

Copyright © 2018 SMP Negeri 1 Probolinggo

Penulis:

Wildan Bagus Wicaksono, Fabian Thariq El Hadi, Ghufon Bagaskara, Yahya Setiawan, Firmansyah Fahmi Nugraha, Lalu Aldo Wadagaprana, Valeent Roynald Subakti, Faricha Azkia Ulfa, Karina Tiara Putri, Anindya Puspita Budiariani, Hersyananda Ramdhani Mahira Arifin, Syefira Adji, Kinasih Asta K., Maulidan Rochmatul Aulia, Lazuardini Dinda Aaqilah.

Editor:

Galih Bagus Wicaksono dan Wildan Bagus Wicaksono

1 Kata Pengantar

Syukur alhamdulillah penulis panjatkan kehadiran Allah Swt., karena hidayah dan inayah-Nya penulisan booklet ini dapat terselesaikan dengan waktu yang telah ditentukan.

Booklet ini merupakan soal dan pembahasan Scemathics Olympiad 2018 bidang matematika yang diadakan oleh Scemathics Center dengan tujuan untuk membantu siswa dalam proses belajar menghadapi olimpiade matematika.

Matematika adalah bahasa universal dan karenanya kemampuan matematika siswa suatu negara sangat mudah dibandingkan dengan negara lain. Selain itu, matematika juga dipakai sebagai alat ukur untuk menentukan kemajuan pendidikan suatu negara. Kita mengenal PISA (*Program for International Student Assessments*) dan TIMSS (*The International Mathematics and Science Survey*) yang secara berkala mengukur dan membandingkan antara lain kemajuan pendidikan matematika di beberapa negara.

Booklet Scemathics Olympiad Bidang Matematika ini diharapkan dapat membantu pembaca untuk mengasah dan meningkatkan kemampuan dalam menghadapi lomba-lomba bergengsi lainnya, seperti OSN, KSM, OMITS, PEMNAS, dan lain-lain. Pada buku ini juga disajikan soal yang diusulkan oleh tim bidang matematika yang tidak diajukan pada soal lomba. Selain itu, juga terdapat beberapa teorema yang disajikan penulis. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus Indonesia Merdeka (2045).

Probolinggo, November 2018

Tim Penulis

Contents

1	Kata Pengantar	2
2	Seputar Scemathics Centre	4
3	Naskah Soal	5
3.1	Kelas 7 Babak Penyisihan	6
3.2	Kelas 7 Babak Final	13
3.3	Kelas 8 Babak Penyisihan	16
3.4	Kelas 8 Babak Final	23
3.5	Kelas 9 Babak Penyisihan	26
3.6	Kelas 9 Babak Final	34
4	Pembahasan	37
4.1	Kelas 7 Babak Penyisihan	38
4.2	Kelas 7 Babak Final	64
4.3	Kelas 8 Babak Penyisihan	78
4.4	Kelas 8 Babak Final	105
4.5	Kelas 9 Babak Penyisihan (<i>Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono</i>)	119
4.6	Kelas 9 Babak Final	151
5	Scemathics Olympiad TST	167
6	Kisah Sang Juara	170
6.1	Fabian Thariq El Hadi	170
6.2	Faricha Azkia Ulfa	172
6.3	Wildan Bagus Wicaksono	173

2 Seputar Scemathics Centre

Scemathics Centre merupakan salah satu organisasi di SMP Negeri 1 Probolinggo bidang akademis. Anggota-anggota Scemathics Centre adalah siswa SMP Negeri 1 Probolinggo. Scemathics Centre adalah tempat di mana siswa dapat berkonsultasi mengenai tugas sekolah, olimpiade, atau PR di bidang Matematika, Ilmu Pengetahuan Alam, dan Ilmu Pengetahuan Sosial.

Setiap hari kecuali hari Jum'at, anggota Scemathics Centre berada di tempatnya masing-masing dan siap menerima dan membantu siswa saat ada kesulitan. Selain itu, sesama anggota Scemathics Centre juga dapat belajar satu sama lain.

Setiap tahun, Scemathics Centre mengadakan lomba olimpiade seperti lomba Olimpiade Matematika dan IPA tingkat SD yang diadakan di Probolinggo dan Scemathics Olympiad yang diadakan di sekolah. Untuk Scemathics Olympiad, lomba ini diadakan untuk siswa SMP Negeri 1 Probolinggo saja. Setiap siswa memilih 1 mata pelajaran diantara 3 bidang: Matematika, Ilmu Pengetahuan Alam, dan Ilmu Pengetahuan Sosial untuk dilombakan. Hal ini bertujuan untuk mengembangkan minat siswa di bidang akademis dan saling bersaing antar siswa di SMP Negeri 1 Probolinggo.



Tim Scemathics Olympiad 2018 Bidang Matematika

Depan dari kanan:

Wildan Bagus Wicaksono, Fabian Thariq El Hadi, Ghuftron Bagaskara, Yahya Setiawan, Firmansyah Fahmi Nugraha, Lalu Aldo Wadagaprana, Valeent Roynald Subakti.

Belakang dari kanan:

Faricha Azkia Ulfa, Karina Tiara Putri, Anindya Puspita Budiariani, Hersyananda Ramdhani Mahira Arifin, Syefira Adji, Kinasih Asta K., Maulidan Rochmatul Aulia, Lazuardini Dinda Aaqilah.

3 Naskah Soal

Kami sajikan naskah soal pada pembaca tanpa adanya solusi. Sehingga pembaca tidak terganggu dan tidak malas untuk mencoba terlebih dahulu. Kami sajikan soal Babak Penyisihan dan Babak Final dari kelas 7, kelas 8, dan kelas 9. Halaman Selanjutnya.

3.1 Kelas 7 Babak Penyisihan

Petunjuk Babak Penyisihan Scemathics Olympiad Kelas 7

1. Soal terdiri 25 soal pilihan ganda.
2. Waktu untuk mengerjakan soal adalah 120 menit.
3. Peserta yang datang terlambat diperbolehkan masuk dan mengerjakan soal dalam waktu yang tersisa (tidak ada tambahan waktu).
4. Isikan identitas dan jawaban pada LJK yang tersedia menggunakan pensil 2B.
5. Peserta **DILARANG** bekerja sama dalam mengerjakan soal.
6. Peserta **DILARANG** menggunakan alat hitung dan alat komunikasi dalam bentuk apapun.
7. Peserta **DILARANG** meminjamkan alat tulis saat proses mengerjakan.
8. Soal dikerjakan apa adanya (tidak ada ralat).
9. Setiap soal dijawab benar mendapat nilai $+4$, salah -1 , dan kosong 0 .

1. Suatu kompetisi mempunyai aturan sebagai berikut:

- Jika menang mendapat nilai 2,
- Jika kalah mendapat nilai -2 , dan
- Jika seri mendapat nilai -1 .

Regu A bermain sebanyak 20 kali dengan 11 kali menang dan 3 kali seri. Nilai yang didapat oleh regu A adalah

- (a) -7
- (b) 4
- (c) -4
- (d) 7

2. Diberikan x, y, z adalah digit dari 1 sampai 9.

- (i). $xyx23$
- (ii). $9yz1$
- (iii). $yzxy21$
- (iv). $2xy2$

Urutan bilangan dari yang terbesar ke yang terkecil adalah

- (a) (iii), (i), (ii), (iv)
- (b) (ii), (iii), (iv), (i)
- (c) (iv), (ii), (i), (iii)
- (d) (i), (iii), (ii), (iv)

3. Himpunan penyelesaian dari $5x + 3 \leq 3x + 11$ dengan x bilangan asli adalah

- (a) $\{1, 2, 3\}$
- (b) $\{2, 3, 4\}$
- (c) $\{0, 1, 2, 3\}$
- (d) $\{1, 2, 3, 4\}$

4. Misalkan n bilangan bulat. Nilai terkecil dari n sehingga jumlah tiga bilangan $4n - 3, 3n - 5, 5n - 4$ tidak bernilai negatif adalah

- (a) -1
- (b) 0
- (c) 1
- (d) 2

5. Hasil dari $-48 + 32 : 4 - 13$ adalah

- (a) -53
- (b) -9
- (c) -17
- (d) -63

6. Jika diketahui

$$9 \# 3 = 4$$

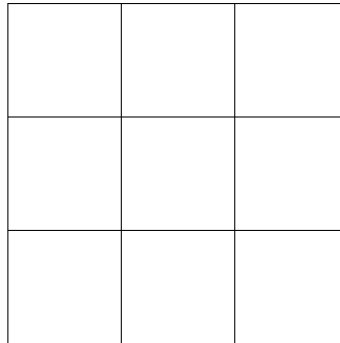
$$4 \# 2 = 9$$

$$7 \# 5 = 36$$

Maka hasil dari $36 \# 4$ adalah

- (a) 9
- (b) $\frac{25}{16}$
- (c) $\frac{9}{4}$
- (d) 1

7. Banyak persegi pada gambar di bawah ini adalah

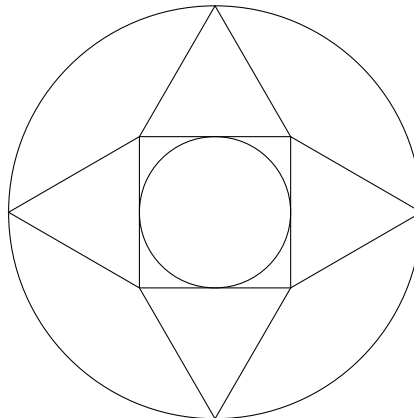


- (a) 9
- (b) 10
- (c) 13
- (d) 14

8. Diketahui $a + b = 11$, $b + c = 16$, dan $a + c = 13$. Maka $(a + b + c)^2$ adalah

- (a) 256
- (b) 400
- (c) 1225
- (d) 1600

9. Perhatikan gambar berikut!



Diberikan sebuah lingkaran kecil, sebuah persegi, dan 4 buah segitiga samasisi. Jika luas lingkaran kecil adalah 154 cm^2 , maka luas lingkaran besar adalah ... cm^2 . $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

- (a) $308(2 + \sqrt{3})$
- (b) $154(2 + \sqrt{3})$
- (c) 616
- (d) 77

10. Urutan bilangan-bilangan berikut dari terkecil ke yang terbesar adalah

$$8^{-2019}, \quad 10^{-2019}, \quad 2019^{-2019}, \quad 9999^{-2019}$$

- (a) $8^{-2019}, 10^{-2019}, 2019^{-2019}, 9999^{-2019}$
- (b) $9999^{-2019}, 2019^{-2019}, 10^{-2019}, 8^{-2019}$
- (c) $10^{-2019}, 9999^{-2019}, 8^{-2019}, 2019^{-2019}$
- (d) $8^{-2019}, 10^{-2019}, 9999^{-2019}, 2019^{-2019}$

11. Jumlah kelereng dari Michael, Jonathan, dan Hansel adalah 56 kelereng. Perbandingan banyak kelereng Michael dan Jonathan adalah 1 : 4 dan perbandingan banyak kelereng Jonathan dan Hansel adalah 2 : 1. Maka banyak kelereng Michael adalah

- (a) 32
- (b) 16
- (c) 24
- (d) 8

12. Di desa Konoha, tim Boruto akan melaksanakan ujian chunin. Mereka diperintahkan untuk mengambil beberapa bendera sesuai dengan waktu yang ditentukan. Adapun beberapa ketentuan pada ujian tersebut sebagai berikut.

- Jika bendera yang mereka ambil bertuliskan *hokage*, maka akan memperoleh 8 poin.
- Jika bendera yang mereka ambil bertuliskan *raikage*, maka akan memperoleh poin 4 poin.
- Jika bendera yang mereka ambil bertuliskan *mizukage*, akan memperoleh 2 poin.

Tim Boruto berhasil mendapatkan 19 bendera antara lain, 5 bendera bertuliskan *hokage*, 8 bendera bertuliskan *raikage*, dan sisanya bendera bertuliskan *mizukage*. Poin yang diperoleh tim Boruto adalah ... poin.

- (a) 84
- (b) 72
- (c) 52
- (d) 44

13. Pada jam 14.00, suhu dari besi adalah 85°C . Besi tersebut didinginkan sehingga setiap 1 jam suhunya turun 10°C . Suhu besi tersebut pada jam 18.00 adalah

- (a) 75°C

- (b) 65°C
- (c) 55°C
- (d) 45°C

14. Jika m memenuhi persamaan

$$m \times (12 \times (-4)) + (37 \times 3) = 15$$

maka nilai dari $3m - 5$ adalah

- (a) 2
- (b) 1
- (c) 5
- (d) 7

15. Nilai dari $1\frac{1}{2} + 4\frac{10}{12} - 3\frac{14}{49}$ adalah

- (a) $3\frac{1}{21}$
- (b) $2\frac{2}{21}$
- (c) $4\frac{1}{42}$
- (d) $3\frac{1}{42}$

16. Nilai dari $\sqrt{56 - \sqrt{56 - \sqrt{56 - \cdots}}}$ adalah

- (a) 6
- (b) 7
- (c) 8
- (d) 9

17. Himpunan penyelesaian dari $x - 4 > -x + 2$ adalah

- (a) $\{x \mid x > -3\}$
- (b) $\{x \mid x > 3\}$
- (c) $\{x \mid x < -3\}$
- (d) $\{x \mid x < 3\}$

18. Pekerja A bisa menyelesaikan pekerjaan dalam waktu 10 hari, sedangkan pekerja B dapat menyelesaikan pekerjaan dalam waktu 30 hari, dan pekerja C bisa menyelesaikan dalam waktu 15 hari. Jika mereka bekerja bersama-sama, waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut adalah ... hari.

