiga ABC, maka AI^2 adalah . . . .

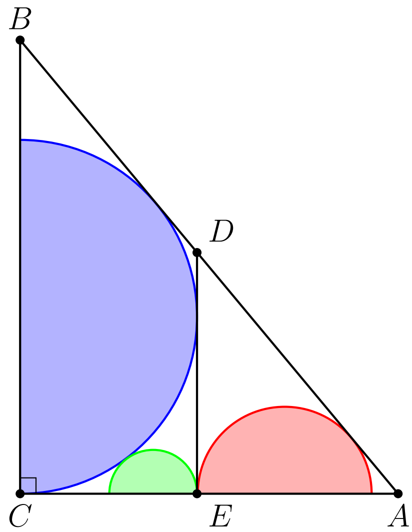
6. Diberikan $x, y,$ dan n bilangan asli yang memenuhi
$$x^2 + (y + 2)x + (n + 1)y = n^2 + 252.$$
Nilai y terbesar yang mungkin adalah . . . .

7. Banyaknya barisan ternary (sukunya $0, 1,$ atau 2) yang memuat 15 suku, memuat tepat lima angka 0 dan setiap di antara dua angka 0 ada paling sedikit dua suku bukan 0 adalah . . . .

8. Banyak fungsi (pemetaan) dari $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ke $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ dengan 9 dan 10 memiliki prapeta, yaitu ada x dan y di A sehingga $f(x) = 9$ dan $f(y) = 10$ adalah . . . .

9. Suatu papan catur berukuran 109×21 akan dipasangi beberapa ubin berukuran 3×1. Berapa ubin terbanyak yang bisa dipasang pada papan sehingga tidak ada dua ubin yang bertumpuk atau bersentuhan (bersentuhan pada titik sudut ubin juga tidak diperbolehkan)?

10. Diberikan segitiga siku-siku ABC dengan $\angle C = 90°$. Titik D terletak pada sisi AB dan E terletak pada sisi AC sehingga DE sejajar dengan garis BC. Diketahui setengah lingkaran berwarna biru, merah, hijau sedemikian sehingga setengah lingkaran biru menyinggung AC dan AB, setengah lingkaran merah menyinggung sisi AB dan garis DE, dan setengah lingkaran hijau menyinggung setengah lingkaran biru dan DE (perhatikan gambar berikut). Jika $2AC + 5BC = 5AB$, maka perbandingan jari-jari setengah lingkaran merah dan setengah lingkaran hijau adalah $k : 25$. Nilai k adalah . . . .



§2 Soal dan Solusi

§2.1 Kemampuan Dasar

Terdiri dari 10 soal. Setiap soal yang dijawab benar bernilai 2 poin dan tidak ada pengurangan untuk soal yang dijawab salah atau tidak dijawab (kosong).

1. Misalkan $u_1, u_2, u_3, \cdots$ barisan aritmetika dengan suku-suku real positif. Jika $|fracu_1 + u_2 u_3 = \frac{11}{21}$, maka nilai $\frac{u_2 + u_3}{u_1}$ adalah . . . .

   Jawab: 95

   Misalkan $u_n = a + (n-1)b$. Maka

   $$\frac{11}{21} = \frac{a+a+b}{a+2b} = \frac{2a+b}{a+2b} \implies 11a + 22b = 42a + 21b \iff b = 31a.$$

   Maka
   $$\frac{u_2+u_3}{u_1} = \frac{a+b+a+2b}{a} = \frac{2a+3b}{a} = 2 + \frac{3b}{a} = 2 + 3 \cdot 31 = \boxed{95}.$$

2. Koefisien x^7 dari penjabaran

   $$(1+x)\left(2+x^2\right)\left(3+x^3\right)\left(4+x^4\right)\left(5+x^5\right)$$

   adalah . . . .

   Jawab: 37

   Cara 1. Kuli,

   $$\prod_{i=1}^{5}\left(1+x^i\right) = x^{15}+x^{14}+2x^{13}+5x^{12}+7x^{11}+15x^{10}+19x^9+30x^8+\boxed{37}x^7+59x^6+\cdots+120.$$

   Cara 2. Koefisien x^7 dapat diperoleh dari

   $$x^5 \cdot x^2 = x^4 \cdot x^3 = x^4 \cdot x^2 \cdot x.$$

   Maka koefisien x^7 adalah

   $$1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 12 + 10 + 15 = \boxed{37}.$$

3. Diberikan bilangan bulat positif A dan Bbila dibagi 5 berturut-turut bersisa 2 dan 3. Sisa pembagian $A(A+1)+5B$ jika dibagi 25 adalah . . . .

   Jawab: 21

   Misalkan $A = 5x+2$ dan $B = 5y+3$ dengan $x, y \in \mathbb{N}_0$. Maka

   $$A(A+1)+5B = (5x+2)(5x+3)+5(5y+3) = 25x^2+25x+6+25y+15 = 25\left(x^2+x+y\right)+21.$$

   Maka sisanya jika dibagi 25 adalah $\boxed{21}$.

4. Diberikan fungsi f terdefinisi di semua bilangan real x selain 0 dan 1, memenuhi
$$(x+1)f(-x)+\frac{1-x}{4x}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{100\left(x^2+4\right)}{x}.$$
Nilai dari $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(400)$ adalah . . . .

