Soal dan Solusi UTS Kalkulus I

WILDAN BAGUS WICAKSONO

Email : wildanbagus@student.ub.ac.id
LinkedIn : Wildan Bagus Wicaksono

Soal 1 (25 poin). Jika $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$ dan $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

(a). Tentukanlah daerah asal dan daerah hasil $f(x)$ dan $g(x)$.

(b). Periksalah apakah $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.

(c). Jika $(f \circ g)(x)$ terdefinisi, tentukan rumus untuk $(f \circ g)(x)$.

(d). Tentukanlah daerah asal dan daerah hasil dari $(f \circ g)(x)$.

Penyelesaian.

(a). Tinjau $f(x)$ akan terdefinisi apabila $|x| \geq 2 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ yang berarti

$$\boxed{D_f = \{x \mid x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)\}}.$$

Kemudian, perhatikan bahwa $h(x) = \sqrt{x}$ yang berakibat

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \; \forall \, x > 0$$

sehingga $h(x)$ merupakan fungsi naik tegas. Artinya, $h(x) \geq h(0) = 0$ di mana $h(x) = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$. Karena $|x| - 2 \geq 0$, maka

$$f(x) = h(|x| - 2) \geq h(0) = 0 \iff f(x) \geq 0 \; \forall \, x \in D_f.$$

Jadi, $\boxed{R_f = \{f(x) \mid f(x) \geq 0\}}$.

Tinjau $g(x)$ merupakan fungsi polinom yang mana terdefinisi untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$. Maka $\boxed{D_g = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}}$. Perhatikan bahwa

$$g(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 \iff g(x) \geq 1 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$$

mengingat $a^2 \geq 0 \; \forall \, a \in \mathbb{R}$. Maka $\boxed{R_g = \{g(x) \mid g(x) \geq 1\}}$.

(b). Perhatikan bahwa

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{|x^2 - 2x + 2| - 2}.$$

Dari (a), kita tahu bahwa $x^2 - 2x + 2 > 0$ sehingga

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2 - 2} = \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x(x-2)}$$

yang $\boxed{\text{terdefinisi apabila } x(x-2) \geq 0}$.

(c). Dari (c), kita punya $\boxed{(f \circ g)(x) = \sqrt{x(x-2)}}$.

(d). $(f \circ g)(x)$ terdefinisi apabila $x(x-2) \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$. Jadi, $\boxed{D_{f \circ g} = \{x \mid x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)\}}$. Dari bagian (a), kita punya juga $(f \circ g)(x) = \sqrt{x(x-2)} \geq 0$ untuk setiap $x \in D_{f \circ g}$. Maka $\boxed{R_{f \circ g} = \{(f(g(x)) \mid f(g(x)) \geq 0\}}$.

Soal 2 (25 poin). Jika ada, tentukan limit berikut. Jika tidak ada berikan alasannya.

(a). $\lim\limits_{x\to 3} \sin \dfrac{|x-3|}{x-3}$.

(b). $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

Penyelesaian.

(a). Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 3^+} \sin \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \sin \frac{x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \sin 1 = \sin 1$$
$$\lim_{x\to 3^-} \sin \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \sin \frac{-(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \sin(-1) = \sin(-1) = -\sin 1.$$

Karena $\lim\limits_{x\to 3^+} \sin \dfrac{|x-3|}{x-3} \neq \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{|x-3|}{x-3}$, maka $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ $\boxed{\text{tidak ada}}$.

(b). Perhatikan bahwa $-1 \leq \cos x \leq 1$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ sehingga kita punya

$$-\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Karena

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0,$$

menurut Teorema Apit berlaku $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = \boxed{0}$.

Soal 3 (20 poin). Tentukan $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ jika diketahui $2x^2y - 4y^3 = 4$.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa $2x^2y - 4y^3 = 4 \iff x^2y - 2y^3 = 2$. Turunkan kedua ruas terhadap variabel x, maka

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^2y - 2y^3\right) &= \frac{d}{dx}2 \\
2xy + x^2\frac{dy}{dx} - 6y^2\,\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\left(6y^2 - x^2\right)\frac{dy}{dx} &= 2xy \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2xy}{6y^2 - x^2}.
\end{aligned}$$

Turunkan sekali lagi terhadap variabel x, maka

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\left(2y + 2x\,\frac{dy}{dx}\right)\left(6y^2 - x^2\right) - 2xy\left(12y\,\frac{dy}{dx} - 2x\right)}{\left(6y^2 - x^2\right)^2} \\
&= \frac{\left(2y + 2x\cdot\frac{2xy}{6y^2 - x^2}\right)\left(6y^2 - x^2\right) - 2xy\left(12y\cdot\frac{2xy}{6y^2 - x^2} - 2x\right)}{\left(6y^2 - x^2\right)^2} \\
&= \frac{\frac{(2y)\left(6y^2 - x^2\right) + 4x^2y}{6y^2 - x^2}\cdot\left(6y^2 - x^2\right) - 2xy\left(\frac{24xy^2 - 2x\left(6y^2 - x^2\right)}{6y^2 - x^2}\right)}{\left(6y^2 - x^2\right)^2} \\
&= \frac{\left(12y^3 + 2x^2y\right)\left(6y^2 - x^2\right) - 2xy\left(12xy^2 + 2x^3\right)}{\left(6y^2 - x^2\right)^3} \\
&= \frac{72y^5 + 12x^2y^3 - 12x^2y^3 - 2x^4y - 24x^2y^3 - 4x^4y}{\left(6y^2 - x^2\right)^3} \\
&= \boxed{\frac{72y^5 - 6x^4y - 24x^2y^3}{\left(6y^2 - x^2\right)^3}}.
\end{aligned}$$

Soal 4 (30 poin). Buatlah sketsa grafik fungsi $y = \dfrac{2x^2-8}{x^2-16}$ secara canggih dengan menggunakan konsep limit, turunan, dan sebagainya.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa persamaan grafik ekuivalen dengan

$$y = \frac{2x^2-8}{x^2-16} = \frac{2\left(x^2-16\right)+24}{x^2-16} = 2 + \frac{24}{x^2-16}.$$

Kita tinjau grafik $f(x) = \dfrac{24}{x^2-16}$.

