Soal dan Solusi UAS Himpunan dan Logika 2022

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

Question 1

(a). Misalkan $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $A_n = [-n, 2n]$. Tentukan $A_1 \cap A_2, A_1 - A_2, A_1 \bigoplus A_2$.

(b). Buktikan dengan menggunakan hukum-hukum dalam himpunan bahwa

$$(A \cup B)^C \cap (B \cup C)^C \cap (A \cup C)^C = A^C \cap B^C \cap C^C.$$

Penyelesaian.

(a). Perhatikan bahwa $A_1 = [-1, 2]$ dan $A_2 = [-2, 4]$. Karena $A_1 \subseteq A_2$, maka $A_1 \cap A_2 = A_1 = [-1, 2]$ dan $A_1 - A_2 = \varnothing$. Di sisi lain, $A_1 \cup A_2 = [-2, 4]$ dan diperoleh $A_1 \bigoplus A_2 = (A_1 \cup A_2) - (A_1 \cap A_2) = [-2, -1) \cup (2, 4]$.

(b). Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(B \cup C)} \cap \overline{(A \cup C)} \\
&= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) && \text{(De Morgan)} \\
&= \left[(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{B}\right] \cap \overline{C} \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) && \text{(Asosiatif)} \\
&= \left[\overline{A} \cap (\overline{B} \cap \overline{B})\right] \cap \left[\overline{C} \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\right] && \text{(Asosiatif)} \\
&= \left[\overline{A} \cap \overline{B}\right] \cap \left[\overline{C} \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\right] && \text{(Idempoten)} \\
&= (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \left[\overline{C} \cap (\overline{C} \cap \overline{A})\right] && \text{(Komutatif)} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \left[(\overline{C} \cap \overline{C}) \cap \overline{A}\right] && \text{(Asosiatif)} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \left[\overline{C} \cap \overline{A}\right] && \text{(Idempoten)} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B} \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) && \text{(Komutatif)} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{B} \cap \overline{A}) \cap \overline{C} && \text{(Asosiatif)} \\
&= \overline{A} \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C} && \text{(Komutatif)} \\
&= (\overline{A} \cap \overline{A}) \cap \overline{B} \cap \overline{C} && \text{(Asosiatif)} \\
&= \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} && \text{(Idempoten)}
\end{aligned}$$

seperti yang ingin dibuktikan.

▼

Question 2

Didefinisikan relasi $\sim$ pada himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ sebagai berikut.

$$\text{Untuk setiap } a, b \in \mathbb{Q}, a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Z}.$$

(a). Buktikan bahwa $\sim$ merupakan relasi ekivalen.

(b). Tentukan kelas ekivalensinya secara umum. Kemudian tentukan kelas ekivalensi dari $\left[\frac{2}{3}\right]$.

Penyelesaian.

(a). Akan dibuktikan relasi $\sim$ bersifat refleksif. Ambil sebarang $a \in \mathbb{Q}$, perhatikan bahwa $a - a = 0 \in \mathbb{Z}$ yang artinya $a - a \in \mathbb{Z} \iff a \sim a$. Terbukti.
Akan dibuktikan relasi $\sim$ bersifat simetrik. Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $b - a = -(a - b) \in \mathbb{Z}$ yang artinya $b - a \in \mathbb{Z} \iff b \sim a$. Terbukti.
Akan dibuktikan relasi $\sim$ bersifat transitif. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $a \sim b$ dan $b \sim c$, maka $a-b \in \mathbb{Z}$ dan $b-c \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $a-c = a+0-c = a+(-b+b)-c = (a-b)+(b-c) \in \mathbb{Z}$. Artinya, $a - c \in \mathbb{Z} \iff a \sim c$. Terbukti.
Jadi, $\sim$ merupakan relasi ekivalen.

(b). Ambil sebarang $x \in \mathbb{Q}$. Perhatikan bahwa $x \in [x]$ karena $x \sim x$, jadi $[x]$ tak kosong. Ambil sebarang $n \in [x]$, maka $n \sim x \iff n - x \in \mathbb{Z}$. Artinya, terdapat suatu $k \in \mathbb{Z}$ sedemikian sheingga $n - x = k \iff n = x + k$. Jadi, kelas ekivalen dari $\sim$ adalah $[x] = \{x + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ untuk sebarang $x \in \mathbb{Q}$. Jadi, kelas ekivalen dari $\left[\frac{2}{3}\right]$ adalah

$$\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\frac{2}{3} + k \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\cdots, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \cdots\right\}.$$

Question 3

Misalkan f adalah fungsi dari himpunan A ke B dan $S \subseteq B$. Didefinisikan

$$f^{-1}(S) = \{a \in A \mid f(a) \in S\}.$$

(a). Buktikan bahwa $f^{-1}\left(S^C\right) = \left(f^{-1}(S)\right)^C$.

(b). Jika $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan aturan $f(x) = x^2$, tentukan $f^{-1}\left(\{x \mid 0 < x < 1\}\right)$.

Penyelesaian.

(a). Akan dibuktikan $f^{-1}\left(\overline{S}\right) \subseteq \overline{f^{-1}(S)}$. Ambil sebarang $x \in f^{-1}\left(\overline{S}\right)$, maka $f(x) \in \overline{S}$ yang artinya $f(x) \notin S$. Artinya, $x \notin f^{-1}(S)$. Terbukti bahwa $f^{-1}\left(\overline{S}\right) \subseteq \overline{f^{-1}(S)}$.
Akan dibuktikan $\overline{f^{-1}(S)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{S}\right)$. Ambil sebarang $x \in \overline{f^{-1}(S)}$, maka $x \notin f^{-1}(S)$ yang artinya $f(x) \notin S$. Artinya, $f(x) \in \overline{S}$ sehingga $x \in f^{-1}\left(\overline{S}\right)$. Terbukti bahwa $\overline{f^{-1}(S)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{S}\right)$.
Karena $f^{-1}\left(\overline{S}\right) \subseteq \overline{f^{-1}(S)}$ dan $\overline{f^{-1}(S)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{S}\right)$ sehingga kita punya $f^{-1}\left(\overline{S}\right) = \overline{f^{-1}(S)}$ seperti yang ingin dibuktikan.

(b). Perhatikan bahwa jika $0 < f(x) < 1 \iff 0 < x^2 < 1$. Jelas bahwa $x^2 > 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Untuk $x^2 < 1 \iff (x+1)(x-1) < 0$ diperoleh $-1 < x < 1$. Jadi,

$$f^{-1}\left(\{x \mid 0 < x < 1\}\right) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1\}.$$

▼

Question 4

Buktikan bahwa fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan aturan fungsi $f(x) = 2x - 3$ merupakan fungsi bijektif.

Penyelesaian.

Akan dibuktikan f injektif. Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(x_1) = f(x_2) \iff 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \iff x_1 = x_2$, terbukti.

Akan dibuktikan f surjektif. Ambil sebarang $y \in \mathbb{R}$ dan perhatikan bahwa $\frac{y+3}{2} \in \mathbb{R}$. Misalkan $x = \frac{y+3}{2} \iff 2x = y + 3 \iff 2x - 3 = y \iff f(x) = y$. Hal ini menunjukkan bahwa untuk sebarang $y \in \mathbb{R}$, maka terdapat $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Terbukti.

Jadi, terbukti bahwa f bijektif. ▼