Jawab: 399

Persamaan ekuivalen dengan
$$4(x+1)f(-x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f\left(\frac{1}{x}\right)=400x+\frac{1600}{x}. \tag{1}$$
Subtitusi $x:=-\frac{1}{x}$ pada (1):
$$4\left(-\frac{1}{x}+1\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+(-x-1)f\left(-x\right)=-\frac{400}{x}-1600x$$
yang ekuivalen dengan
$$4\left(\frac{1}{x}-1\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+(x+1)f(-x)=\frac{400}{x}+1600x. \tag{2}$$
Dengan $4\times(1)-(2)$:
$$\begin{aligned}15(x+1)f(-x)&=\frac{6000}{x}\\ \iff f(-x)&=\frac{400}{x(x+1)}\\ &=400\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\\ f(x)&=400\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$
Maka
$$\sum_{i=2}^{400}f(i)=\sum_{i=2}^{400}400\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right)=400\sum_{i=1}^{400}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right)=400\cdot\frac{399}{400}=\boxed{399}.$$

5. Diketahui ada 6 pasang suami-isteri. Dari keenam pasangan tersebut akan dipilih 6 orang secara acak. Banyaknya cara untuk memilih 6 orang tersebut sehingga paling banyak terdapat sepasang suami-isteri adalah . . . .

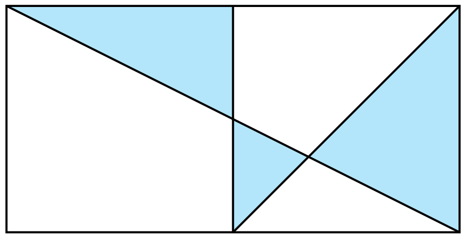
Jawab: 544

Misalkan sebuah pasangan suami istrinya sebagai S_iP_i untuk $i=1,2,3,4,5,6$. Jika tidak ada sepasang suami istri yang terpilih, maka dari S_iP_i harus terpilih tepat 1 orang, maka ada $\binom{2}{1}=2$ cara untuk setiap $i=1,2,3,4,5,6$. Total ada $2^6=64$.

Jika ada tepat 1 sepasang suami istri yang terpilih, maka ada $\binom{6}{1}=6$ untuk pemilihan suami istrinya. Sedangkan, pemilihan empat orang sisanya ada $\binom{5}{4}\cdot 2^4=5\cdot 16=80$. Total ada $6\cdot 80=480$.

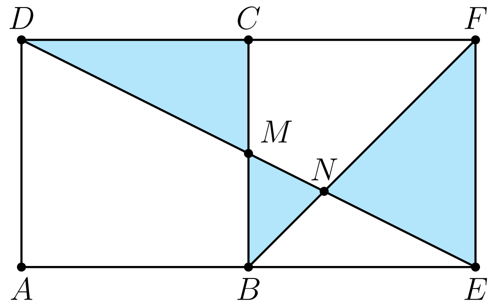
Maka kesuluruhan ada $64+480=\boxed{544}$.

6. Pada gambar ini sebuah persegi panjang dibagi menjadi dua buah persegi yang panjang sisinya 6 cm. Luas total daerah yang diarsir adalah . . . cm^2.



Jawab: 24

Misalkan $DE \cap BC = M$ dan $DE \cap BF = N$.



Perhatikan bahwa $\angle BEM = \angle AED, \angle EBM = \angle EAD$, dan $\angle BME = \angle ADE$. Maka $\triangle BEM \sim \triangle AED$.

$$\frac{BM}{AD} = \frac{BE}{AE} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \implies BM = \frac{AD}{2} = 3.$$

Maka $BM = CM = 3$ yang berarti $[MCD] = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9$. Di sisi lain, $\angle BMN = \angle FEN, \angle MNB = \angle ENF$, dan $\angle NBM = \angle EFN$. Maka $\triangle BMN \sim \triangle FEN$. Maka

$$\frac{MN}{EN} = \frac{BM}{FE} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \implies EN = 2MN.$$

Selain itu, $\dfrac{BN}{NF} = \dfrac{BM}{EF} = \dfrac{1}{2} \implies NF = 2BN$. Kita punya $[ENF] = 4[BMN]$ dan

$$\frac{[BNE]}{[ENF]} = \frac{BN}{NF} = \frac{1}{2}.$$

Karena $[BNE] + [NEF] = [BEF] = 18$, maka $[NEF] = 12$ dan $[ENF] = 3$. Maka luas arsir yang diminta adalah $9 + 3 + 12 = \boxed{24}$.

7. Bilangan $1, 2, 3, \cdots, 999$ digit-digitnya disusun membentuk angka baru m dengan menuliskan semua digit bilangan-bilangan asli tadi dari kiri ke kanan. Jadi,

$$m = 12345 \cdots 998999.$$

Jumlah digit ke-2021, ke-2022, dan ke-2023 dari m adalah . . . .

Jawab: 8

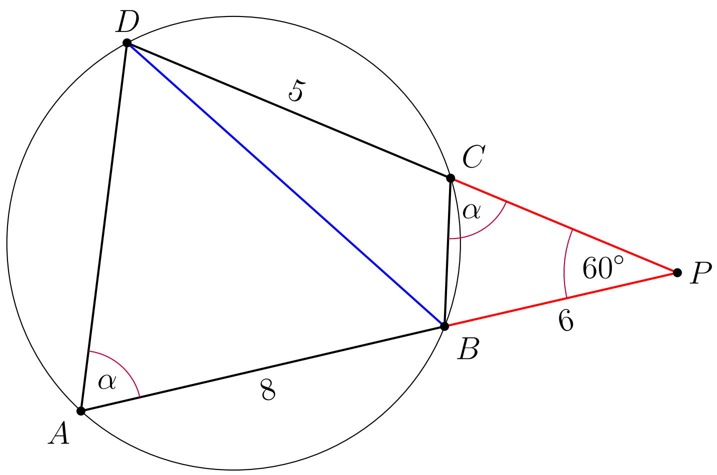
- Bilangan yang dituliskan 1 digit ada $1 \cdot 9 = 9$.

- Bilangan yang dituliskan 2 digit ada $2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$.
- Bilangan yang dituliskan 3 digit:
  - Untuk bilangan yang berbentuk $\overline{x**}$ dengan $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ada $3 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 = 1800$.
  - Untuk bilangan yang berbentuk $\overline{70*}$ ada $3 \cdot 10 = 30$.

