Departemen Matematika

Ujian Akhir Semester

Geometri Analitik

Wildan Bagus Wicaksono

Matematika 2022

wildan-wicaksono.github.io

2023

Soal

$\boxed{1}$ Cari persamaan suatu permukaan yang diperoleh dari kurva $z = 2y$ diputar terhadap sumbu-z.

$\boxed{2}$ Perhatikan soal berikut.

(a) Ubah persamaan $r^2 \cos(2\theta) + z^2 = 1$ ke dalam bentuk kartesius.

(b) Ubah persamaan $x^2 + y^2 = 9$ ke dalam bentuk koordinat bola.

$\boxed{3}$ Perhatikan empat titik di ruang berikut:

$$U = (1, 0, 0), \quad V = (0, 2, 0), \quad W = (0, 0, 3), \quad S = (-2, 1, 4).$$

(a) Tentukan persamaan bidang α yang melalui tiga titik U, V, W.

(b) Nyatakan persamaan bidang tersebut dalam bentuk persamaan vektor.

(c) Tentukan jarak titik S ke bidang α.

$\boxed{4}$ Diketahui tiga titik $X = (3, -6, 4), Y = (2, 1, 1)$, dan $Z = (5, 0, -2)$.

(a) Cari vektor unit yang tegak lurus dengan bidang yang melalui tiga titik tersebut.

(b) Tentukan persamaan garis g yang melalui titik $A = (1, 1, 1)$ dan sejajar dengan vektor normal bidang nomor a.

(c) Tentukan titik potong garis g dengan bidang nomor a.

SOAL NOMOR

1

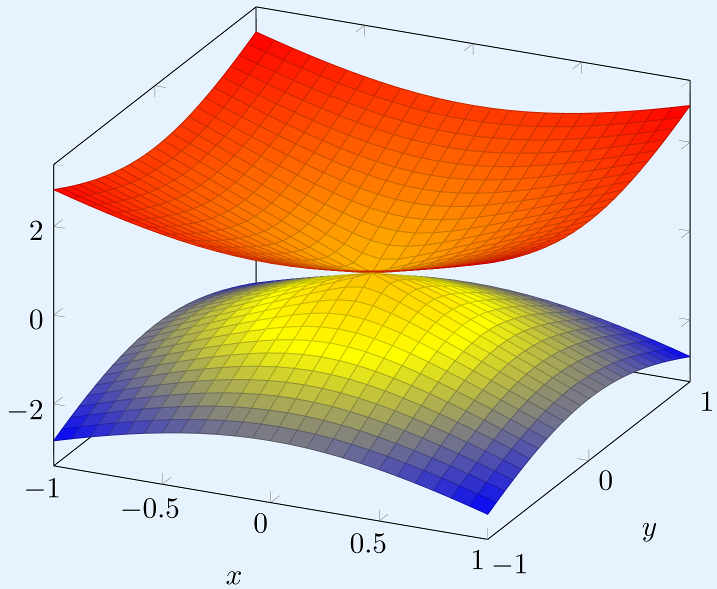
Cari persamaan suatu permukaan yang diperoleh dari kurva $z = 2y$ diputar terhadap sumbu-z.

Solusi:

Buat irisan bidang sejajar bidang-xy, misalkan $z = 2k$ untuk suatu $k \in \mathbb{R}$. Bidang ini akan mengiris hasil rotasi $z = 2y$ dengan sumbu-z berupa lingkaran (berdasarkan sifat rotasi, yakni titik hasil rotasi akan berjarak sama dengan titik pusat rotasinya). Lingkaran tersebut berpusat di titik $(0, 0, 2k)$ dan titik-titik pada lingkaran tersebut berbentuk $(x, y, 2k)$. Selain itu, salah satu titik di lingkaran yang terletak pada bidang-yz salah satunya adalah $(0, k, 2k)$. Jarak $(0, 0, 2k)$ dengan $(0, k, 2k)$ adalah $\sqrt{(0-0)^2 + (k-0)^2 + (2k-2k)^2} = \sqrt{k^2} = |k|$. Jadi, panjang jari-jarinya adalah $|k|$. Maka jarak titik $(x, y, 2k)$ dengan $(0, 0, 2k)$ adalah $|k|$ satuan dan berlaku

$$|k|^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (2k-2k)^2 = x^2 + y^2 \implies x^2 + y^2 = k^2.$$

Dengan mengambil sebarang $z = 2k \iff k = \frac{z}{2}$, maka $\boxed{x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}}$ merupakan persamaan permukaan yang diminta.



Soal Nomor

2

Perhatikan soal berikut.

(a). Ubah persamaan $r^2\cos(2\theta) + z^2 = 1$ ke dalam bentuk kartesius.

(b). Ubah persamaan $x^2 + y^2 = 9$ ke dalam bentuk koordinat bola.

Solusi:

(a) Perhatikan bahwa

$$1 = r^2\cos(2\theta) + z^2 = r^2\left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right) + z^2 = r^2\cos^2(\theta) - r^2\sin^2(\theta) + z^2$$

dan diperoleh $\boxed{1 = x^2 - y^2 + z^2}$ sebagai persamaan yang diminta.

(b) Perhatikan bahwa $9 = x^2 + y^2 = r^2$ sehingga $3 = r = \rho\sin(\varphi) \implies \boxed{\rho\sin(\varphi) = 3}$ sebagai persamaan yang diminta.