- (a) 2
- (b) 7
- (c) 5

(d) 3

19. Nilai dari

$$\sqrt{\underbrace{2018 + 2018 + 2018 + 2018 + \cdots + 2018}_{2018 \text{ suku}}}$$

adalah

- (a) 2018^2
- (b) 2018
- (c) $2018\sqrt{2018}$
- (d) $2018\sqrt{2}$

20. Nilai k yang memenuhi

$$2018 \cdot 1 + 2018 \cdot 2 + 2018 \cdot 3 + 2018 \cdot 4 + 2018 \cdot 5 + \cdots + 2018 \cdot 10 = k \cdot 2018$$

adalah

- (a) 25
- (b) 45
- (c) 55
- (d) 35

21. Jika $\frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{1}{y}$, maka nilai dari $2y$ adalah

- (a) $\frac{9}{2}$
- (b) 9
- (c) 4
- (d) 8

22. Suhu ruangan suatu laboratorium yaitu 32°C . Untuk suatu penelitian, suhu udara di dalam ruangan tersebut harus diturunkan 18°C . Suhu udara di ruangan laboratorium tersebut menjadi

- (a) 14°C
- (b) -14°C
- (c) 40°C
- (d) 50°C

23. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut!

- (i). Memiliki 12 diagonal sisi.
- (ii). Terdiri dari 3 pasang sisi yang kongruen.
- (iii). Memiliki 4 bidang diagonal.
- (iv). Memiliki 8 diagonal ruang.
- (v). Memiliki 8 titik sudut.

Pernyataan di atas yang sesuai dengan sifat balok adalah

- (a) (i), (ii), dan (iii)
(b) (ii), (iii), dan (iv)
(c) (i), (ii), dan (v)
(d) (v), (iv), dan (i)
24. Ibu membeli $3\frac{1}{2}$ kg ikan panggang. Sebanyak 1.250 gram dikonsumsi oleh ibu dan ibu membeli lagi sebanyak 0,75 kg ikan panggang. Ikan panggang tersebut dibagikan kepada tiga tetangganya sehingga setiap tetangga memperoleh jumlah yang sama. Maka setiap tetangga memperoleh sebanyak ... kg.
- (a) 0,5
(b) 1
(c) 1,2
(d) 0,6
25. Nilai dari

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{64^8}} - \sqrt{\sqrt[5]{36^5}}}{\sqrt[4]{\sqrt{125^{\frac{8}{3}}}}}$$

adalah

- (a) $\frac{1}{4}$
(b) $\frac{1}{2}$
(c) 2
(d) 4

3.2 Kelas 7 Babak Final

Petunjuk Babak Final Scemathics Olympiad Kelas 7

1. Pada babak final terdiri dari 10 pos dimana setiap pos masing-masing terdiri dari 1 soal.
2. Waktu untuk mengerjakan setiap soal adalah 9 menit.
3. Isilah identitas dan jawaban beserta prosesnya pada lembar jawaban yang disediakan.
4. Peserta **DILARANG** bekerja sama dalam mengerjakan soal.
5. Peserta **DILARANG** menggunakan alat hitung dan alat komunikasi dalam bentuk apapun.
6. Peserta **DILARANG** meminjamkan alat tulis saat proses mengerjakan.
7. Soal dikerjakan apa adanya (tidak ada ralat).
8. Tidak ada pengurangan nilai jika soal dijawab salah atau kosong (bernilai 0).
9. Setiap soal masing-masing memiliki bobot maksimal 10 poin.

1. Tentukan semua solusi bilangan bulat (x, y) dengan x dan y bilangan berbeda sehingga

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{x}$$

2. Tentukan nilai dari $p^2 + r$ jika

$$\begin{cases} pq^2 + r &= -14 \\ p^2q^2 + r &= 0 \\ p^3q^2 + r &= 3 \end{cases}$$

3. Sebuah taman berbentuk persegi panjang. Jika lebar taman ditambah 8 m dan panjang bertambah 4 m, luasnya akan bertambah 248 m^2 . Jika panjang dan lebarnya berkurang 3 m, luasnya juga berkurang 90 m^2 . Hitunglah luas taman mula-mula.
4. Terdapat kota A, B, C , dan D . Dari kota A menuju kota B terdapat 3 jalan. Dari kota B menuju kota C terdapat 4 jalan. Dari kota C ke kota D ada 5 jalan. Andi berangkat dari Kota A menuju kota B , kemudian ke kota C , kemudian ke kota D . Tentukan banyak cara Andi melakukan variasi rute jalan yang mungkin.

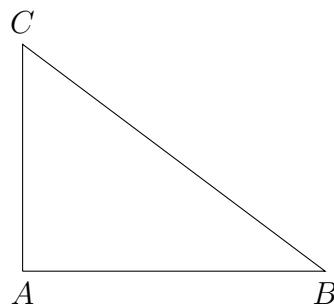
Catatan: Asumsikan setelah melewati kota B tidak dapat kembali ke kota A , setelah melewati kota C tidak dapat kembali ke kota B , dan setelah melewati kota D tidak dapat kembali ke kota C .

5. Diberikan $ABCD$ merupakan trapesium sama kaki dengan AB sejajar CD dan panjang $AB = 8$ dan $CD = 2$. Titik E dan F berturut-turut terletak pada sisi AD dan BC sehingga EF sejajar CD . BD memotong EF di titik G . Jika panjang $AE = 2$ dan $ED = 4$, tentukan panjang BG .
6. Tentukan semua pasangan (a, b) yang memenuhi $a + b = 12$ dan $ab = 8$.
7. Misalkan

$$(20x - 19)^{2019} = a_{2019}x^{2019} + a_{2018}x^{2018} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + c$$

dengan a_i menyatakan koefisien dari x^i untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, 2019$ dan c menyatakan konstanta. Tentukan nilai $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2019}$.

8. Perhatikan $\triangle ABC$ berikut.



$\triangle ABC$ merupakan segitiga siku-siku dimana $\angle CAB = 90^\circ$. Diketahui bahwa panjang BC merupakan bilangan bulat dan juga luas $\triangle ABC$ merupakan bilangan bulat. Misalkan luas $\triangle ABC$ adalah L . Jika keliling $\triangle ABC$ bilangan bulat, buktikan bahwa

$$\sqrt{BC^2 + 4L}$$

merupakan bilangan bulat.

9. Di suatu hari, Divafeds diberi uang oleh ayahnya. Ia membelanjakan $\frac{1}{4}$ uangnya untuk membeli tas. Ia menghabiskan uang sebanyak Rp80.000,00 dari uang yang tersisa untuk membeli bahan pokok. Kemudian ia membeli beberapa peralatan sekolah sebanyak $\frac{1}{2}$ dari sisa uangnya. Jika sisa uang Divafeds sekarang adalah Rp35.000,00, tentukan banyak uang mula-mula Divafeds.
10. Buktikan bahwa
$$\frac{999.999.999.995}{999.999.999.997} < \frac{999.999.999.997}{999.999.999.999}$$

3.3 Kelas 8 Babak Penyisihan

Petunjuk Babak Penyisihan Scemathics Olympiad Kelas 8

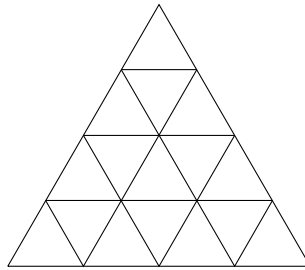
1. Soal terdiri 25 soal pilihan ganda.
2. Waktu untuk mengerjakan soal adalah 120 menit.
3. Peserta yang datang terlambat diperbolehkan masuk dan mengerjakan soal dalam waktu yang tersisa (tidak ada tambahan waktu).
4. Isikan identitas dan jawaban pada LJK yang tersedia menggunakan pensil 2B.
5. Peserta **DILARANG** bekerja sama dalam mengerjakan soal.
6. Peserta **DILARANG** menggunakan alat hitung dan alat komunikasi dalam bentuk apapun.
7. Peserta **DILARANG** meminjamkan alat tulis saat proses mengerjakan.
8. Soal dikerjakan apa adanya (tidak ada ralat).
9. Setiap soal dijawab benar mendapat nilai +4, salah -1 , dan kosong 0.

1. Diberikan x dan y memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} 2x + y &= 8 \\ 10x - 7y &= 28 \end{cases}$$

Nilai dari $4(x - y)$ adalah

- (a) 10
 - (b) 8
 - (c) 6
 - (d) 4
2. Luas lingkaran yang memiliki diameter 20 cm adalah
- (a) 320 cm^2
 - (b) 314 cm^2
 - (c) 1256 cm^2
 - (d) 114 cm^2
3. Banyak segitiga pada gambar di bawah ini adalah

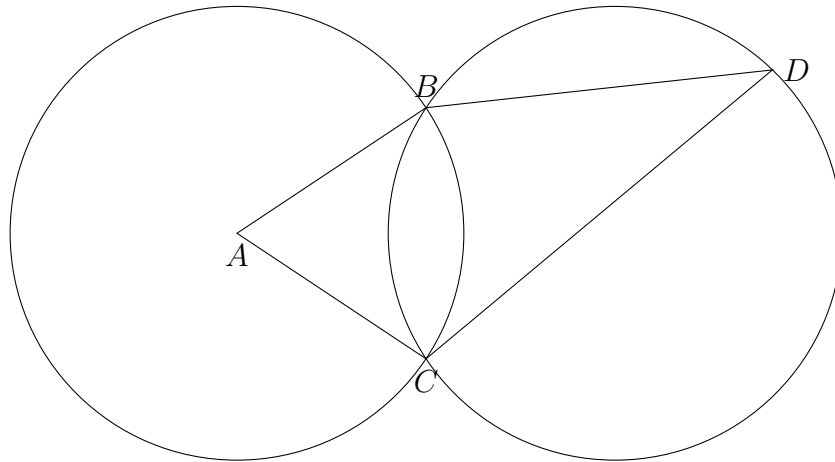


- (a) 16
 - (b) 25
 - (c) 26
 - (d) 27
4. Suku ke-100 pada barisan $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ adalah
- (a) 5050
 - (b) 10100
 - (c) 4950
 - (d) 4851
5. Bentuk sederhana dari $\frac{3^{n+1} - 3^n}{3^n + 3^{n-1}}$ adalah

- (a) $\frac{5}{2}$
- (b) $\frac{5}{3}$
- (c) $\frac{3}{2}$

(d) $\frac{4}{3}$

6. Perhatikan gambar berikut.



Diberikan dua lingkaran kongruen (sama) yang berpotongan di titik B dan C . Titik A merupakan pusat lingkaran dan titik D berada pada keliling lingkaran. Jika besar $\angle BAC = 36^\circ$, maka besar $\angle BDC$ adalah

- (a) 72°
- (b) 24°
- (c) 18°
- (d) 48°

7. Diberikan persegi ajaib berukuran 3×3 sebagai berikut.

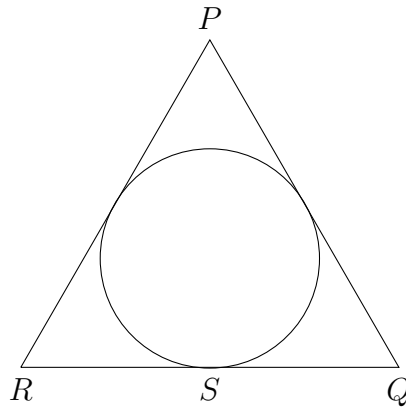
6	a	8
b	5	c
2	d	4

Setiap persegi pada persegi ajaib 3×3 tersebut diisi dengan bilangan asli dari 1 sampai 9 sehingga jumlah diagonal, vertikal, dan horizontal adalah sama. Nilai dari $(a+d) - (b+c)$ adalah

- (a) 0
- (b) 2
- (c) 1
- (d) 4

8. Jika $x + \frac{1}{x} = 5$, maka nilai $x^3 + \frac{1}{x^3}$ adalah

- (a) 100
(b) 105
(c) 110
(d) 115
9. Empat digit terakhir dari hasil $2018! + 2018$ adalah
- (a) 2020
(b) 2019
(c) 2017
(d) 2018
10. Jumlah dari suku ke-5 dan suku ke-10 barisan aritmatika adalah 32. Jumlah 14 suku pertama dari barisan tersebut adalah
- (a) 448
(b) 346
(c) 224
(d) 173
11. Bima akan membuat 100 buah teralis berbentuk busur lingkaran yang terbuat dari besi. Panjang jari-jari lingkaran adalah 14 cm dan besar sudut pusat berbentuk siku-siku. Panjang besi minimal untuk membuat teralis tersebut adalah ... m.
- (a) 22
(b) 66
(c) 2200
(d) 6600
12. Nilai dari
- $$17 + \frac{34}{2} + \frac{51}{3} + \frac{68}{4} + \cdots + \frac{289}{17}$$
- adalah
- (a) 289
(b) 272
(c) 306
(d) 255
13. Diberikan $f(x) = 4x - 2$. Jika $f(m) = 30$ dan $f(2) = n$, maka nilai dari $m + n$ adalah
- (a) 9
(b) 14
(c) 11
(d) 18
14. Perhatikan $\triangle ABC$ dan lingkaran dalam pada gambar di bawah.