Total sementara telah terhitung $9 + 180 + 1800 + 30 = 2019$ digit. Untuk selanjutnya, $\cdots 710711 \cdots$ yang berarti digit ke-2021 adalah 1, digit ke-2022 adalah 0, dan digit ke-2023 adalah 7 yang jumlahnya adalah $\boxed{8}$.

8. Pada suatu lingkaran dengan jari-jari r, terdapat segiempat talibusur $ABCD$ dengan $AB = 8$ dan $CD = 5$. Sisi AB dan DC diperpanjang dan berpotongan di luar lingkaran di titik P. Jika $\angle APD = 60°$ dan $BP = 6$, maka nilai r^2 adalah . . . .

   Jawab: 43



Misalkan $\angle BAD = \alpha$. Maka dari segitiga APD, kita punya

$$\angle ADC = 180° - \angle BAD - \angle APD = 120° - \alpha.$$

Karena $ABCD$ siklis, kita punya juga

$$\angle CBP = \angle ADC = 120° - \alpha \quad \text{dan} \quad \angle BCP = \angle BAD = \alpha.$$

Dari Power of a Point, kita punya

$$PC \cdot PD = PB \cdot PA \implies PC(PC + 5) = 6 \cdot 14 = 84.$$

Kita punya

$$0 = PC^2 + 5PC - 84 = (PC + 12)(PC - 7) \implies PC = 7.$$

Dari aturan cosinus (LoC: Law of Cosines) segitiga BCP, kita punya

$$BC = \sqrt{BP^2 + PC^2 - 2 \cdot PB \cdot PC \cos 60°} = \sqrt{6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{43}.$$

Selain itu, LoC dari segitiga BCP,

$$\cos\alpha = \frac{BC^2 + CP^2 - BP^2}{2\cdot BC\cdot CP} = \frac{43+49-36}{2\cdot\sqrt{43}\cdot 7} = \frac{56}{14\sqrt{43}} = \frac{4}{\sqrt{43}}.$$

Karena $0 < \alpha < \pi$, maka

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{27}{43}} = 3\sqrt{\frac{3}{43}}.$$

Dari LoC segitiga BDP,

$$BD = \sqrt{PD^2 + PB^2 - 2\cdot PD\cdot PB\cos 60^\circ} = \sqrt{144+36-2\cdot 12\cdot 6\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

Dari aturan sinus (LoS: Law of Sines) segitiga ABD,

$$2r = \frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin\alpha} = \frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{\frac{3}{43}}} = 2\sqrt{43}$$

yang berarti $r = \sqrt{43} \iff r^2 = \boxed{43}$.

9. Bilangan asli n dikatakan *menarik* jika terdapat suku banyak (polinom) dengan koefisien bulat $P(x)$ sehingga $P(7) = 2021$ dan $P(n) = 2045$. Banyaknya bilangan **prima** *menarik* adalah . . . .

Jawab: 6

Kita punya $n - 7 \mid P(n) - P(7) = 24$. Karena $n > 0$, maka

$$n - 7 = -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24$$

yang berarti

$$n = 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 19, 31$$

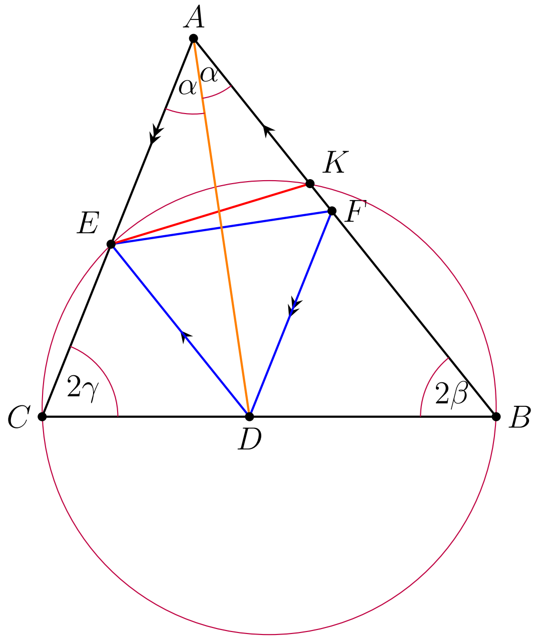
yang berarti ada $\boxed{6}$ bilangan prima yang menarik.

10. Diketahui segitiga ABC dengan $AB > AC$. Garis bagi sudut BAC memotong BC di titik D. Titik E dan F berturut-turut terletak pada sisi AC dan AB sehingga DE sejajar AB dan DF sejajar AC. Lingkaran luar segitiga BCE memotong sisi AB di titik K. Jika luas segitiga CDE adalah 75 dan luas segitiga DEF adalah 85, maka luas segiempat $DEKF$ adalah . . . .

Jawab: 95

Klaim — $\triangle CDE \cong \triangle KEA$ dan $\triangle DEF \cong \triangle EAF$.

Bukti. Misalkan $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta$, dan $\angle C = 2\gamma$. Kita punya $\angle EAD = \angle FAD = \alpha$. Karena $DE \parallel AF$, kita punya $\angle FDA = \angle EAD = \alpha$. Karena $AE \parallel FD$, kita punya juga $\angle EDA = \angle FAD = \alpha$. Maka panjang $ED = AE$. Di sisi lain, karena $DE \parallel AB$, kita punya $\angle EDC = \angle ABD = 2\beta$. Karena $ABKE$ siklis, maka $\angle AEK = \angle ABC = 2\beta$ dan $\angle AKE = \angle DCE = 2\gamma$. Akibatnya, $\triangle CDE \cong \triangle KEA$ (sisi-sudut-sisi). Tinjau bahwa $EDFA$ jajargenjang sehingga berakibat $\triangle DEF \cong \triangle EAF$. $\square$



Makaa kita punya

$$\begin{aligned}[DEKF] &= [DEF] + [EKF] \\ &= 85 + [AEF] - [AEK] \\ &= 85 + 85 - [DEC] \\ &= 170 - 75 \\ &= \boxed{95}.\end{aligned}$$

§2.2 Kemampuan Lanjut

Terdiri dari 10 soal. Setiap soal yang dijawab benar bernilai +4 poin, dijawab salah bernilai −1 poin, dan tidak dijawab (kosong) bernilai 0 poin.