(a). **Menentukan asimtot.** Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 4} \frac{24}{x^2-16} = \pm\infty \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to -4} \frac{24}{x^2-16} = \pm\infty$$

sehingga $x=-4$ dan $x=4$ adalah dua asimtot tegak dari $f(x)$. Selanjutnya,

$$\lim_{x\to \infty} \frac{24}{x^2-16} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{24}{x^2-16} = 0$$

sehingga $y=0$ merupakan asimtot datar dari $f(x)$. Tinjau bahwa $f(x)$ tidak memiliki asimtot miring karena derajat pembilang lebih kecil dari derajat penyebut.

(b). **Menentukan interval naik-turun.** Perhatikan bahwa

$$f(x) = 24\left(x^2-16\right)^{-1} \implies f'(x) = 24\cdot(-1)\left(x^2-16\right)^{-2}\cdot(2x) = (-48)\cdot\frac{x}{\left(x^2-16\right)^2}.$$

Perhatikan bahwa $\left(x^2-16\right)^2 > 0$ untuk setiap $x \notin \{-4,4\}$. Perhatikan bahwa

$$f'(x) < 0\ \forall x \in (0,4)\cup(4,\infty) \quad \text{dan} \quad f'(x) > 0\ \forall\ x \in (-\infty,-4)\cup(-4,0).$$

Sehingga $f(x)$ merupakan fungsi naik di interval $(-\infty,-4)\cup(-4,0)$ dan fungsi turun di interval $(0,4)\cup(4,\infty)$.

(c). **Menentukan interval terbuka ke bawah-ke atas.** Perhatikan bahwa

$$f''(x) = (-48)\cdot\frac{1\cdot\left(x^2-16\right)^2 - x\cdot 2\left(x^2-16\right)(2x)}{\left(x^2-16\right)^4} = (-48)\cdot\frac{x^2-16-4x^2}{\left(x^2-16\right)^3} = 48\cdot\frac{3x^2+16}{\left(x^2-16\right)^3}.$$

Perhatikan bahwa $3x^2+16 \geq 0+16 > 0$ untuk setiap $x\in\mathbb{R}$ dan $48>0$. Tinjau bahwa

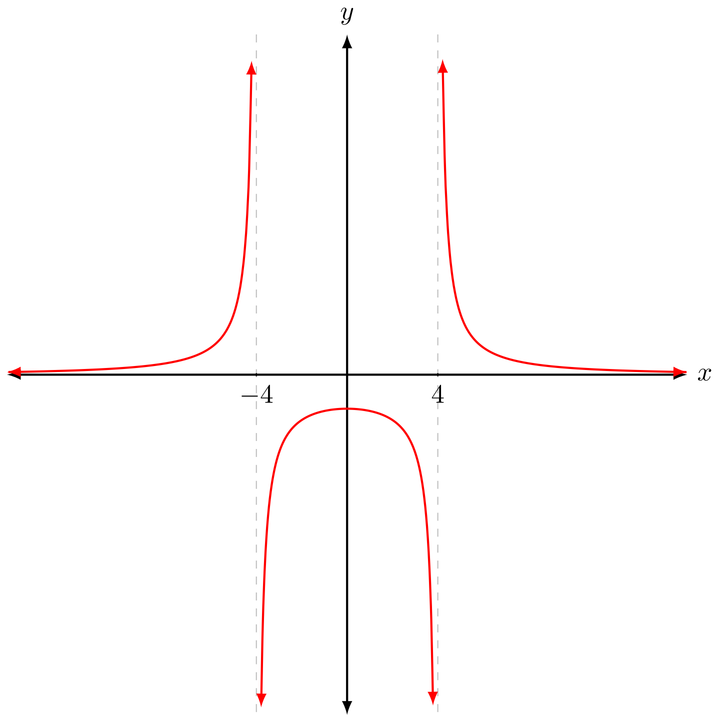
$$\begin{aligned}\left(x^2-16\right)^3 > 0 &\iff x^2-16>0 \iff x\in(-\infty,-4)\cup(4,\infty)\\ \left(x^2-16\right)^3 < 0 &\iff x^2-16<0 \iff x\in(-4,4).\end{aligned}$$

Sehingga kita simpulkan bahwa

$$f''(x) > 0\ \forall x\in(-\infty,4)\cup(4,\infty) \quad \text{dan} \quad f''(x) < 0\ \forall x\in(-4,4).$$

Artinya, $y=f(x)$ terbuka ke atas di interval $(-\infty,4)\cup(4,\infty)$ dan terbuka ke bawah di interval $(-4,4)$.

Dari poin (a), (b), dan (c) kita peroleh sketsa grafik $y = \dfrac{24}{x^2 - 16}$ sebagai berikut.



Grafik $y = 2 + \dfrac{24}{x^2 - 16}$ diperoleh dari menggeser grafik $y = \dfrac{24}{x^2 - 16}$ sejauh dua satuan ke atas, yaitu sebagai berikut.