Lingkaran dalam $\triangle PQR$ menyinggung sisi RQ di titik S .

Jika $\triangle PQR$ samasisi dengan $QS = 12$ cm, maka luas daerah lingkaran dalam adalah ... cm^2 .

- (a) 80π
- (b) 56π
- (c) 72π
- (d) 48π

15. Hasil dari $\left(\frac{a^5b^3c^3}{4bc}\right) \cdot \left(\frac{8ac}{3bc^{-3}}\right)$ adalah

- (a) $\frac{2a^5bc^{-3}}{3}$
- (b) $\frac{2a^5bc^6}{3}$
- (c) $\frac{2a^6bc^6}{3}$
- (d) $\frac{2a^6bc^5}{3}$

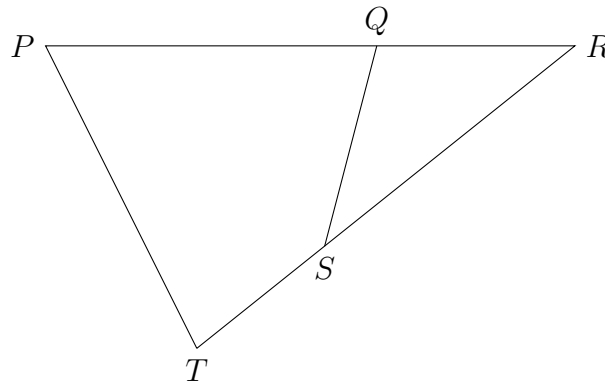
16. Bentuk rasional dari $\frac{4\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}-4}$ adalah

- (a) $-6 - 10\sqrt{3}$
- (b) $-10 - 6\sqrt{3}$
- (c) $10 + 6\sqrt{3}$
- (d) $-6 + 10\sqrt{3}$

17. Kebun paman berbentuk persegi panjang berukuran $50 \text{ m} \times 35 \text{ m}$. Di sekeliling kebun nantinya akan dipasang pagar dengan jarak 5 m antar pagar. Banyak pagar yang dapat dipasang adalah

- (a) 34
- (b) 30
- (c) 36
- (d) 45

18. Dua buah dadu berisi enam diberi nomor baru pada setiap sisinya. Dadu pertama diberi nomor 1, 1, 2, 3, 3, 3 dan dadu kedua diberi nomor $-1, -1, -1, -2, -2, -3$. Jika kedua dadu dilempar bersamaan, maka peluang terjadinya jumlah bilangan pada kedua sisi atas dadu bernilai positif adalah
- (a) $\frac{1}{4}$
 (b) $\frac{1}{2}$
 (c) $\frac{2}{3}$
 (d) $\frac{3}{4}$
19. Diketahui bilangan bulat positif n sehingga $5k + 1$ habis dibagi $3k - 18$. Jumlah semua nilai k yang memenuhi adalah
- (a) 44
 (b) 25
 (c) 59
 (d) 31
20. Perhatikan gambar berikut!



- Diketahui bahwa besar $\angle PTR = \angle RQS$. Jika panjang $PT = 20$ cm, $SR = 24$ cm, panjang $QR = 18$ cm, dan panjang $PQ = 22$ cm, maka perbandingan keliling $PQST$ terhadap $\triangle PRT$ adalah
- (a) 8 : 15
 (b) 3 : 4
 (c) 3 : 5
 (d) 2 : 3
21. Diberikan a dan b bilangan bulat dengan $-10 \leq a \leq b \leq 10$ yang memenuhi

$$a^2 + (a + b)^2 = (a + 2b)^2$$

Banyak pasangan (a, b) yang memenuhi adalah

- (a) 11

- (b) 12
- (c) 13
- (d) 14

22. Banyak digit dari hasil $2018 \times 625^{11} \times 2^{43}$ adalah

- (a) 44
- (b) 46
- (c) 48
- (d) 50

23. Jika $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2018}}} = \frac{m}{n}$ dimana $FPP(m, n) = 1$ dengan m, n bilangan asli, nilai dari $m - n$ adalah

- (a) 2020
- (b) 2019
- (c) 2018
- (d) 2017

24. Diberikan a dan b bilangan asli yang memenuhi persamaan

$$a + 2b = m$$

$$a - b = 7$$

Banyak bilangan asli m dengan $3 \leq m \leq 25$ adalah

- (a) 9
- (b) 7
- (c) 6
- (d) 8

25. Diketahui fungsi f memenuhi persamaan

$$5f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{f(2x)}{x^2} = x$$

untuk $x \neq 0$. Nilai $f(1)$ adalah

- (a) $\frac{3}{7}$
- (b) $\frac{3}{14}$
- (c) $\frac{1}{6}$
- (d) $\frac{1}{7}$

3.4 Kelas 8 Babak Final

Petunjuk Babak Final Scemathics Olympiad Kelas 8

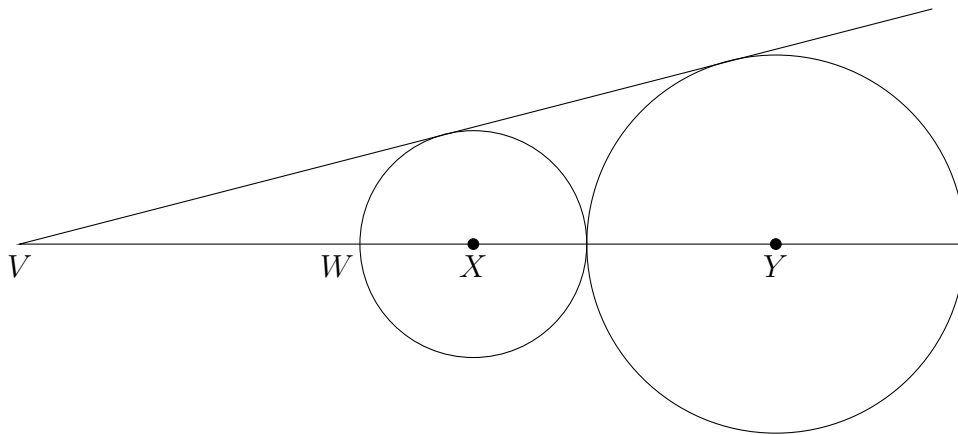
1. Pada babak final terdiri dari 10 pos dimana setiap pos masing-masing terdiri dari 1 soal.
2. Waktu untuk mengerjakan setiap soal adalah 9 menit.
3. Isilah identitas dan jawaban beserta prosesnya pada lembar jawaban yang disediakan.
4. Peserta **DILARANG** bekerja sama dalam mengerjakan soal.
5. Peserta **DILARANG** menggunakan alat hitung dan alat komunikasi dalam bentuk apapun.
6. Peserta **DILARANG** meminjamkan alat tulis saat proses mengerjakan.
7. Soal dikerjakan apa adanya (tidak ada ralat).
8. Tidak ada pengurangan nilai jika soal dijawab salah atau kosong (bernilai 0).
9. Setiap soal masing-masing memiliki bobot maksimal 10 poin.

1. Bilangan asli 4 digit (angka) $abcd$ (dengan a, b, c, d menyatakan angka) disebut *mambu* jika memenuhi syarat-syarat berikut.

- a merupakan bilangan prima,
- b merupakan bilangan kelipatan 2,
- c merupakan bilangan ganjil, dan
- d bernilai bebas.

Sebagai contoh, 2230 dan 3851 merupakan bilangan *mambu*. Tentukan banyak bilangan 4 digit yang *mambu*.

2. Pada gambar dibawah, jari-jari lingkaran kecil adalah 9 cm dan jari-jari lingkaran besar adalah 15 cm. Tentukan panjang VW .



3. Tentukan angka satuan dari

$$1^{2019} - 2^{2019} + 3^{2019} - 4^{2019} + 5^{2019} - 6^{2019} + 7^{2019} - 8^{2019} + 9^{2019}$$

4. Perhatikan bentuk berikut.

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 &= 3^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 &= 6^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 10^2 \end{aligned}$$

dan seterusnya.

Misalkan $S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + 30^3$. Tentukan nilai dari $\sqrt{\frac{S}{2}}$.

5. Dua buah tiang berdampingan berjarak 24 meter dimana puncak dari tiang tersebut akan dihubungkan dengan kawat. Jika tinggi tiang masing-masing adalah 22 meter dan 12 meter, tentukan panjang kawat minimal yang dibutuhkan.
6. Buktikan bahwa harus ada satu diantara a dan b yang bernilai negatif sehingga terdapat pasangan real (a, b) dan memenuhi

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}.$$

7. Tentukan nilai dari

$$\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \cdots + \frac{\frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}}$$

8. Untuk n bilangan asli, didefinisikan $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$. Sebagai contoh, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ dan $3! = 1 \times 2 \times 3$.

Tentukan angka satuan dari

$$(1!)^{2019} + (2!)^{2019} + (3!)^{2019} + \cdots + (2019!)^{2019}$$

9. Shino mengadakan ujian untuk Shikadai dengan ketentuan sebagai berikut:

- Semua soal harus dijawab,
- soal yang dijawab benar mendapat nilai 4, dan
- soal yang dijawab mendapat nilai -1 .

Jika terdapat 40 soal dan Shikadai mendapat nilai 85, tentukan selisih banyak soal yang dijawab benar dan dijawab salah oleh Shikadai.

10. Tentukan semua pasangan bilangan bulat (x, k) dengan $x > 2$ yang memenuhi

$$(x-3)(x-1)(x+1)(x+3) + 16 = k^4$$

3.5 Kelas 9 Babak Penyisihan

Petunjuk Babak Penyisihan Scemathics Olympiad Kelas 9

1. Soal terdiri 30 soal pilihan ganda.
2. Waktu untuk mengerjakan soal adalah 120 menit.
3. Peserta yang datang terlambat diperbolehkan masuk dan mengerjakan soal dalam waktu yang tersisa (tidak ada tambahan waktu).
4. Isikan identitas dan jawaban pada LJK yang tersedia menggunakan pensil 2B.
5. Peserta **DILARANG** bekerja sama dalam mengerjakan soal.
6. Peserta **DILARANG** menggunakan alat hitung dan alat komunikasi dalam bentuk apapun.
7. Peserta **DILARANG** meminjamkan alat tulis saat proses mengerjakan.
8. Soal dikerjakan apa adanya (tidak ada ralat).
9. Setiap soal dijawab benar mendapat nilai $+4$, salah -1 , dan kosong 0 .