1. Jika $a > 1$ suatu bilangan asli sehingga hasil penjumlahan semua bilangan riil x yang memenuhi persamaan

$$\lfloor x \rfloor^2 - 2ax + a = 0$$

adalah p, maka a adalah . . . .

Jawab: 25

Misalkan $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ dengan $0 \leq \{x\} < 1$. Maka

$$\begin{aligned} 0 &= \lfloor x \rfloor^2 - 2a\left(\lfloor x \rfloor + \{x\}\right) + a \\ &= \lfloor x \rfloor^2 - 2a\lfloor x \rfloor - 2a\{x\} + a \\ 2a\{x\} &= \lfloor x \rfloor^2 - 2a\lfloor x \rfloor + a. \end{aligned}$$

Karena $\lfloor x \rfloor^2 - 2a\lfloor x \rfloor + a \in \mathbb{Z}$, maka $2a\{x\} \in \mathbb{Z}$. Misalkan $2a\{x\} = k \iff \{x\} = \dfrac{k}{2a}$ dengan $0 \leq k < 2a$ dan $k \in \mathbb{Z}$. Maka

$$k = \lfloor x \rfloor^2 - 2a\lfloor x \rfloor + a \iff 0 = \lfloor x \rfloor^2 - 2a \cdot \lfloor x \rfloor + (a-k)$$

sebagai persamaan kuadrat variabel $\lfloor x \rfloor$. Kita punya

$$\lfloor x \rfloor = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a-k)}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - a + k}.$$

Maka $a^2 - a + k$ harus kuadrat sempurna. Perhatikan bahwa

$$a^2 - 2a + 1 < a^2 - a + k < a^2 + 2a + 1 \implies (a-1)^2 < a^2 - a + k < (a+1)^2.$$

Maka haruslah $a^2 = a^2 - a + k \iff k = a$. Maka $\{x\} = \dfrac{1}{2}$. Kita punya

$$\lfloor x \rfloor = a \pm \sqrt{a^2} = a \pm a$$

yang berarti $\lfloor x \rfloor = 0$ atau $\lfloor x \rfloor = 2a$. Maka

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \implies x = \frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad x = 2a + \frac{1}{2}.$$

Maka kita punya

$$51 = \frac{1}{2} + 2a + \frac{1}{2} = 2a + 1 \implies 51 = 2a + 1 \iff a = \boxed{25}.$$

2. Diketahui bilangan real a, b, dan c memenuhi ketaksamaan $\left|ax^2 + bx + c\right| \leq 1$ untuk setiap bilangan riil x dengan $0 \leq x \leq 1$. Nilai maksimum yang mungkin dari $23a + 22b + 21c$ adalah . . . .

Jawab: 29

Ambil $x = 0, \dfrac{1}{2}, 1$, kita punya

$$-1 \leq c, \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c, a + b + c \leq 1.$$

Tinjau

$$23a + 22b + 21c = 24(a + b + c) + c - (a + 2b + 4c) = 24(a + b + c) + c - 4\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right).$$

Karena $a + b + c \leq 1$, $c \leq 1$, dan $-1 \leq \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{2} + c$, maka

$$23a + 22b + 21c \leq 24 \cdot 1 + 1 - 4 \cdot (-1) = 24 + 1 + 4 = 29.$$

Kesamaan dapat terjadi ketika $(a, b, c) = (8, -8, 1)$. Kita cek kembali

$$f(x) = \left|8x^2 - 8x + 1\right| = \left|2(2x - 1)^2 - 1\right|.$$

yang memiliki titik balik $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$. Untuk $x < \dfrac{1}{2}$, maka f fungsi turun dan diperoleh nilai maksimum $f(x)$ adalah

$$f(x) \leq \left|2(2 \cdot 0 - 1)^2 - 1\right| = 1 \ \forall\ 0 \leq x < \frac{1}{2}.$$

Sedangkan, untuk $x > \dfrac{1}{2}$, maka f fungsi naik dan diperoleh nilai maksimum $f(x)$ adalah

$$f(x) \leq \left|2(2 \cdot 1 - 1)^2 - 1\right| = 1 \ \forall\ \frac{1}{2} < x \leq 1.$$

Jadi, $f(x) = \left|8x^2 - 8x + 1\right|$ memenuhi kondisi yang diminta. Maka nilai maksimum $23a + 22b + 21c = \boxed{29}$.

3. Diketahui dua digit terakhir dari a^{777} adalah 77, maka dua digit terkahir dari a adalah . . . .

Jawab: 17

Dari soal, kita punya $a^{777} \equiv 77 \pmod{100}$. Artinya, $\gcd(a, 100) = 1$ yang berarti juga $\gcd(a, 25) = \gcd(a, 5) = \gcd(a, 4) = 1$. Dari Euler's Theorem, maka $a^{\varphi(4)} = a^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Maka kita punya

$$77 \equiv 1 \equiv a^{777} \equiv a \pmod{4} \implies a \equiv 1 \pmod{4}. \tag{1}$$

Di sisi lain, $a^{777} \equiv 2 \pmod{5}$. Dari Euler's Theorem,

$$a^{\varphi(5)} = a^4 \equiv 1 \pmod{5} \implies a^{777} \equiv a \equiv 2 \pmod{5}. \tag{2}$$

