Soal dan Solusi UTS Himpunan dan Logika

Wildan Bagus Wicaksono

Email : wildanbagus@student.ub.ac.id
LinkedIn : Wildan Bagus Wicaksono

Soal 1. (25 poin) Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari: jika p adalah bilangan prima dan p membagi ab maka p membagi a atau p membagi b.

Penyelesaian.
Misalkan pernyataan-pernyataan:

$$\begin{aligned} w &: p \text{ adalah bilangan prima} \\ x &: p \text{ membagi } ab \\ y &: p \text{ membagi } a \\ z &: p \text{ membagi } b \end{aligned}$$

Pernyataan soal ekuivalen dengan $(w \wedge x) \to (y \vee z)$.

- Konvers dari pernyataan tersebut adalah $(y \vee z) \to (w \wedge x)$, yaitu

$$\boxed{\text{jika } p \text{ membagi } a \text{ atau } p \text{ membagi } b \text{ maka } p \text{ adalah bilangan prima dan } p \text{ membagi } ab}.$$

- Invers dari pernyataan tersebut adalah $\neg(w \wedge x) \to \neg(y \vee z) \equiv (\neg w \vee \neg x) \to (\neg y \wedge \neg z)$, yaitu

$$\boxed{\text{jika } p \text{ bukan bilangan prima atau } p \text{ tidak membagi } ab \text{ maka } p \text{ tidak membagi } a \text{ dan } p \text{ tidak membagi } b}.$$

- Kontraposisi dari pernyataan tersebut adalah $\neg(y \vee z) \to \neg(w \wedge x) \equiv (\neg y \wedge \neg z) \to (\neg w \vee \neg x)$, yaitu

$$\boxed{\text{jika } p \text{ tidak membagi } a \text{ dan } p \text{ tidak membagi } b \text{ maka } p \text{ bukan bilangan prima atau } p \text{ tidak membagi } ab}.$$

Soal 2. (25 poin) Buktikan dengan menggunakan hukum-hukum logika (lengkap dengan alasan atau nama hukum di setiap langkahnya) bahwa

$$(p \implies q) \implies (\neg(q \wedge r) \implies \neg(r \wedge p))$$

merupakan tautologi!

Penyelesaian.

$$\begin{array}{rcl}
& (p \implies q) \implies (\neg(q \wedge r) \implies \neg(r \wedge p)) & \textbf{Hukum/Alasan} \\
\equiv & (p \implies q) \implies (\neg(\neg(q \wedge r)) \vee \neg(r \wedge p)) & \text{Switcheroo} \\
\equiv & (p \implies q) \implies ((q \wedge r) \vee \neg(r \wedge p)) & \text{Negasi ganda} \\
\equiv & (p \implies q) \implies ((q \wedge r) \vee (\neg r \vee \neg p)) & \text{De Morgan} \\
\equiv & (p \implies q) \implies ((q \wedge r) \vee \neg r \vee \neg p) & \text{Operasi bersifat setara} \\
\equiv & (p \implies q) \implies (((q \wedge r) \vee \neg r) \vee \neg p) & \text{Operasi bersifat setara} \\
\equiv & (p \implies q) \implies (((q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg r)) \vee \neg p) & \text{Distributif} \\
\equiv & (p \implies q) \implies (((q \vee \neg r) \wedge \mathrm{To}) \vee \neg p) & \text{Invers} \\
\equiv & (p \implies q) \implies ((q \vee \neg r) \vee \neg p) & \text{Identitas} \\
\equiv & (p \implies q) \implies (\neg p \vee q \vee \neg r) & \text{Operasi bersifat setara} \\
\equiv & (\neg p \vee q) \implies (\neg p \vee q \vee \neg r) & \text{Switcheroo} \\
\equiv & \neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee q \vee \neg r) & \text{Swithceroo} \\
\equiv & (\neg(\neg p) \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q \vee \neg r) & \text{De Morgan} \\
\equiv & (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q \vee \neg r) & \text{Negasi ganda} \\
\equiv & (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee q) \vee \neg r & \text{Operasi bersifat setara} \\
\equiv & (p \wedge \neg q) \vee \neg(p \wedge \neg q) \vee \neg r & \text{De Morgan} \\
\equiv & ((p \wedge \neg q) \vee \neg(p \wedge \neg q)) \vee \neg r & \text{Operasi bersifat setara} \\
\equiv & \mathrm{To} \vee \neg r & \text{Invers} \\
\equiv & \mathrm{To} & \text{Dominasi}
\end{array}$$

Jadi, terbukti bahwa $(p \implies q) \implies (\neg(q \wedge r) \implies \neg(r \wedge p))$ merupakan tautologi.

Soal 3. (25 poin)

(a). Diberikan definisi limit L dari barisan bilangan-bilangan riil $a_1, a_2, a_3, \cdots$ sebagai berikut

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall\epsilon > 0\ \exists k > 0\ \forall n\,[(n > k) \implies (|a_n - L| < \epsilon)]\,.$$

Tentukan negasi dari definisi limit tersebut dan tuliskan dalam bentuk kuantor.