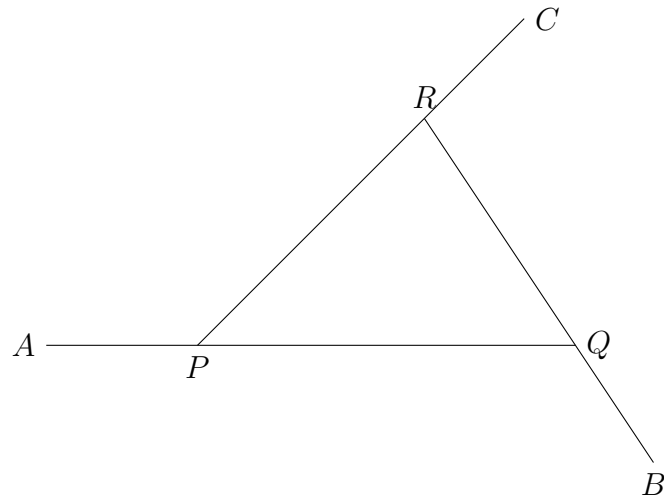
1. Nilai dari $12 + 3 \times (-5) - 12 : 3$ adalah
 - (a) -7
 - (b) -29
 - (c) 7
 - (d) 29
2. Gatan memiliki beras sebanyak $2\frac{3}{5}$ kg. Karena merasa tidak cukup, Gatan membeli lagi beras sebanyak $1\frac{1}{5}$ kg. Setelah itu, beras tersebut dimasak sebanyak $2\frac{1}{4}$ kg. Sisa beras yang dimiliki Gatan sebanyak ... kg.
 - (a) $2\frac{9}{20}$
 - (b) $1\frac{1}{4}$
 - (c) $1\frac{11}{20}$
 - (d) $3\frac{1}{20}$
3. Bentuk sederhana dari $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$ adalah
 - (a) $\sqrt{2}$
 - (b) $2\sqrt{2}$
 - (c) $\sqrt{30}$
 - (d) $-\sqrt{2}$
4. Nilai dari $\left(216^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ adalah
 - (a) -6
 - (b) 6
 - (c) $\frac{1}{6}$
 - (d) $\frac{1}{36}$
5. Suku ke-2019 dari barisan $3, 7, 11, 15, \dots$ adalah
 - (a) 8075
 - (b) 9011
 - (c) 7023
 - (d) 8011
6. Zeta dan Luthfi akan mengecat tembok. Jika Zeta mengerjakan sendirian, Zeta dapat menyelesaikannya selama 24 jam. Jika Zeta dan Luthfi mengerjakan secara bersama-sama, maka mereka dapat menyelesaikannya selama 15 jam. Jika Luthfi mengerjakan sendirian, maka Luthfi dapat menyelesaikannya selama ... jam.
 - (a) 10

- (b) 40
(c) 35
(d) 20
7. Perbandingan kelereng Rizky, Krisna, dan Alif adalah $2 : 3 : 5$. Jumlah kelereng mereka bertiga adalah 110 buah. Selisih uang Rizky dan Krisna adalah ... buah.
- (a) 32
(b) 10
(c) 22
(d) 11
8. Jika k merupakan penyelesaian dari sistem persamaan $4(2x - 1) = 7x + 11$, nilai dari $k + 7$ adalah
- (a) 15
(b) 16
(c) 20
(d) 22
9. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut!
- (i). $9n^2 - 1 = (3n + 1)(3n - 1)$
(ii). $2n^2 - n + 1 = (2n - 1)(n - 1)$
(iii). $4x^2 + 3xy - y^2 = (4x + y)(x - y)$
(iv). $4k^2 - 5k + 1 = (4k - 1)(k - 1)$
- Pernyataan yang benar adalah
- (a) (i) dan (iv)
(b) (ii) dan (iii)
(c) (i) dan (iii)
(d) (ii) dan (iv)
10. Harga dua tas dan sebuah sepatu adalah Rp82.500,00. Harga tiga tas dan dua sepatu adalah Rp140.000,00. Harga sebuah tas dan sebuah sepatu adalah
- (a) Rp49.500,00
(b) Rp65.500,00
(c) Rp57.500,00
(d) Rp43.000,00
11. Diberikan $P = \{x \mid 1 \leq x \leq 8, x \text{ bilangan asli}\}$ dan $Q = \{\text{Faktor positif dari } 18\}$. Maka $(P \cap Q) \cap (P - Q) = \dots$.
- (a) $\{\}$
(b) $\{1, 2, 3, 6\}$
(c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18\}$

- (d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
12. Jumlah siswa di kelas 9.2 ada 30 siswa. Banyak siswa yang menyukai buah jeruk ada 13 siswa, banyak siswa yang menyukai buah apel ada 15 siswa, dan sebanyak 7 siswa tidak menyukai keduanya. Banyak siswa yang menyukai apel sekaligus jeruk adalah
- (a) 3
(b) 4
(c) 5
(d) 6
13. Jika $f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2 + 4x + 7$. Jumlah semua nilai k yang memenuhi $f(k) = 19$ adalah
- (a) -2
(b) 1
(c) 2
(d) -3
14. Diberikan $A = \{\text{Bilangan prima kurang dari } 11\}$ dan $B = \{\text{Faktor positif dari } 2019\}$. Banyak fungsi $f : B \rightarrow A$ adalah
- (a) 16
(b) 25
(c) 128
(d) 256
15. Garis l tegak lurus terhadap garis yang melalui titik $(4, 1)$ dan $(5, 3)$. Gradien garis l adalah
- (a) 2
(b) -2
(c) $\frac{1}{2}$
(d) $-\frac{1}{2}$
16. Persamaan garis yang sejajar dengan $y - 2x = 7$ dan melalui titik $(1, 1)$ adalah
- (a) $y - 2x = 6$
(b) $2x - y = 1$
(c) $2x + y = -9$
(d) $y - 2x = -2$
17. Di sebuah gedung, terdapat 12 baris yang terdiri dari beberapa kursi. Baris pertama terdapat 4 kursi, baris kedua terdapat 7 kursi, baris ketiga terdapat 10 kursi, baris keempat terdapat 13 kursi, dan seterusnya. Banyak kursi di gedung tersebut adalah ... kursi.
- (a) 189
(b) 37

- (c) 231
(d) 246

18. Perhatikan gambar berikut!



Besar $\angle RPA + \angle PQB + \angle QRC$ adalah

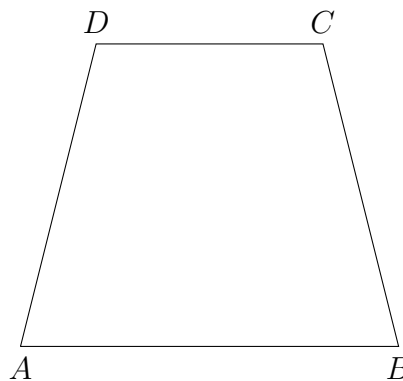
- (a) 225°
(b) 300°
(c) 360°
(d) 400°
19. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$, panjang $AG = 18$ cm. Volume kubus adalah ... cm^3 .
(a) $648\sqrt{3}$
(b) $1458\sqrt{2}$
(c) 216
(d) 729
20. Diberikan 4 buah keping logam masing-masing memiliki dua sisi: gambar dan angka akan dilempar secara bersamaan sebanyak sekali. Peluang munculnya 2 buah angka dan 2 buah gambar adalah
(a) $\frac{3}{4}$
(b) $\frac{3}{8}$
(c) $\frac{3}{16}$
(d) $\frac{1}{3}$
21. Data berikut merupakan daftar kegemaran dari 120 siswa.
- Sebanyak 10% dari seluruh siswa menyukai olahraga kasti,
 - sebanyak 45% dari seluruh siswa menyukai olahraga sepak bola,

- sebanyak 15% dari seluruh siswa menyukai olahraga basket, dan
- sisanya siswa menyukai olahraga voli.

Banyak siswa yang menyukai olahraga voli adalah ... siswa.

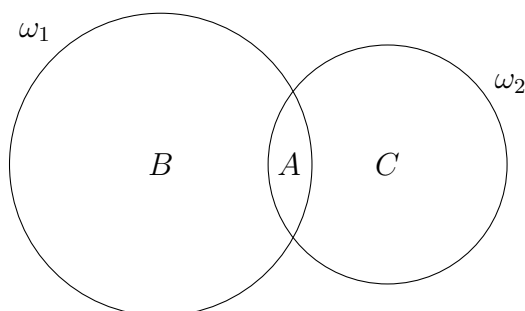
- (a) 54
(b) 18
(c) 36
(d) 24
22. Rata-rata dari 5 orang siswa adalah 80. Seorang siswa mengikuti ulangan susulan dan mendapat nilai 92. Rata-rata dari keenam siswa tersebut adalah
- (a) 87
(b) 77
(c) 80
(d) 82

23. Perhatikan gambar berikut!



Trapesium $ABCD$ merupakan trapesium samakaki. Jika panjang $AB = 24$ cm, panjang $DC = 12$ cm, dan panjang $AD = 10$ cm, luas trapesium $ABCD$ adalah ... cm^2 .

- (a) 72
(b) 144
(c) 180
(d) 288
24. Perhatikan gambar berikut!



Diberikan lingkaran ω_1 dan ω_2 , dan daerah perpotongan kedua lingkaran tersebut dinyatakan dengan A . Daerah lingkaran ω_1 tetapi diluar daerah irisan kedua lingkaran dinyatakan dengan B . Daerah ω_2 tetapi diluar daerah irisan kedua lingkaran dinyatakan dengan C . Luas daerah A adalah $\frac{2}{9}$ luas lingkaran ω_1 dan luas daerah A adalah $\frac{2}{5}$ luas lingkaran ω_2 . Jika luas daerah A adalah 4 satuan luas, maka selisih luas daerah B dan C adalah ... satuan luas.

- (a) 8
- (b) 10
- (c) 2
- (d) 16

25. Diberikan a, b, c merupakan bilangan asli yang memenuhi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = ab + bc + ac$$

Maka nilai dari $a + b + c$ adalah

- (a) 6
- (b) 5
- (c) 4
- (d) 3

26. Banyak bilangan real x yang memenuhi

$$(x^2 - 6x + 9)^{x^2 - 1} = 1$$

adalah

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

27. Diberikan a, b, c memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} \frac{a+1}{b+1} = \frac{b+2}{c+2} = \frac{c+3}{a+3} \\ a+b+c = 6 \end{cases}$$

Maka nilai dari $a \times b \times c$ adalah

- (a) 1
- (b) 8
- (c) 27
- (d) 64

28. Diberikan $f(x) = x^2 + ax + b$ sehingga $f(2) = f(4) = 0$. Nilai dari $f(9)$ adalah

- (a) 35

- (b) 143
- (c) -2
- (d) 57

29. Banyak nilai x yang memenuhi persamaan

$$1 \cdot x^{2019} + 2 \cdot x^{2019} + 3 \cdot x^{2019} + \dots + 100 \cdot x^{2019} = x^{2020}$$

adalah

- (a) 4
- (b) 3
- (c) 2
- (d) 1

30. Banyak pasangan bilangan asli (x, k) dengan $x > 2$

$$(x - 3)(x - 1)(x + 1)(x + 3) + 16 = k^4$$

adalah

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3

3.6 Kelas 9 Babak Final

Petunjuk Babak Final Scemathics Olympiad Kelas 9

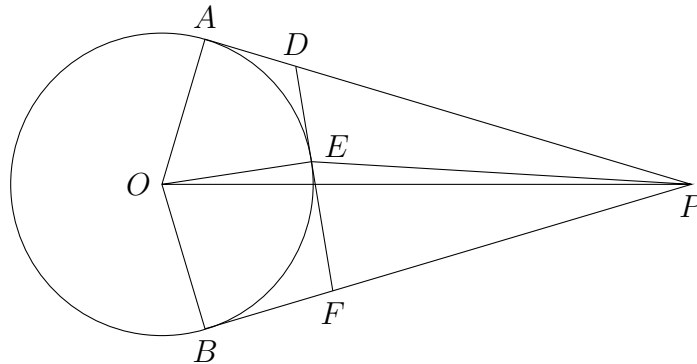
1. Pada babak final terdiri dari 10 pos dimana setiap pos masing-masing terdiri dari 1 soal.
2. Waktu untuk mengerjakan setiap soal adalah 9 menit.
3. Isilah identitas dan jawaban beserta prosesnya pada lembar jawaban yang disediakan.
4. Peserta **DILARANG** bekerja sama dalam mengerjakan soal.
5. Peserta **DILARANG** menggunakan alat hitung dan alat komunikasi dalam bentuk apapun.
6. Peserta **DILARANG** meminjamkan alat tulis saat proses mengerjakan.
7. Soal dikerjakan apa adanya (tidak ada ralat).
8. Tidak ada pengurangan nilai jika soal dijawab salah atau kosong (bernilai 0).
9. Setiap soal masing-masing memiliki bobot maksimal 10 poin.

1. Diberikan $f(x) = x^2 - 8x + 7$.
 - (a) Tentukan semua nilai x sehingga $f(x) = 0$.
 - (b) Buktikan bahwa $f(x) \geq -9$.
 - (c) Tentukan semua nilai x sehingga $f(x) < 0$.
 - (d) Tentukan nilai k sehingga terdapat bilangan real x yang memenuhi $f(x) = k$.
 - (e) Gambarkan grafik $f(x)$.
2. Jika

$$\frac{\sqrt{21+2 \times 108^{\frac{1}{2}}}+(26-6 \sqrt{17})^{\frac{2}{4}}}{2 \sqrt{29+4 \sqrt{51}}}=\frac{m}{n}$$

dimana $FPB(m, n) = 1$ dan m, n bilangan asli, tentukan nilai $m + n$.

3. Perhatikan gambar di bawah!



Titik O merupakan pusat lingkaran. Titik A dan B berada di keliling lingkaran sehingga $\angle PBO = \angle PAO = 90^\circ$. Jika panjang $AP = 17$ cm dan $OB = 4$ cm, tentukan panjang OP .

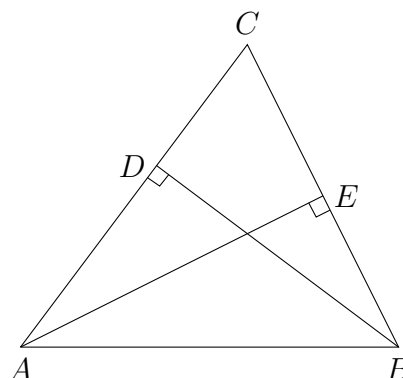
4. Untuk n bilangan asli, didefinisikan $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$. Sebagai contoh, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ dan $3! = 1 \times 2 \times 3$.