Dari (1) dan (2) kita peroleh $a \equiv 17 \pmod{20}$. Kita cukup tinjau untuk $a \equiv 17, 37, 57, 77, 97 \pmod{100}$. Dari soal, $a^{777} \equiv 2 \pmod{25}$. Akan kita cek dalam mod 25. Dari Euler's Theorem,

$$a^{\varphi(25)} = a^{20} \equiv 1 \pmod{25} \implies a^{777} \equiv a^{17} \equiv 2 \pmod{25}.$$

Untuk $a \equiv 17 \pmod{100} \implies a \equiv 17 \pmod{25}$, maka

$$17^{17} \equiv 17 \cdot 17^{16} \equiv 17 \cdot 289^{8} \equiv 17 \cdot 14^{8} \equiv 17 \cdot 196^{4} \equiv 17 \cdot (-4)^{4} \equiv 17 \cdot 64 \cdot 4 \pmod{25}$$

yang ekuivalen dengan

$$17^{17} \equiv (-8) \cdot (-11) \cdot 4 \equiv 88 \cdot 4 \equiv 13 \cdot 4 \equiv 52 \equiv 2 \pmod{25}.$$

Memenuhi dan mudah dicek penyelesaian $17^{17} \equiv 2 \pmod{25}$ dan $17^{17} \equiv 1 \pmod{4}$ adalah $17^{17} \equiv 77 \pmod{100} \implies a^{777} \equiv 77 \pmod{100}$.

Dengan cara sama, cukup dikuli, didapatkan

$$37^{17} \equiv 17 \pmod{25}, \quad 57^{17} \equiv 7 \pmod{25}, \quad 77^{17} \equiv 22 \pmod{25}, \quad 97^{17} \equiv 12 \pmod{25}.$$

Demikian dua digit terakhir dari a adalah $\boxed{17}$.

4. Bilangan asli ganjil b terbesar sehingga barisan bilangan asli $a_n = n^2 + 19n + b$ memenuhi

$$\gcd(a_n, a_{n+1}) = \gcd(a_{n+2}, a_{n+1})$$

untuk setiap bilangan asli n adalah . . . .

Jawab: 91

Tinjau bahwa

$$a_n = n^2 + 19n + b, \quad a_{n+1} = n^2 + 21n + 20 + b, \quad a_{n+2} = n^2 + 23n + 42 + b.$$

Dengan Algoritma Euclid, yaitu $\gcd(a, b) = \gcd(a - kb, b) = \gcd(a, b - ka)$ dengan $a, b, k \in \mathbb{Z}$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\gcd(a_n, a_{n+1}) &= \gcd\left(n^2 + 19n + b, n^2 + 21n + 20 + b\right) \\
&= \gcd\left(n^2 + 19n + b - n^2 - 21n - 20 - b, n^2 + 21n + 20 + b\right) \\
&= \gcd\left(-2n - 20, n^2 + 21n + 20 + b\right) \\
&= \gcd\left(2n + 20, n^2 + 21n + 20 + b\right).
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $n^2 + 21n + 20 + b$ selalu berparitas ganjil. Akibatnya,

$$\gcd(a_n, a_{n+1}) = \gcd\left(n + 10, n^2 + 21n + 20 + b\right).$$

Sekali lagi dengan Algoritma Euclid,

$$\gcd(a_n, a_{n+1}) = \gcd\left(n + 10, n^2 + 21n + 20 + b - (n + 11)(n + 10)\right) = \gcd(n + 10, b - 90).$$

Dengan cara sama,

$$\begin{aligned}\gcd(a_{n+1}, a_{n+2}) &= \gcd\left(n^2+21n+20+b, n^2+23n+42+b\right)\\ &= \gcd\left(n^2+21n+20+b-n^2-23n-42+b, n^2+23n+42+b\right)\\ &= \gcd\left(-2n-22, n^2+23n+42+b\right)\\ &= \gcd\left(2n+22, n^2+23n+42+b\right).\end{aligned}$$

Karena $n^2+23n+42+b$ selalu berparitas ganjil, akibatnya

$$\gcd(a_{n+1}, a_{n+2}) = \gcd\left(n+11, n^2+23n+42+b\right).$$

Kita dapatkan

$$\gcd(a_{n+1}, a_{n+2}) = \gcd\left(n+11, n^2+23n+42+b-(n+11)(n+12)\right) = \gcd(n+11, b-90).$$

Perhatikan bahwa $\gcd(n+10, n+11) = 1$ dan $\gcd(a_n, a_{n+1}) = \gcd(a_{n+1}, a_{n+2})$. Maka

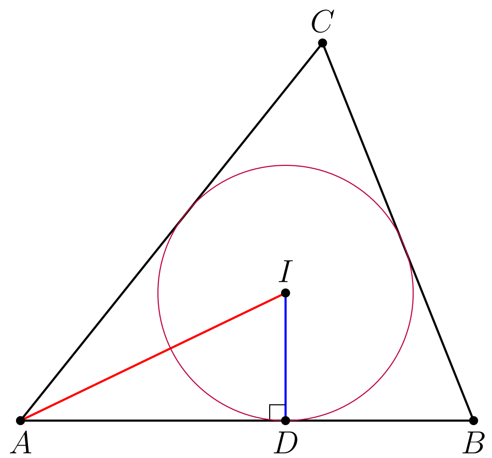
$$\gcd(n+10, b-90) = \gcd(n+11, b-90) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sehingga $b-90 = \pm 1$ yang berarti $b = 91$ atau $b = 89$. Demikian bilangan ganjil b terbesar yang memenuhi adalah $\boxed{91}$.

5. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 6, BC = 7$, dan $CA = 8$. TJika I adalah titik potong ketiga garis bagi segitiga ABC, maka AI^2 adalah . . . .

Jawab: 16

Tinjau I merupakan titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC. Misalkan lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung AB di D.