(b). Menggunakan kaedah inferensi, berikan alasan-alasan setiap langkah menunjukkan kevalidan argumen berikut (2 cara):

$$[\neg s \wedge (p \vee r) \wedge (p \implies q) \wedge (\neg r \vee s)] \implies q.$$

Penyelesaian.

(a). Untuk memudahkan penulisan, misalkan

$$\begin{aligned} w &: \lim_{n\to\infty} a_n = L \\ x &: \forall\epsilon > 0\ \exists k > 0\ \forall n\,[(n > k) \implies (|a_n - L| < \epsilon)]\,. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa pernyataan soal ekuivalen dengan $w \iff x \equiv (w \implies x) \wedge (x \implies w)$.

	$\neg(w \iff x)$	**Hukum/Alasan**
$\equiv$	$\neg\left((\neg w \vee x) \wedge (\neg x \vee w)\right)$	Swithceroo
$\equiv$	$\neg(\neg w \vee x) \vee \neg(\neg x \vee w)$	De Morgan
$\equiv$	$(\neg(\neg w) \wedge \neg x) \vee (\neg(\neg x) \wedge \neg w)$	De Morgan
$\equiv$	$(w \wedge \neg x) \vee (x \wedge \neg w)$	Negasi ganda

Perhatikan bahwa $\neg w = \lim_{n\to\infty} a_n \neq L$. Untuk memudahkan penulisan, misalkan $b : n > k$ dan $c : |a_n - L| < \epsilon$. Maka $x : \forall\epsilon > 0\ \exists k > 0\ \forall n(b \implies c)$ dan kita punya $\neg x : \exists\epsilon > 0\ \forall k > 0\ \exists n\ \neg(b \implies c)$.

	$\neg(b \implies c)$	**Hukum/Alasan**
$\equiv$	$\neg(\neg b \vee c)$	Switcheroo
$\equiv$	$\neg(\neg b) \wedge \neg c$	De Morgan
$\equiv$	$b \wedge \neg c$	Negasi ganda

Perhatikan bahwa $\neg c : |a_n - L| \geq \epsilon$ dan kita punya $\neg x : \exists\epsilon > 0\ \forall k > 0\ \exists n\ [(n > k) \wedge (|a_n - L| \geq \epsilon)]$. Sehingga negasi dari

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall\epsilon > 0\ \exists k > 0\ \forall n\,[(n > k) \implies (|a_n - L| < \epsilon)]$$

adalah

$$\boxed{\begin{gathered} \left(\left(\lim_{n\to\infty} a_n = L\right) \wedge (\exists\epsilon > 0\ \forall k > 0\ \exists n\ [(n > k) \wedge (|a_n - L| \geq \epsilon)])\right) \\ \vee \\ \left(\left(\lim_{n\to\infty} a_n \neq L\right) \wedge (\forall\epsilon > 0\ \exists k > 0\ \forall n\,[(n > k) \implies (|a_n - L| < \epsilon)])\right) \end{gathered}}\,.$$

(b). Skema pada soal dapat ditulis sebagai

$$\begin{array}{l} \neg s \\ p \vee r \\ p \implies q \\ \underline{\neg r \vee s} \\ \quad \therefore q \end{array}$$

Cara 1:

(1)	$p \vee r$	Premis
(2)	$\neg(\neg p) \vee r$	Negasi ganda (1)
(3)	$\neg p \implies r$	Switcheroo (2)
(4)	$\neg r \vee s$	Premis
(5)	$r \implies s$	Switcheroo (4)
(6)	$\neg p \implies s$	Silogisme Hipotetik (3), (5)
(7)	$\neg s$	Premis
(8)	$\neg(\neg p)$	Modus Tollens (6), (7)
(9)	p	Negasi ganda (8)
(10)	$p \implies q$	Premis
(11)	q	Modus Ponens (9), (10)

Jadi, terbukti bahwa argumen tersebut valid. $\square$

Cara 2:

(1)	$\neg r \vee s$	Premis
(2)	$r \implies s$	Switcheroo (1)
(3)	$\neg s$	Premis
(4)	$\neg r$	Modulos Tollens (2), (3)
(5)	$p \vee r$	Premis
(6)	$\neg(\neg p) \vee r$	Negasi ganda
(7)	$\neg p \implies r$	Switcheroo
(8)	$\neg(\neg p)$	Modus Tollens (4), (7)
(9)	p	Negasi ganda (8)
(10)	$p \implies q$	Premis
(11)	q	Modus Ponens (9), (10)

Jadi, terbukti bahwa argumen tersebut valid. $\square$

Soal 4. (25 poin) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan riil x dan y, jika $x + y \geq 2$ maka $x \geq 1$ atau $y \geq 1$.

Penyelesaian.

Akan kita buktikan dengan kontradiksi, andaikan $x < 1$ dan $y < 1$. Maka kita punya $x+y < 1+1 = 2 \implies x+y < 2$ yang mana kontradiksi dengan $x + y \geq 2$. Jadi, haruslah $x \geq 1$ atau $y \geq 1$ seperti yang ingin dibuktikan. $\square$