Diberikan x dan y bilangan asli yang memenuhi

$$x! + y! = x! \times y!$$

Tentukan semua pasangan (x, y) yang memenuhi.

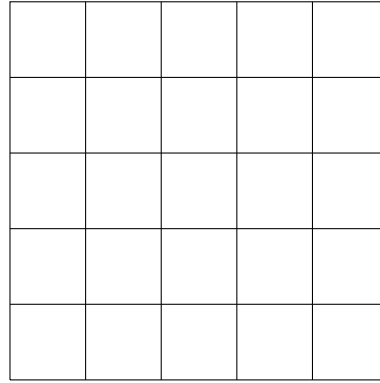
5. Perhatikan gambar berikut!



Diberikan $\triangle ABC$, dengan BD dan AE merupakan garis tinggi $\triangle ABC$.

- (a) Buktikan bahwa besar $\angle DAE = \angle EBD$.
- (b) Buktikan bahwa $ABED$ segiempat talibusur.
- (c) Buktikan bahwa $\angle BAC = \angle DEC$ dan $\angle ABC = \angle CDE$.

6. Diberikan sebuah persegi berukuran 5×5 , dibuat dari beberapa persegi 1×1 .



Tentukan banyak persegi pada gambar di atas.

7. Tentukan banyak bilangan bulat m dengan $3 \leq m \leq 25$ yang memenuhi persamaan

$$\begin{cases} a + 2b = m \\ a - b = 7 \end{cases}$$

dengan a dan b bilangan asli.

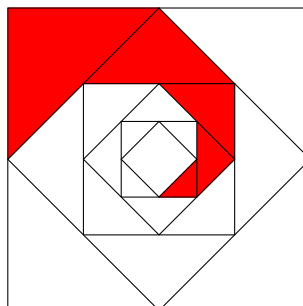
8. Tentukan nilai dari

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{64^8}} - \sqrt{\sqrt[5]{36^5}}}{\sqrt[4]{\sqrt{125^{\frac{8}{3}}}}}$$

9. Tentukan semua nilai x yang memenuhi

$$(x^2 - 8x + 11)^{x^2 - 6x + 8} = 1$$

10. Jika panjang sisi persegi terbesar adalah $\frac{1}{2}$ satuan dan persegi berikutnya diperoleh dengan cara menghubungkan semua titik tengah pada keempat sisinya. Tentukan luas yang diarsir dalam satuan luas.



4 Pembahasan

Pada bagian ini, disajikan pembahasan / solusi dari soal-soal babak penyisihan dan final. Dan akan kami sertakan nama pengusul soal tersebut untuk dilombakan. Halaman Selanjutnya.

4.1 Kelas 7 Babak Penyisihan

1. Suatu kompetisi mempunyai aturan sebagai berikut:

- Jika menang mendapat nilai 2,
- Jika kalah mendapat nilai -2 , dan
- Jika seri mendapat nilai -1 .

Regu A bermain sebanyak 20 kali dengan 11 kali menang dan 3 kali seri. Nilai yang didapat oleh regu A adalah

- (a) -7
- (b) 4
- (c) -4
- (d) 7

Diusulkan oleh Maulidan Rochmatul Aulia

Solusi: (d) 7

Regu A bermain sebanyak 20 kali dengan 11 kali menang dan 3 kali seri. Berarti kelompok A kalah sebanyak

$$20 - 11 - 3 = 6 \text{ kali}$$

Karena menang sebanyak 11 kali, maka mendapat poin sebanyak $11 \times 2 = 22$ poin.

Karena kalah sebanyak 6 kali, maka mendapat poin sebanyak $6 \times (-2) = -12$ poin.

Karena seri sebanyak 3 kali, maka mendapat poin sebanyak $3 \times (-1) = -3$ poin.

Sehingga total poin yang diperoleh regu A adalah

$$22 + (-12) + (-3) = \boxed{7}$$

2. Diberikan x, y, z adalah digit dari 1 sampai 9.

(i). $xyx23$

(ii). $9yz1$

(iii). $yzxy21$

(iv). $2xy2$

Urutan bilangan dari yang terbesar ke yang terkecil adalah

(a) (iii), (i), (ii), (iv)

(b) (ii), (iii), (iv), (i)

(c) (iv), (ii), (i), (iii)

(d) (i), (iii), (ii), (iv)

Diusulkan oleh Yahya Setiawan

Solusi: (a) (iii), (i), (ii), (iv)

Bilangan $xyx23$ memiliki 5 digit.

Bilangan $9yz1$ memiliki 4 digit.

Bilangan $yzxy21$ memiliki 6 digit.

Bilangan $2xy2$ memiliki 2 digit.

Sehingga kita peroleh $yzxy21 > xyx23$.

Perhatikan bahwa angka ribuan dari $9yz1$ adalah 9 dan angka ribuan dari $2xy2$ adalah 2.

Jadi, kita peroleh $9yz1 > 2xy2$.

Demikian kita peroleh $yzxy21 > xyx23 > 9yz1 > 2xy2$.

Jadi, urutan bilangan dari terbesar ke yang terkecil adalah (iii), (i), (ii), (iv).

3. Himpunan penyelesaian dari $5x + 3 \leq 3x + 11$ dengan x bilangan asli adalah
- (a) $\{1, 2, 3\}$
 - (b) $\{2, 3, 4\}$
 - (c) $\{0, 1, 2, 3\}$
 - (d) $\{1, 2, 3, 4\}$

Diusulkan oleh Hersyananda Ramdhani Mahira Arifin

Solusi: (d) $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned}5x + 3 &\leq 3x + 11 \\5x - 3x &\leq 11 - 3 \\2x &\leq 8 \\x &\leq 4\end{aligned}$$

Maka didapatkan $\{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Karena x bilangan asli, sehingga yang memenuhi adalah $\boxed{\{1, 2, 3, 4\}}$.

4. Misalkan n bilangan bulat. Nilai terkecil dari n sehingga jumlah tiga bilangan $4n-3$, $3n-5$, $5n-4$ tidak bernilai negatif adalah

- (a) -1
- (b) 0
- (c) 1
- (d) 2

Diusulkan oleh Kinasih Asta K.

Solusi: (c) 1

Diketahui bahwa jumlah tiga bilangan $4n-3$, $3n-5$, $5n-4$ tidak bernilai negatif. Maka

$$(4n-3) + (3n-5) + (5n-4) \geq 0$$

$$4n-3 + 3n-5 + 5n-4 \geq 0$$

$$12n-12 \geq 0$$

$$12(n-1) \geq 0$$

$$n-1 \geq 0$$

$$n \geq 1$$

Jadi, nilai terkecil dari n adalah $\boxed{1}$.

5. Hasil dari $-48 + 32 : 4 - 13$ adalah

- (a) -53
- (b) -9
- (c) -17
- (d) -63

Diusulkan oleh Karina Tiara Putri

Solusi: (a) -53

$$-48 + 32 : 4 - 13 = -48 + 8 - 13 = \boxed{-53}$$

6. Jika diketahui

$$9 \# 3 = 4$$

$$4 \# 2 = 9$$

$$7 \# 5 = 36$$

Maka hasil dari $36 \# 4$ adalah

- (a) 9
- (b) $\frac{25}{16}$
- (c) $\frac{9}{4}$
- (d) 1

Diusulkan oleh Faricha Azkia Ulfa

Solusi $\frac{25}{16}$

$$9 \# 3 = \left(\frac{9+3}{9-3} \right)^2 = 4$$

$$4 \# 2 = \left(\frac{4+2}{4-2} \right)^2 = 9$$

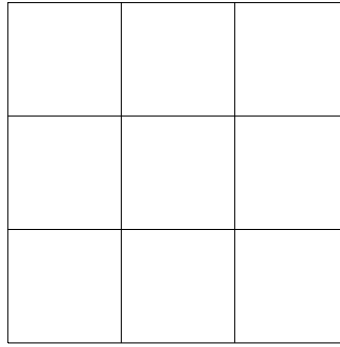
$$7 \# 5 = \left(\frac{7+5}{7-5} \right)^2 = 36$$

Kita peroleh $a \# b = \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2$.

Kita cari nilai $36 \# 4$.

$$36 \# 4 = \left(\frac{36+4}{36-4} \right)^2 = \left(\frac{40}{32} \right)^2 = \left(\frac{5}{4} \right)^2 = \boxed{\frac{25}{16}}$$

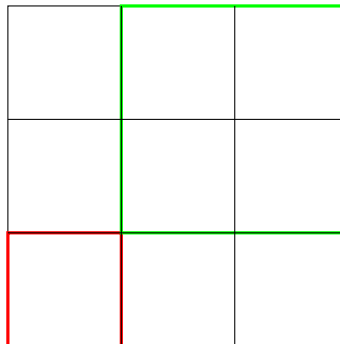
7. Banyak persegi pada gambar di bawah ini adalah



- (a) 9
- (b) 10
- (c) 13
- (d) 14

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (d) 14



Persegi 1×1 ada 9.

Persegi 2×2 ada 4.

Persegi 3×3 ada 1.

Sehingga total ada $9 + 4 + 1 = \boxed{14}$ persegi.

Solusi Alternatif.

Teorema 1

Banyak persegi yang terbentuk dari persegi berukuran $n \times n$ adalah

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Maka banyak persegi yang terbentuk dari persegi 3×3 adalah

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = \boxed{14}$$

8. Diketahui $a + b = 11$, $b + c = 16$, dan $a + c = 13$. Maka $(a + b + c)^2$ adalah
- (a) 256
 - (b) 400
 - (c) 1225
 - (d) 1600

Diusulkan oleh Lazuardini Dinda Aaqilah

Solusi: (b) 400

Dengan menjumlahkan ketiga persamaan tersebut, kita peroleh

$$(a + b) + (b + c) + (a + c) = 11 + 16 + 13$$

$$a + b + b + c + a + c = 40$$

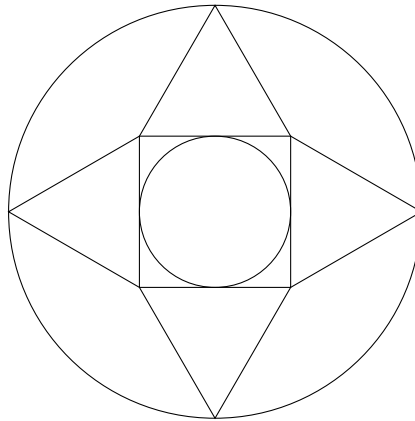
$$2a + 2b + 2c = 40$$

$$2(a + b + c) = 40$$

$$a + b + c = \frac{40}{2}$$

$$(a + b + c)^2 = \boxed{400}$$

9. Perhatikan gambar berikut!

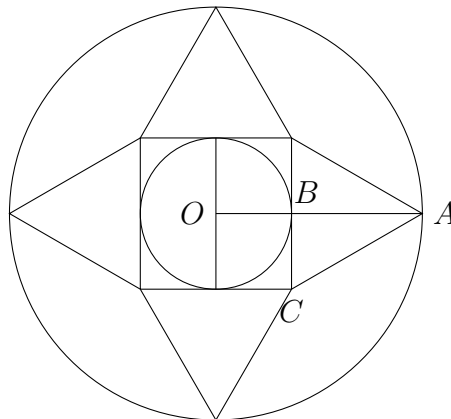


Diberikan sebuah lingkaran kecil, sebuah persegi, dan 4 buah segitiga samasisi. Jika luas lingkaran kecil adalah 154 cm^2 , maka luas lingkaran besar adalah ... cm^2 . $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

- (a) $308(2 + \sqrt{3})$
- (b) $154(2 + \sqrt{3})$
- (c) 616
- (d) 77

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (a) $308(2 + \sqrt{3})$



Misalkan pusat lingkaran kecil adalah O .

Diketahui luas lingkaran kecil adalah 154 cm^2 . Misalkan jari-jari lingkaran kecil adalah r cm.

$$\begin{aligned}
 154 &= \pi \cdot r^2 = \frac{22}{7}r^2 \\
 154 \cdot \frac{7}{22} &= r^2 \\
 49 &= r^2 \\
 7 \text{ cm} &= r
 \end{aligned}$$

Jadi, jari-jari lingkaran kecil adalah 7 cm. Perhatikan bahwa panjang sisi persegi sama dengan diameter lingkaran. Karena jari-jari lingkaran adalah 7 cm, maka diameter lingkaran adalah 14 cm yang berarti panjang sisi persegi adalah 14 cm.

Karena keempat segitiga itu merupakan segitiga sama sisi, maka panjang sisi segitiga tersebut sama dengan panjang sisi persegi yaitu 14 cm. Kita peroleh $AC = 14$ cm.