Tinjau bahwa panjang $ID = r$ dengan r menyatakan jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC. Maka

$$r = \frac{[ABC]}{s} = \frac{\sqrt{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-6\right)\left(\frac{21}{2}-7\right)\left(\frac{21}{2}-8\right)}}{\frac{21}{2}} = \frac{\frac{21}{4}\sqrt{15}}{\frac{21}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Dan juga didapatkan

$$AD = s - BC = \frac{21}{2} - 7 = \frac{7}{2}.$$

Maka

$$AI^2 = AD^2 + DI^2 = \frac{49}{4} + \frac{15}{4} = \frac{64}{4} = \boxed{16}.$$

6. Diberikan x, y, dan n bilangan asli yang memenuhi

$$x^2 + (y+2)x + (n+1)y = n^2 + 252.$$

Nilai y terbesar yang mungkin adalah . . . .

Jawab: 250

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} x^2 + (y+2)x + (n+1)y &= n^2 + 252 \\ x^2 + xy + 2x + ny + y &= n^2 + 252 \\ y(x+n+1) &= n^2 + 252 - x^2 - 2x \\ y &= \frac{n^2 + 252 - x^2 - 2x}{x+n+1} \\ &= \frac{n^2 + 253 - (x+1)^2}{x+n+1} \\ &= \frac{(n+x+1)(n-x-1) + 253}{x+n+1} \\ &= n - x - 1 + \frac{253}{x+n+1}. \end{aligned}$$

Faktor positif dari 253 adalah $1, 11, 23, 253$. Agar bernilai maksimum, ambil $x = 1$. Maka

$$y = n - 1 - 1 + \frac{253}{1+n+1} = n - 2 + \frac{253}{n+2}.$$

Mudah dicek satu per satu untuk $n + 2 \in \{11, 23, 253\}$ akan tercapai maksimum apabila $n + 2 = 253 \iff n = 251$. Maka $y = n - 2 + 1 = \boxed{250}$.

7. Banyaknya barisan ternary (sukunya $0, 1$, atau 2) yang memuat 15 suku, memuat tepat lima angka 0 dan setiap di antara dua angka 0 ada paling sedikit dua suku bukan 0 adalah . . . .

Jawab: 21504

Karena berupa **barisan**, maka angka 0 boleh terletak di depan (sebagai contoh, $0100, 01230$, dan lain-lain). Misalkan barisannya adalah

$$\underbrace{*****}_{\text{sebanyak } x_1} 0 \underbrace{*****}_{\text{sebanyak } x_2} 0 \underbrace{*****}_{\text{sebanyak } x_3} 0 \underbrace{*****}_{\text{sebanyak } x_4} 0 \underbrace{*****}_{\text{sebanyak } x_5} 0 \underbrace{*****}_{\text{sebanyak } x_6}$$

dengan x_1, x_6 bilangan bulat tak negatif dan $x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 2$. Karena terdiri dari 10 unsur (selain 0), maka

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10.$$

Misalkan $x_i = y_i + 2$ untuk setiap $i = 2, 3, 4, 5$ dengan $y_i \geq 0$. Kita punya

$$x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + x_6 = 2$$

yang memiliki solusi $(x_1, y_2, y_3, y_4, y_5, x_6)$ sebanyak $\binom{2+6-1}{6-1} = \binom{7}{5}$. Setiap digit (yang berada di $*****$) memiliki 2 kemungkinan, yaitu 1 atau 2. Maka ada 2^{10}. Total barisan ternary ada

$$\binom{7}{5} \cdot 2^{10} = \frac{7!}{5!2!} \cdot 1024 = 21 \cdot 1024 = \boxed{21504}.$$

8. Banyak fungsi (pemetaan) dari $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ke $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ dengan 9 dan 10 memiliki prapeta, yaitu ada x dan y di A sehingga $f(x) = 9$ dan $f(y) = 10$ adalah . . . .

Jawab: 1320

Kita gunakan prinsip inklusi-eksklusi (PIE). Banyak pemetaan $f : A \to B$ tanpa syarat ada $|B|^{|A|} = 5^5$.

- Untuk pemetaan $f : A \to B$ dengan tidak ada $x \in A$ sehingga $f(x) = 9$, maka ada 4^5.
- Untuk pemetaan $f : A \to B$ dengan tidak ada $x \in A$ sehingga $f(x) = 10$, maka ada 4^5.
- Untuk pemetaan $f : A \to B$ dengan tidak ada $x, y \in A$ sehingga $f(x) = 9, f(y) = 10$, maka ada 3^5.

Sehingga banyak fungsi $f : A \to B$ ada

$$5^5 - 4^5 - 4^5 + 3^5 = \boxed{1320}.$$

9. Suatu papan catur berukuran 109×21 akan dipasangi beberapa ubin berukuran 3×1. Berapa ubin terbanyak yang bisa dipasang pada papan sehingga tidak ada dua ubin yang bertumpuk atau bersentuhan (bersentuhan pada titik sudut ubin juga tidak diperbolehkan)?

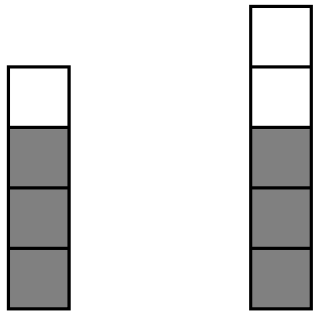
Jawab: 302

Solusi oleh Audrey Felicio Anwar. Pertama jelas bahwa untuk setiap petak $2 \times 4, 4 \times 1$, dan 5×1, kita hanya dapat meletakan maksimal 1 buah ubin.