SOAL NOMOR

3

Perhatikan empat titik di ruang berikut:

$$U = (1, 0, 0), \quad V = (0, 2, 0), \quad W = (0, 0, 3), \quad S = (-2, 1, 4).$$

(a) Tentukan persamaan bidang α yang melalui tiga titik U, V, W.

(b) Nyatakan persamaan bidang tersebut dalam bentuk persamaan vektor.

(c) Tentukan jarak titik S ke bidang α.

Solusi:

(b) Tinjau vektor $\mathbf{p} = \overrightarrow{UV} = \langle -1, 2, 0 \rangle$ dan $\mathbf{q} = \overrightarrow{UW} = \langle -1, 0, 3 \rangle$. Maka vektor yang tegak lurus $\mathbf{p}$ dan $\mathbf{q}$ adalah

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \langle 6, 3, 2 \rangle .$$

Maka vektor normal bidang α adalah $\mathbf{n} = \langle 6, 3, 2 \rangle$. Ambil sebarang titik $A = (x, y, z)$ di α, maka $\mathbf{m} = \overrightarrow{UA} = \langle x - 1, y - 0, z - 0 \rangle = \langle x - 1, y, z \rangle$. Karena $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$, maka $0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}$, yakni $\boxed{0 = \langle 6, 3, 2 \rangle \cdot \langle x - 1, y, z \rangle}$ sebagai persamaan yang diminta.

(a) Dari (b), diperoleh persamaan bidang α adalah

$$0 = \langle 6, 3, 2 \rangle \cdot \langle x - 1, y, z \rangle = 6(x - 1) + 3y + 2z = 6x - 6 + 3y + 2z$$

yang dapat ditulis sebagai $\boxed{6x + 3y + 2z = 6}$.

(c) Tulis $6x + 3y + 2z - 6 = 0$, jarak titik S dengan α adalah

$$\frac{|6(-2) + 3(1) + 4(2) - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|-12 + 3 + 8 - 6|}{\sqrt{49}} = \frac{|-7|}{7} = \boxed{1}.$$

Soal Nomor

4

Diketahui tiga titik $X = (3, -6, 4), Y = (2, 1, 1)$, dan $Z = (5, 0, -2)$.

(a) Cari vektor unit yang tegak lurus dengan bidang yang melalui tiga titik tersebut.

(b) Tentukan persamaan garis g yang melalui titik $A = (1, 1, 1)$ dan sejajar dengan vektor normal bidang nomor a.

(c) Tentukan titik potong garis g dengan bidang nomor a.

Solusi:

(a) Tulis $\mathbf{a} = \overrightarrow{XY} = \langle 2-3, 1-(-6), 1-4\rangle = \langle -1, 7, -3\rangle$ dan $\mathbf{b} = \overrightarrow{XZ} = \langle 5-3, 0-(-6), -2-4\rangle = \langle 2, 6, -6\rangle$. Maka vektor yang tegak lurus $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ adalah

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 7 & -3 \\ 2 & 6 & -6 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= -24\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 20\mathbf{k} = \langle -24, -12, -20\rangle = -4\langle 6, 3, 5\rangle.$$

Maka vektor tegak lurus bidang yang melalui ketiga titik tersebut adalah $\mathbf{n} = \langle 6, 3, 5\rangle$, yang mana vektor unit yang diminta adalah

$$\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{\langle 6, 3, 5\rangle}{\sqrt{6^2+3^2+5^2}} = \boxed{\left\langle \frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}} \right\rangle}.$$

(b) Ambil sebarang titik $B = (x, y, z)$ di garis g dan tinjau vektor $\mathbf{m} = \overrightarrow{AB} = \langle x-1, y-1, z-1\rangle$. Karena $\mathbf{m}$ sejajar $\mathbf{n}$, maka $\mathbf{m} = t\mathbf{n} = t\langle 6, 3, 5\rangle = \langle 6t, 3t, 5t\rangle$ untuk suatu $t \in \mathbb{R}$. Diperoleh persamaan garis yang diminta adalah $\boxed{x = 6t+1, y = 3t+1, z = 5t+1, t \in \mathbb{R}}$.

(c) Misalkan titik potong garis g dengan bidang tersebut adalah (a, b, c). Karena titik (a, b, c) berada di garis g, maka $a = 6t+1, b = 3t+1$, dan $c = 5t+1$ untuk suatu $t \in \mathbb{R}$. Seperti pada nomor 2, persamaan bidang yang melalui X, Y, Z adalah

$$0 = \mathbf{n}\cdot\langle x-3, y-(-6), z-4\rangle = \langle 6, 3, 5\rangle\cdot\langle x-3, y+6, z-4\rangle = 6(x-3)+3(y+6)+5(z-4)$$

dan diperoleh $6x+3y+5z = 20$. Karena (a, b, c) berada di bidang tersebut, maka memenuhi $20 = 6a+3b+5c$. Substitusikan,

$$20 = 6(6t+1)+3(3t+1)+5(5t+1) = 36t+6+9t+3+25t+5 = 70t+14 \implies t = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}.$$

Jadi, titik potongnya adalah

$$(a, b, c) = (6t+1, 3t+1, 5t+1) = \left(6 \cdot \frac{3}{35} + 1, 3 \cdot \frac{3}{35} + 1, 5 \cdot \frac{3}{35} + 1\right) = \boxed{\left(\frac{53}{35}, \frac{44}{35}, \frac{10}{7}\right)}.$$