Perhatikan bahwa BC sama dengan jari-jari lingkaran. Karena $\angle ABC = 90^\circ$, maka dengan Phytagoras berlaku

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ 14^2 &= AB^2 + 7^2 \\ 196 &= AB^2 + 49 \\ 147 &= AB^2 \\ \sqrt{147} &= AB \\ \therefore 7\sqrt{3} &= AB \end{aligned}$$

Karena O juga merupakan pusat lingkaran besar, maka AO merupakan jari-jari lingkaran besar. Padahal kita tahu bahwa

$$AO = AB + BO = 7\sqrt{3} + 7 = 7(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$$

Maka luas lingkaran besar adalah

$$\begin{aligned} L &= \pi \cdot R^2 \\ &= \frac{22}{7} \cdot \left(7(\sqrt{3} + 1)\right)^2 \\ &= \frac{22}{7} \cdot 7^2 \cdot (\sqrt{3} + 1)^2 \\ &= 22 \cdot 7 \cdot \left((\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 + 1^2\right) \\ &= 154(3 + 2\sqrt{3} + 1) \\ &= 154(4 + 2\sqrt{3}) \\ &= 154 \cdot 2(2 + \sqrt{3}) \\ L &= \boxed{308(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2} \end{aligned}$$

10. Urutan bilangan-bilangan berikut dari terkecil ke yang terbesar adalah

$$8^{-2019}, \quad 10^{-2019}, \quad 2019^{-2019}, \quad 9999^{-2019}$$

- (a) $8^{-2019}, 10^{-2019}, 2019^{-2019}, 9999^{-2019}$
- (b) $9999^{-2019}, 2019^{-2019}, 10^{-2019}, 8^{-2019}$
- (c) $10^{-2019}, 9999^{-2019}, 8^{-2019}, 2019^{-2019}$
- (d) $8^{-2019}, 10^{-2019}, 9999^{-2019}, 2019^{-2019}$

Diusulkan oleh Ghufon Bagaskara

Solusi: (b) $9999^{-2019}, 2019^{-2019}, 10^{-2019}, 8^{-2019}$

Berdasarkan $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, maka

$$\begin{aligned} 8^{-2019} &= \frac{1}{8^{2019}} \\ 10^{-2019} &= \frac{1}{10^{2019}} \\ 2019^{-2019} &= \frac{1}{2019^{2019}} \\ 9999^{-2019} &= \frac{1}{9999^{2019}} \end{aligned}$$

Karena $9999 > 2019 > 10 > 8$, maka berakibat $\frac{1}{9999} < \frac{1}{2019} < \frac{1}{10} < \frac{1}{8}$ yang berarti juga $\frac{1}{9999^{2019}} < \frac{1}{2019^{2019}} < \frac{1}{10^{2019}} < \frac{1}{8^{2019}}$.

Demikian kita peroleh $9999^{-2019} < 2019^{-2019} < 10^{-2019} < 8^{-2019}$.

Jadi, urutan bilangan dari terbesar ke yang terkecil adalah $9999^{-2019}, 2019^{-2019}, 10^{-2019}, 8^{-2019}$.

11. Jumlah kelereng dari Michael, Jonathan, dan Hansel adalah 56 kelereng. Perbandingan banyak kelereng Michael dan Jonathan adalah 1 : 4 dan perbandingan banyak kelereng Jonathan dan Hansel adalah 2 : 1. Maka banyak kelereng Michael adalah
- (a) 32
 - (b) 16
 - (c) 24
 - (d) 8

Diusulkan oleh Yahya Setiawan

Solusi: (d) 8

Misalkan banyak kelereng Michael adalah m , banyak kelereng Jonathan adalah j , dan banyak kelereng Hansel adalah h .

Perhatikan bahwa $m : j = 1 : 4$ ekuivalen dengan $\frac{m}{j} = \frac{1}{4}$ yang berarti $j = 4m$.

Perhatikan juga bahwa $j : h = 2 : 1$ ekuivalen dengan $\frac{j}{h} = \frac{2}{1}$ yang berarti $j = 2h$. Karena $j = 4m$, maka $4m = 2h \Rightarrow h = 2m$.

Diketahui bahwa jumlah kelereng mereka bertiga adalah 56 kelereng.

$$\begin{aligned}
 m + j + h &= 56 \\
 m + 4m + 2m &= 56 \\
 7m &= 56 \\
 m &= \frac{56}{7} \\
 \therefore m &= 8
 \end{aligned}$$

Jadi, banyak kelereng Michael adalah 8.

Solusi Alternatif.

Misalkan banyak kelereng Michael adalah m , banyak kelereng Jonathan adalah j , dan banyak kelereng Hansel adalah h .

Diketahui $m : j = 1 : 4$ dan $j : h = 2 : 1$. Perhatikan bahwa $j : h = 4 : 2$. Demikian kita peroleh $m : j : h = 1 : 4 : 2$. Maka banyak kelereng Michael adalah

$$m = \frac{1}{1 + 4 + 2} \cdot 56 = \frac{1}{7} \cdot 56 = \boxed{8}.$$

12. Di desa Konoha, tim Boruto akan melaksanakan ujian chunin. Mereka diperintahkan untuk mengambil beberapa bendera sesuai dengan waktu yang ditentukan. Adapun beberapa ketentuan pada ujian tersebut sebagai berikut.

- Jika bendera yang mereka ambil bertuliskan *hokage*, maka akan memperoleh 8 poin.
- Jika bendera yang mereka ambil bertuliskan *raikage*, maka akan memperoleh poin 4 poin.
- Jika bendera yang mereka ambil bertuliskan *mizukage*, akan memperoleh 2 poin.

Tim Boruto berhasil mendapatkan 19 bendera antara lain, 5 bendera bertuliskan *hokage*, 8 bendera bertuliskan *raikage*, dan sisanya bendera bertuliskan *mizukage*. Poin yang diperoleh tim Boruto adalah ... poin.

- (a) 84
- (b) 72
- (c) 52
- (d) 44

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: (a) 84

Tim Boruto berhasil mendapatkan 19 bendera: 5 bendera bertuliskan *hokage*, 8 bendera bertuliskan *raikage*, dan sisanya bendera bertuliskan *mizukage*. Maka banyak bendera yang bertuliskan *mizukage* yang berhasil didapatkan tim Boruto adalah $19 - 5 - 8 = 6$ bendera.

Karena mendapatkan 5 bendera bertuliskan *hokage*, maka mendapatkan $5 \times 8 = 40$ poin.

Karena mendapatkan 8 bendera bertuliskan *raikage*, maka mendapatkan $8 \times 4 = 32$ poin.

Karena mendapatkan 6 bendera bertuliskan *raikage*, maka mendapatkan $6 \times 2 = 12$ poin.

Sehingga total poin yang diperoleh tim Boruto adalah $40 + 32 + 12 = \boxed{84}$ poin.

13. Pada jam 14.00, suhu dari besi adalah 85°C . Besi tersebut didinginkan sehingga setiap 1 jam suhunya turun 10°C . Suhu besi tersebut pada jam 18.00 adalah
- (a) 75°C
 - (b) 65°C
 - (c) 55°C
 - (d) 45°C

Diusulkan oleh Yahya Setiawan

Solusi: (d) 45°

Dari jam 14.00 sampai jam 18.00 berlangsung selama $18.00 - 14.00 = 4.00$ atau 4 jam. Sehingga suhu tersebut turun $4 \cdot 10^{\circ} = 40^{\circ}$. Sehingga suhu besi tersebut pada jam 18.00 adalah $85^{\circ} - 40^{\circ} = \boxed{45^{\circ}}$.

14. Jika m memenuhi persamaan

$$m \times (12 \times (-4)) + (37 \times 3) = 15$$

maka nilai dari $3m - 5$ adalah

- (a) 2
- (b) 1
- (c) 5
- (d) 7

Diusulkan oleh Maulidan Rochmatul Aulia

Solusi: (b) 1

$$\begin{aligned} m \times (12 \times (-4)) + (37 \times 3) &= 15 \\ m \times (-48) + 111 &= 15 \\ -48m &= 15 - 111 \\ -48m &= -96 \\ m &= \frac{-96}{-48} \\ \therefore m &= 2 \end{aligned}$$

Sehingga nilai dari $3m - 5 = 3(2) - 5 = 6 - 5 = \boxed{1}$.

15. Nilai dari $1\frac{1}{2} + 4\frac{10}{12} - 3\frac{14}{49}$ adalah

- (a) $3\frac{1}{21}$
- (b) $2\frac{2}{21}$
- (c) $4\frac{1}{42}$
- (d) $3\frac{1}{42}$

Diusulkan oleh Ghufon Bagaskara

Solusi: (a) $3\frac{1}{21}$

$$\begin{aligned}1\frac{1}{2} + 4\frac{10}{12} - 3\frac{14}{49} &= (1 + 4 - 3) + \left(\frac{1}{2} + \frac{10}{12} - \frac{14}{49}\right) \\&= 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{2}{7}\right) \\&= 2 + \left(\frac{21 + 35 - 12}{42}\right) \\&= 2 + \frac{44}{42} \\&= 2 + \frac{22}{21} \\&= 2 + 1\frac{1}{21} \\ \therefore 1\frac{1}{2} + 4\frac{10}{12} - 3\frac{14}{49} &= \boxed{3\frac{1}{21}}\end{aligned}$$

16. Nilai dari $\sqrt{56 - \sqrt{56 - \sqrt{56 - \dots}}}$ adalah
- (a) 6
 - (b) 7
 - (c) 8
 - (d) 9

Diusulkan oleh Anindya Puspita Budiariani

Solusi: 7

Misalkan $x = \sqrt{56 - \sqrt{56 - \sqrt{56 - \dots}}}$.

$$x = \sqrt{56 - \sqrt{56 - \sqrt{56 - \dots}}}$$

$$x^2 = 56 - \sqrt{56 - \sqrt{56 - \sqrt{56 - \dots}}}$$

$$x^2 = 56 - x$$

$$x^2 + x - 56 = 0$$

$$(x + 8)(x - 7) = 0$$

Sehingga kita peroleh $x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$ atau $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$. Karena nilai dari bentuk akar kuadrat selalu positif, maka yang memenuhi adalah $x = 7$. Demikian nilai dari $\sqrt{56 - \sqrt{56 - \sqrt{56 - \dots}}} = \boxed{7}$.

Solusi Alternatif.

Teorema 2

Jika terdapat bilangan asli a dan b yang memenuhi $a - b = 1$, maka

$$\sqrt{ab - \sqrt{ab - \sqrt{ab - \dots}}} = b$$

Perhatikan bahwa

$$\sqrt{56 - \sqrt{56 - \sqrt{56 - \dots}}} = \sqrt{8 \cdot 7 - \sqrt{8 \cdot 7 - \sqrt{8 \cdot 7 - \dots}}}$$

Maka kita peroleh $a = 8$ dan $b = 7$. Berarti

$$\sqrt{56 - \sqrt{56 - \sqrt{56 - \dots}}} = \boxed{7}$$

17. Himpunan penyelesaian dari $x - 4 > -x + 2$ adalah

- (a) $\{x \mid x > -3\}$
- (b) $\{x \mid x > 3\}$
- (c) $\{x \mid x < -3\}$
- (d) $\{x \mid x < 3\}$

Diusulkan oleh Hersyananda Ramdhani Mahira Arifin

Solusi: (b) $\{x \mid x > 3\}$

$$x - 4 > -x + 2$$

$$x + x > 2 + 4$$

$$2x > 6$$

$$x > \frac{6}{2}$$

$$\therefore x > 3$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari $x - 4 > -x + 2$ adalah $\boxed{\{x \mid x > 3\}}$.

18. Pekerja A bisa menyelesaikan pekerjaan dalam waktu 10 hari, sedangkan pekerja B dapat menyelesaikan pekerjaan dalam waktu 30 hari, dan pekerja C bisa menyelesaikan dalam waktu 15 hari. Jika mereka bekerja bersama-sama, waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut adalah ... hari.

- (a) 2
- (b) 7
- (c) 5
- (d) 3

Diusulkan oleh Faricha Azkia Ulfa

Solusi: (c) 5

Misalkan mereka bekerja sama dan menyelesaikannya dalam waktu x hari.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} \\ &= \frac{3 + 2 + 1}{30} \\ &= \frac{6}{30} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{5} \\ \therefore x &= 5\end{aligned}$$

Jadi, waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut 5 hari.