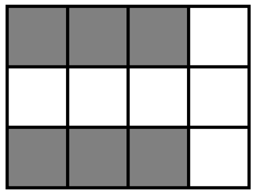
Untuk petak 3×4, perhatikan bahwa jika kita meletakan ubin secara vertikal, maka kita tidak bisa menempatkan ubin lain secara horizontal karena banyak tempat tersisa untuk horizontal $\leq 4 - 2 < 3$. Jika ubin diletakan secara horizontal, maka tidak mungkin ubin lain ditempatkan secara vertikal. Maka kita maksimal menempatkan 2 ubin, karena setiap ubin akan menyebabkan ≥ 2 baris atau kolom tertutup.

Partisi petak 109×21 menjadi tiga region berikut:

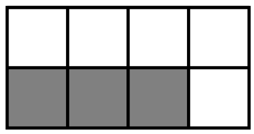
- 109×1 (kolom terakhir). Untuk 109×1, kita bisa partisi jadi 26 buah 4×1 dan 1 buah 5×1, maka ada ≤ 27 ubin.



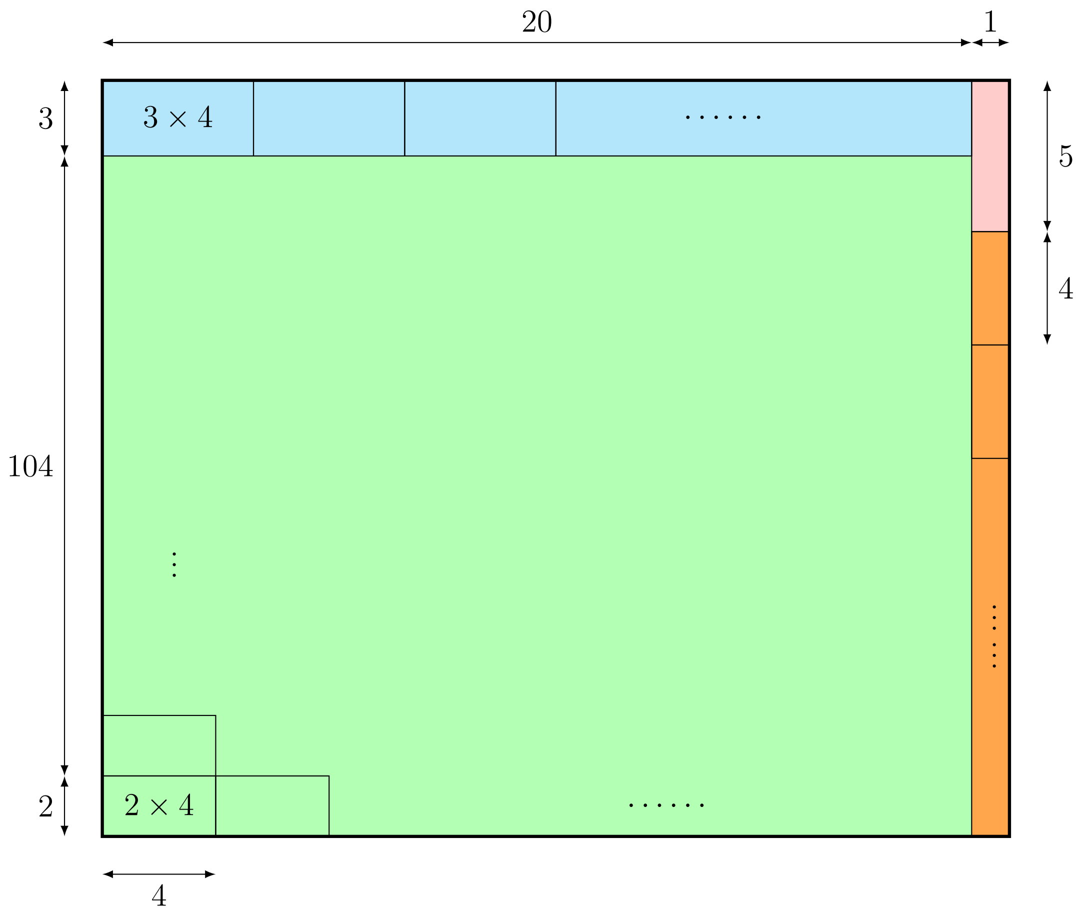
- 3×20 (3 baris pertama). Untuk 3×20, partisi jadi 5 buah 3×4, ada ≤ 10 ubin.



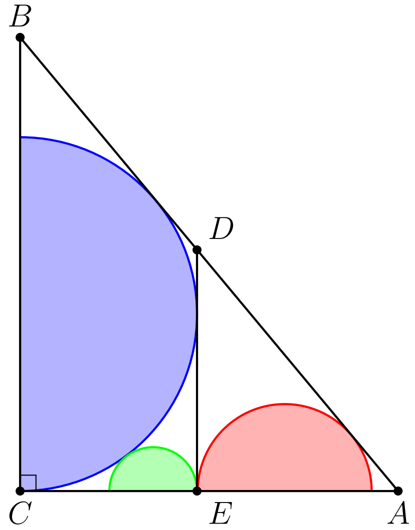
- 106×20. Untuk 106 x 20, partisi jadi 265 buah 2×4 ada ≤ 265 ubin.



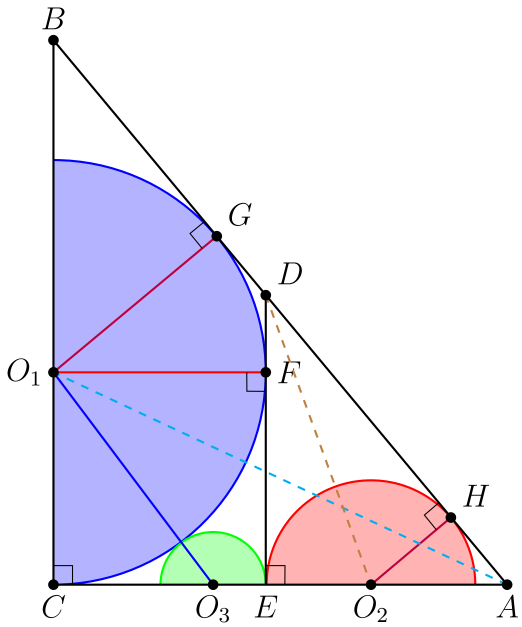
Maka total ubin $\leq 265 + 10 + 27 = 302$. Berikut konstruksinya dengan petak biru untuk 3×4, petak merah untuk 5×1, petak *orange* untuk 4×1, dan petak hijau untuk 2×4.