19. Nilai dari

$$\sqrt{\underbrace{2018 + 2018 + 2018 + 2018 + \cdots + 2018}_{2018 \text{ suku}}}$$

adalah

- (a) 2018^2
- (b) 2018
- (c) $2018\sqrt{2018}$
- (d) $2018\sqrt{2}$

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (b) 2018

$$\sqrt{\underbrace{2018 + 2018 + 2018 + 2018 + \cdots + 2018}_{2018 \text{ suku}}} = \sqrt{2018 \cdot 2018} = \sqrt{2018^2} = \boxed{2018}$$

20. Nilai k yang memenuhi

$$2018 \cdot 1 + 2018 \cdot 2 + 2018 \cdot 3 + 2018 \cdot 4 + 2018 \cdot 5 + \cdots + 2018 \cdot 10 = k \cdot 2018$$

adalah

- (a) 25
- (b) 45
- (c) 55
- (d) 35

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: (c) 55

$$2018 \cdot 1 + 2018 \cdot 2 + 2018 \cdot 3 + 2018 \cdot 4 + 2018 \cdot 5 + \cdots + 2018 \cdot 10 = k \cdot 2018$$

$$2018(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10) = k \cdot 2018$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 10 = k$$

$$\therefore 55 = k$$

Jadi, nilai k yang memenuhi adalah 55.

21. Jika $\frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{1}{y}$, maka nilai dari $2y$ adalah

- (a) $\frac{9}{2}$
- (b) 9
- (c) 4
- (d) 8

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (b) 9

$$\begin{aligned}\frac{1}{6} + \frac{1}{18} &= \frac{1}{y} \\ \frac{3+1}{18} &= \frac{2}{2y} \\ \frac{4}{18} &= \frac{2}{2y} \\ \therefore \frac{2}{9} &= \frac{2}{2y}\end{aligned}$$

Demikian nilai $2y = \boxed{9}$.

22. Suhu ruangan suatu laboratorium yaitu 32°C . Untuk suatu penelitian, suhu udara di dalam ruangan tersebut harus diturunkan 18°C . Suhu udara di ruangan laboratorium tersebut menjadi

- (a) 14°C
- (b) -14°C
- (c) 40°C
- (d) 50°C

Diusulkan oleh Karina Tiara Putri

Solusi: (a) 14°C

Karena diturunkan sebesar 18°C , maka suhu tersebut pada laboratium menjadi $32^{\circ}\text{C} - 18^{\circ}\text{C} = \boxed{14^{\circ}\text{C}}$.

23. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut!

- (i). Memiliki 12 diagonal sisi.
- (ii). Terdiri dari 3 pasang sisi yang kongruen.
- (iii). Memiliki 4 bidang diagonal.
- (iv). Memiliki 8 diagonal ruang.
- (v). Memiliki 8 titik sudut.

Pernyataan di atas yang sesuai dengan sifat balok adalah

- (a) (i), (ii), dan (iii)
- (b) (ii), (iii), dan (iv)
- (c) (i), (ii), dan (v)
- (d) (v), (iv), dan (i)

Diusulkan oleh Hersyananda Ramdhani Mahira Arifin

Solusi: (c) (i), (ii), dan (v)

Sifat-sifat balok antara lain:

- Sisi-sisi balok berbentuk persegipanjang,
- Rusuk-rusuk yang sejajar memiliki ukuran sama panjang,
- Setiap diagonal bidang pada sisi yang berhadapan memiliki ukuran sama panjang,
- Setiap diagonal ruang pada balok memiliki ukuran sama panjang,
- Setiap bidang diagonal pada balok memiliki bentuk persegipanjang,
- Memiliki 12 rusuk,
- Memiliki 6 sisi,
- Memiliki 8 titik sudut,
- Memiliki 3 pasangan sisi yang sama panjang (kongruen),
- Memiliki 12 diagonal sisi,
- Memiliki 6 bidang diagonal,
- Memiliki 4 diagonal ruang.

Sehingga jawaban yang benar adalah (c) (i), (ii), dan (v).

24. Ibu membeli $3\frac{1}{2}$ kg ikan panggang. Sebanyak 1.250 gram dikonsumsi oleh ibu dan ibu membeli lagi sebanyak 0,75 kg ikan panggang. Ikan panggang tersebut dibagikan kepada tiga tetangganya sehingga setiap tetangga memperoleh jumlah yang sama. Maka setiap tetangga memperoleh sebanyak ... kg.
- (a) 0,5
(b) 1
(c) 1,2
(d) 0,6

Diusulkan oleh Maulidan Rochmatul Aulia

Solusi: (b) 1

Perhatikan bahwa $1.250 \text{ gram} = 1,25 \text{ kg} = 1\frac{1}{4} \text{ kg}$.

Karena dikonsumsi sebanyak $1\frac{3}{4}$ kg, maka sisa ikan panggang sebanyak

$$3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} = (3 - 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2 - \frac{2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4} \text{ kg}$$

Lalu membeli lagi sebanyak $0,75 \text{ kg} = \frac{3}{4} \text{ kg}$. Maka banyak ikan panggang sekarang sebanyak

$$2\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 2 + \frac{1 + 3}{4} = 2 + \frac{4}{4} = 2 + 1 = 3 \text{ kg}$$

Kemudian ikan panggang tersebut dibagikan kepada tiga tetangganya sehingga setiap tetangga memperoleh jumlah yang sama. Karena ada sebanyak 3 kg ikan panggang, maka setiap tetangga memperoleh $\frac{3 \text{ kg}}{3} = \boxed{1} \text{ kg}$.

25. Nilai dari

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{64^8}} - \sqrt{\sqrt[5]{36^5}}}{\sqrt[4]{\sqrt{125^{\frac{8}{3}}}}}$$

adalah

- (a) $\frac{1}{4}$
- (b) $\frac{1}{2}$
- (c) 2
- (d) 4

Diusulkan oleh Valeent Roynald Subakti

Solusi: (c) 2

Berdasarkan $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt[4]{64^8}} &= 64^{8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}} = 64^{\frac{2}{3}} = (2^6)^{\frac{2}{3}} = 2^{6 \cdot \frac{2}{3}} = 2^4 = 16 \\ \sqrt{\sqrt[5]{36^5}} &= 36^{5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = (6^2)^{\frac{1}{2}} = 6^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 6^1 = 6 \\ \sqrt[4]{\sqrt{125^{\frac{8}{3}}}} &= 125^{\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = 125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 5^1 = 5\end{aligned}$$

Kita dapatkan

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{64^8}} - \sqrt{\sqrt[5]{36^5}}}{\sqrt[4]{\sqrt{125^{\frac{8}{3}}}}} = \frac{16 - 6}{5} = \frac{10}{5} = \boxed{2}$$

4.2 Kelas 7 Babak Final

1. Tentukan semua solusi bilangan bulat (x, y) dengan x dan y bilangan berbeda sehingga

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{x}$$

Diusulkan oleh Wildan Bagus W.

Solusi: (1, -1) dan (-1, 1)

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{y} &= y + \frac{1}{x} \\ x - y &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ x - y &= \frac{y - x}{xy} \\ xy &= \frac{y - x}{x - y} \\ \therefore xy &= \frac{-(x - y)}{x - y} \end{aligned}$$

Karena $x \neq y$, maka jelas bahwa $x - y \neq 0$. Sehingga kita peroleh

$$xy = \frac{-(x - y)}{x - y} = -1$$

Mengingat x dan y bilangan bulat, maka hanya akan dipenuhi ketika $(x, y) = (1, -1)$ dan $(-1, 1)$.

Jadi, semua solusi bilangan bulat (x, y) dengan x dan y bilangan berbeda adalah

(1, -1) dan (-1, 1).

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini hanya 0,3 sehingga soal ini dapat dikategorikan soal sangat sulit.
- (b) Kunci utama dalam menyelesaikan soal ini mengubah terlebih dahulu bentuk dari $x + \frac{1}{y} = \frac{xy + 1}{y}$ dan $y + \frac{1}{x} = \frac{xy + 1}{x}$, mengingat bahwa x dan y bilangan bulat berbeda.

2. Tentukan nilai dari $p^2 + r$ jika

$$\begin{cases} pq^2 + r &= -14 \\ p^2q^2 + r &= 0 \\ p^3q^2 + r &= 3 \end{cases}$$

Diusulkan oleh Wildan Bagus W.

Solusi: $3\frac{1863}{2156}$

Misalkan

$$\begin{cases} pq^2 + r &= -14 & (1) \\ p^2q^2 + r &= 0 & (2) \\ p^3q^2 + r &= 3 & (3) \end{cases}$$

Persamaan (2) dikurangi persamaan (1),

$$\begin{aligned} (p^2q^2 + r) - (pq^2 + r) &= 0 - (-14) \\ p^2q^2 + r - pq^2 - r &= 14 \\ pq^2(p - 1) &= 14 \\ \therefore p - 1 &= \frac{14}{pq^2} \end{aligned}$$

Persamaan (3) dikurangi persamaan (1),

$$\begin{aligned} (p^3q^2 + r) - (pq^2 + r) &= 3 - (-14) \\ p^3q^2 + r - pq^2 - r &= 17 \\ p^2q^2(p - 1) &= 17 \\ p^2q^2 \cdot \frac{14}{pq^2} &= 17 \\ \therefore p &= \frac{17}{14} \end{aligned}$$

Substitusikan.

$$\begin{aligned} p - 1 &= \frac{14}{pq^2} \\ \frac{17}{14} - 1 &= \frac{14}{pq^2} \\ -\frac{1}{14} &= \frac{14}{pq^2} \\ pq^2 &= -\frac{196}{1} \\ p \cdot pq^2 &= \frac{17}{14} \cdot \left(-\frac{196}{1}\right) \\ \therefore p^2q^2 &= -\frac{17 \cdot 14}{1} \end{aligned}$$

Subtitusikan.

$$\begin{aligned} p^2 q^2 + r &= 0 \\ -\frac{42}{11} + r &= 0 \\ \therefore r &= \frac{42}{11} \end{aligned}$$

Kita peroleh

$$\begin{aligned} p^2 + r &= \left(\frac{3}{14}\right)^2 + \frac{42}{11} \\ &= \frac{9}{196} + 3\frac{9}{11} \\ &= 3\frac{99 + 1764}{2156} \\ &= 3\frac{1863}{2156} \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $p^2 + r$ adalah $\boxed{3\frac{1863}{2156}}$.

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0 sehingga tingkat kesulitan soal ini dapat dikategorikan sangat sulit.
- (b) Mengolah dari bentuk-bentuk persamaan yang diberikan dan substitusi merupakan kunci utama dalam menyelesaikan soal ini.

3. Sebuah taman berbentuk persegi panjang. Jika lebar taman ditambah 8 m dan panjang bertambah 4 m, luasnya akan bertambah 248 m². Jika panjang dan lebarnya berkurang 3 m, luasnya juga berkurang 90 m². Hitunglah luas taman mula-mula.

Diusulkan oleh Faricha Azkia Ulfa

Solusi: 252 m²

Misalkan panjang persegi panjang adalah p dan lebar persegi panjang adalah l . Maka luas persegi panjang adalah pl .

Diketahui bahwa jika lebar taman ditambah 8 m dan panjang bertambah 4 m, luasnya akan bertambah 248 m². Maka

$$\begin{aligned}(p + 4)(l + 8) &= pl + 248 \\ pl + 8p + 4l + 32 &= pl + 248 \\ pl + 8p + 4l + 32 - pl &= 248 - 32 \\ 8p + 4l &= 216 \\ 4(2p + l) &= 216 \\ 2p + l &= \frac{216}{4} \\ \therefore 2p + l &= 54 \quad (1)\end{aligned}$$

Diketahui bahwa jika panjang dan lebarnya berkurang 3 m, luasnya juga berkurang 90 m².

$$\begin{aligned}(p - 3)(l - 3) &= pl - 90 \\ pl - 3p - 3l + 9 &= pl - 90 \\ pl - 3p - 3l - pl &= -90 - 9 \\ -3p - 3l &= -99 \\ -3(p + l) &= -99 \\ p + l &= \frac{-99}{-3} \\ \therefore p + l &= 33 \quad (2)\end{aligned}$$

Persamaan (1) dikurangi persamaan (2),

$$\begin{aligned}(2p + l) - (p + l) &= 54 - 33 \\ 2p + l - p - l &= 21 \\ p &= 21\end{aligned}$$

Substitusikan.

$$\begin{aligned}p + l &= 33 \\ 21 + l &= 33 \\ l &= 33 - 21 \\ \therefore l &= 12\end{aligned}$$

Kita peroleh panjang persegi panjang adalah 21 m dan lebar persegi panjang adalah 12 m. Sehingga luas persegi panjang mula-mula adalah $21 \text{ m} \times 12 \text{ m} = 252 \text{ m}^2$.

Jadi, luas persegi panjang mula-mula adalah 252 m².

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 1 sehingga soal ini dapat dikategorikan sedang-sulit.
- (b) Kesalahan utama peserta adalah tidak teliti dalam menyelesaikan sistem persamaan, seperti $-90 - 9 = -81$.

4. Terdapat kota A, B, C , dan D . Dari kota A menuju kota B terdapat 3 jalan. Dari kota B menuju kota C terdapat 4 jalan. Dari kota C ke kota D ada 5 jalan. Andi berangkat dari Kota A menuju kota B , kemudian ke kota C , kemudian ke kota D . Tentukan banyak cara Andi melakukan variasi rute jalan yang mungkin.