10. Diberikan segitiga siku-siku ABC dengan $\angle C = 90°$. Titik D terletak pada sisi AB dan E terletak pada sisi AC sehingga DE sejajar dengan garis BC. Diketahui setengah lingkaran berwarna biru, merah, hijau sedemikian sehingga setengah lingkaran biru menyinggung AC dan AB, setengah lingkaran merah menyinggung sisi AB dan garis DE, dan setengah lingkaran hijau menyinggung setengah lingkaran biru dan DE (perhatikan gambar berikut). Jika $2AC + 5BC = 5AB$, maka perbandingan jari-jari setengah lingkaran merah dan setengah lingkaran hijau adalah $k : 25$. Nilai k adalah . . . .



Jawab: 56



Misalkan O_1, O_2, dan O_3 berturut-turut merupakan pusat setengah lingkaran biru, merah, dan hijau. Misalkan setengah lingkaran biru menyinggung DE di F. Misalkan pula setengah lingkaran biru dan merah berturut-turut menyinggung AB di titik G dan H. Misalkan R_1, R_2, R_3 berturut-turut menyatakan jari-jari setengah lingkaran biru, merah, dan hijau.

Dari Teorema Pythagoras segitiga ABC, kita punya $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Kuadratkan kedua ruas pada persamaan $2AC + 5BC = 5AB$, kita punya

$$\begin{aligned} 4AC^2 + 25BC^2 + 20AC \cdot BC &= 25AB^2 \\ 4AC^2 + 25BC^2 + 20AC \cdot BC &= 25\left(AC^2 + BC^2\right) \\ 20AC \cdot BC &= 21AC^2 \\ 20BC &= 21AC. \end{aligned}$$

Misalkan $BC = 21a$ dan $AC = 20a$, kita peroleh $AB = 29a$. Perhatikan bahwa panjang $O_1C = O_1G = R_1$, $\angle O_1GA = \angle O_1CA$, dan panjang $O_1A = O_1A$. Maka $\triangle ACO_1 \cong \triangle AGO_1$. Maka panjang $AG = AC = 20a$. Maka panjang $BG = 9a$ dan $BO_1 = BC - O_1C = 21a - R_1$. Dengan Teorema Pythagoras pada BO_1G dan memanfaatkan $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, kita punya

$$BG^2 = BO_1^2 - O_1G^2 = (21a - R_1)^2 - R_1^2 = 21a \cdot (21a - 2R_1)$$

yang berarti

$$2R_1 = 21a - \frac{BG^2}{21a} = \frac{441a^2 - 81a^2}{21a} = \frac{360a^2}{21a} = \frac{120}{7}a$$

dan diperoleh $R_1 = \dfrac{60}{7}a$. Kita punya juga

$$AE = AC - CE = 20a - O_1F = 20a - R_1 = 20a - \frac{60}{7}a = \frac{80}{7}a.$$

Karena $DE \parallel BC \implies \angle AED = \angle ACB, \angle ADE = \angle ABC$, dan $\angle CAB = \angle CAB$, maka $\triangle ACB \sim \triangle AED$. Kita punya

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{\frac{80}{7}a}{20a} = \frac{4}{7}.$$

Kita dapatkan $DE = 12a$ dan $AD = \dfrac{116}{7}a$. Dengan argumen yang sama, kita dapatkan $\triangle EO_2D \cong \triangle HO_2D \implies DH = DE = 12a$. Maka

$$AH = DA - DH = \frac{116}{7}a - 12a = \frac{32}{7}a.$$

Di sisi lain, $AO_2 = AE - EO_2 = \dfrac{80}{7}a - R_2$. Dengan Teorema Pythagoras pada segitiga AHO_2,

$$AH^2 = AO_2^2 - O_2H^2 = \left(\frac{80}{7}a - R_2\right)^2 - R_2^2 = \frac{80}{7}a\left(\frac{80}{7}a - 2R_2\right)$$

yang berarti

$$2R_2 = \frac{80}{7}a - \frac{7AH^2}{80a} = \frac{80}{7}a - \frac{7}{80a} \cdot \frac{32^2}{7^2}a^2 = \frac{80}{7}a - \frac{64}{35}a = \frac{336}{35}a$$

sehingga diperoleh $R_2 = \dfrac{168}{35}a$. Tinjau setengah lingkaran biru dan hijau bersinggungan, akibatnya $O_1O_3 = R_1 + R_3 = \dfrac{60}{7}a + R_3$. Di sisi lain,

$$CO_3 = CE - O_3E = O_1F - R_3 = R_1 - R_3 = \frac{60}{7}a - R_3.$$

Dengan Teorema Pythagoras pada segitiga CO_1O_3,

$$O_1C^2 = O_1O_3^2 - CO_3^2 = \left(\frac{60}{7}a + R_3\right)^2 - \left(\frac{60}{7}a - R_3\right)^2 = \frac{120}{7}a \cdot 2R_3 = \frac{240}{7}aR_3$$

yang berarti

$$\frac{240}{7}aR_3 = O_1C^2 = R_1^2 = \frac{60^2}{7^2}a^2 \implies R_3 = \frac{60^2}{7^2}a^2 \cdot \frac{7}{240a} = \frac{15}{7}a.$$

Maka

$$\frac{k}{25} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{\frac{168}{35}a}{\frac{15}{7}a} = \frac{168 \cdot 7}{35 \cdot 15} = \frac{56}{25}.$$

yang berarti $k = \boxed{56}$.