Catatan: Asumsikan setelah melewati kota B tidak dapat kembali ke kota A , setelah melewati kota C tidak dapat kembali ke kota B , dan setelah melewati kota D tidak dapat kembali ke kota C .

Diusulkan oleh Yahya Setiawan

Solusi: 60 rute

Dari kota A menuju kota B terdapat 3 jalan.

Dari kota B menuju kota C terdapat 4 jalan.

Dari kota C ke kota D terdapat 5 jalan.

Maka total ada $3 \times 4 \times 5 = 60$ rute.

Jadi, banyak cara Andi melakukan variasi rute jalan yang mungkin adalah 60 rute.

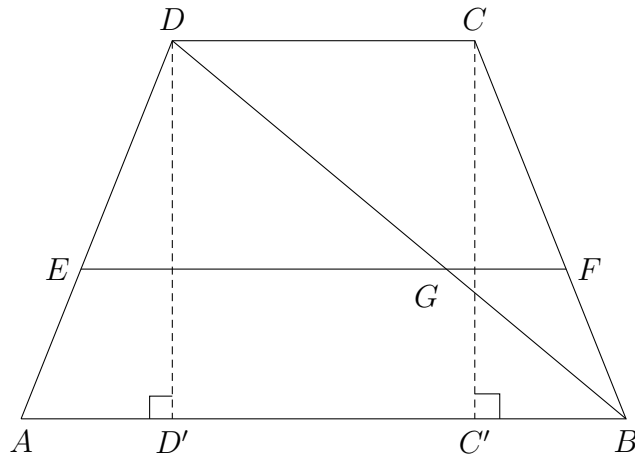
Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 1,5 sehingga tingkat kesulitan soal ini dapat dikategorikan sedang.
- (b) Beberapa peserta melakukan teknik dengan cara mencacah satu per satu namun membutuhkan ketelitian yang tinggi.
- (c) Kesalahan peserta yaitu dengan menjumlahkan banyak rute sehingga banyak rute yang mungkin $3 + 4 + 5 = 12$ rute. Pembaca disarankan untuk membaca tentang *Kaidah Pencacahan*.

5. Diberikan $ABCD$ merupakan trapesium sama kaki dengan AB sejajar CD dan panjang $AB = 8$ dan $CD = 2$. Titik E dan F berturut-turut terletak pada sisi AD dan BC sehingga EF sejajar CD . BD memotong EF di titik G . Jika panjang $AE = 2$ dan $ED = 4$, tentukan panjang BG .

Diusulkan oleh Wildan Bagus W.

Solusi: $\frac{\sqrt{52}}{3}$



Tarik garis tinggi dari titik D dan C sehingga memotong AB berturut-turut di titik D' dan C' . Maka kita peroleh panjang $D'C' = DC = 2$.

Diketahui $ABCD$ adalah trapesium sama kaki. Kita peroleh panjang $AD = BC$ sehingga berakibat panjang $AD' = BC'$. Misalkan panjang $AD' = BC' = x$. Kita tahu bahwa $AB = AD' + D'C' + C'B$.

$$AB = AD' + D'C' + C'B$$

$$8 = x + 2 + x$$

$$8 - 2 = 2x$$

$$6 = 2x$$

$$\frac{6}{2} = x$$

$$\therefore 3 = x$$

Kita peroleh panjang $AD' = C'B = 3$.

Kita tahu bahwa

$$AD = AE + ED = 2 + 4 = 6$$

Perhatikan $\triangle AD'D$. Dengan Phytagoras, kita peroleh

$$AD'^2 + D'D^2 = AD^2$$

$$3^2 + D'D^2 = 6^2$$

$$9 + D'D^2 = 36$$

$$D'D^2 = 36 - 9$$

$$D'D^2 = 27$$

$$D'D = \sqrt{27}$$

$$\therefore D'D = 3\sqrt{3}$$

Perhatikan $\triangle D'BD$. Dengan Phytagoras, maka

$$\begin{aligned} D'D^2 + D'B^2 &= DB^2 \\ 27 + 5^2 &= DB^2 \\ 52 &= DB^2 \\ \therefore \sqrt{52} &= DB \end{aligned}$$

Karena $AB \parallel EF$, maka juga $AB \parallel EG$. Berarti $\triangle ABD$ sebangun dengan $\triangle EGD$.

$$\begin{aligned} \frac{AD}{ED} &= \frac{BD}{DG} \\ \frac{6}{4} &= \frac{\sqrt{52}}{DG} \\ \frac{2}{3} \cdot \sqrt{52} &= DG \\ \therefore DG &= \frac{2\sqrt{52}}{3} \end{aligned}$$

Kita tahu bahwa

$$BG = BD - DG = \sqrt{52} - \frac{2\sqrt{52}}{3} = \frac{3\sqrt{52} - 2\sqrt{52}}{3} = \frac{\sqrt{52}}{3}$$

Jadi, panjang BG adalah $\boxed{\frac{\sqrt{52}}{3}}$.

Komentar:

- Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0 sehingga soal ini dapat dikategorikan soal sangat sulit.
- Kesalahan peserta yaitu antara lain dengan menggunakan $\frac{AB}{EF} = \frac{AD}{DE}$ padahal trape-sium tersebut belum tentu sebangun.

6. Tentukan semua pasangan (m, n) yang memenuhi $m + n = 12$ dan $mn = 8$.

Diusulkan oleh Ghufon Bagaskara

Solusi: $(6 + 2\sqrt{7}, 6 - 2\sqrt{7}), (6 - 2\sqrt{7}, 6 + 2\sqrt{7})$

Misalkan a dan b merupakan akar-akar persamaan kuadrat. Karena $m + n = 12$ dan $mn = 8$, maka bentuk persamaan kuadrat tersebut adalah

$$x^2 - (m + n)x + mn = x^2 - 12x + 8 = 0$$

Kita peroleh $a = 1, b = -12$, dan $c = 8$.

Teorema 3

Jika persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2 , maka

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dengan rumus Kuadratis ABC,

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 32}}{2} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{112}}{2} \\ &= \frac{12 \pm 4\sqrt{7}}{2} \\ \therefore x_1, x_2 &= 6 \pm 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

Sehingga jika $m = 6 + 2\sqrt{7}$, maka $n = 6 - 2\sqrt{7}$. Diperoleh $(m, n) = (6 + 2\sqrt{7}, 6 - 2\sqrt{7})$.

Jika $m = 6 - 2\sqrt{7}$, maka $n = 6 + 2\sqrt{7}$. Diperoleh $(m, n) = (6 - 2\sqrt{7}, 6 + 2\sqrt{7})$.

Ketika dicek kembali, ternyata solusi tersebut memenuhi.

Jadi, semua pasangan $(m, n) = \boxed{(6 + 2\sqrt{7}, 6 - 2\sqrt{7}), (6 - 2\sqrt{7}, 6 + 2\sqrt{7})}$.

Komentar:

- Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0 sehingga tingkat kesulitan soal ini sangat sulit.
- Beberapa peserta tidak dapat memahami maksud dari pasangan (m, n) .
- Sebagian besar peserta menganggap bahwa m dan n bilangan bulat. Padahal pada soal ini tidak dibatasi untuk nilai m dan n .

7. Misalkan

$$(20x - 19)^{2019} = a_{2019}x^{2019} + a_{2018}x^{2018} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + c$$

dengan a_i menyatakan koefisien dari x^i untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, 2019$ dan c menyatakan konstanta. Tentukan nilai $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2019}$.

Diusulkan oleh Lalu Aldo Wadagaprana

Solusi: $1 + 19^{2019}$

Teorema 4

Menurut *Binomial Newton*,

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

dengan $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ dan $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ untuk n, k bilangan asli.
Untuk $0! = 1$.

Maka kita peroleh

$$\begin{aligned} (20x - 19)^{2019} &= \binom{2019}{0}(20x)^{2019}(-19)^0 + \binom{2019}{1}(20x)^{2018}(-19)^1 + \cdots + \\ &\quad \binom{2019}{2018}(20x)^1(-19)^{2018} + \binom{2019}{2019}(20x)^0(-19)^{2019} \\ &= \binom{2019}{0}20^{2019}x^{2019} + \binom{2019}{1}20^{2019}(-19)x^{2018} + \cdots + \\ &\quad \binom{2019}{2018}20^1(-19)^{2018}x + \binom{2019}{2019}(-19)^{2019} \end{aligned}$$

Karena

$$(20x - 19)^{2019} = a_{2019}x^{2019} + a_{2018}x^{2018} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + c$$

sehingga haruslah

$$a_{2019} = \binom{2019}{0}20^{2019}(-19)^0$$

$$a_{2018} = \binom{2019}{1}20^{2018}(-19)^1$$

.....

$$a_1 = \binom{2019}{2018}20^1(-19)^{2018}$$

$$c = \binom{2019}{2019}(-19)^{2019}$$

Kita peroleh

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2019} = \binom{2019}{2018} 20^1 (-19)^{2018} + \binom{2019}{2017} 20^2 (-19)^{2017} + \binom{2019}{2016} 20^3 (-19)^{2016} + \binom{2019}{2015} 20^4 (-19)^{2015} + \cdots + \binom{2019}{2018} 20^1 (-19)^{2018}$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2019} &= \binom{2019}{2018} 20^1 (-19)^{2018} + \binom{2019}{2017} 20^2 (-19)^{2017} + \binom{2019}{2016} 20^3 (-19)^{2016} + \binom{2019}{2015} 20^4 (-19)^{2015} + \cdots + \binom{2019}{1} 20^{2018} (-19)^1 + \binom{2019}{2019} 20^0 (-19)^{2019} - \binom{2019}{2019} 20^0 (-19)^{2019} \\ &= (20 - 19)^{2019} - \binom{2019}{2019} 20^0 (-19)^{2019} \\ &= 1^{2019} - (-19)^{2019} \\ &= 1 - (-19^{2019}) \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2019} = \boxed{1 + 19^{2019}}$$

Solusi Alternatif.

Teorema 5

Jumlah koefisien dan konstanta pada penjabaran $(ax + b)^n$ dengan a merupakan koefisien dan b konstanta adalah $(a + b)^n$.

Jumlah konstanta dan koefisien dari penjabaran $(20x - 19)^{2019}$ adalah $(20 - 19)^{2019} = 1^{2019} = 1$. Dengan kata lain,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2019} + c = 1$$

Perhatikan bahwa suku konstanta dari $(ax + b)^n$ adalah b^n . Maka suku konstanta dari $(20x - 19)^{2019}$ adalah $(-19)^{2019} = -19^{2019}$.

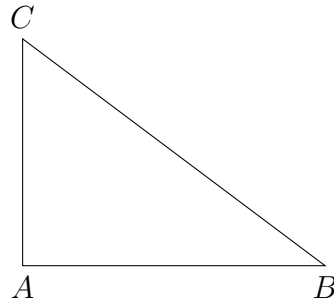
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2019} + c &= 1 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2019} + (-19^{2019}) &= 1 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2019} &= 1 + 19^{2019} \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2019}$ adalah $\boxed{1 + 19^{2019}}$.

Komentar:

- Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0 sehingga soal ini dapat dikategorikan soal sangat sulit.
- Pembaca disarankan untuk membaca tentang *Binomial Newton*.

8. Perhatikan $\triangle ABC$ berikut.



$\triangle ABC$ merupakan segitiga siku-siku dimana $\angle CAB = 90^\circ$. Diketahui bahwa panjang BC merupakan bilangan bulat dan juga luas $\triangle ABC$ merupakan bilangan bulat. Misalkan luas $\triangle ABC$ adalah L . Jika keliling $\triangle ABC$ bilangan bulat, buktikan bahwa

$$\sqrt{BC^2 + 4L}$$

merupakan bilangan bulat.

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Bukti.

Misalkan panjang $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$. Diketahui bahwa c bilangan bulat dan juga luas $\triangle ABC$ bilangan bulat. Sehingga

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times a \times b &= L \\ \therefore ab &= 2L\end{aligned}$$

Diketahui bahwa keliling $\triangle ABC$ bilangan bulat, sehingga $a+b+c$ bilangan bulat. Karena c bilangan bulat, sehingga diperoleh bahwa $a+b$ juga bilangan bulat. Dengan Phytagoras diperoleh:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 \\ (a+b)^2 - 2ab &= c^2 \\ (a+b)^2 &= BC^2 + 2ab \\ &= BC^2 + 2(2L) \\ &= BC^2 + 4L \\ \therefore a+b &= \sqrt{BC^2 + 4L}\end{aligned}$$

Karena $a+b$ bilangan bulat, sehingga diperoleh $\sqrt{BC^2 + 4L}$ juga merupakan bilangan bulat.

Jadi, terbukti bahwa $\sqrt{BC^2 + 4L}$ merupakan bilangan bulat.

Terbukti

Komentar:

- Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0 sehingga soal ini dapat dikategorikan soal sangat sulit.
- Ide pertama dalam menyelesaikan soal ini dengan memisalkan panjang sisi segitiga ABC .

9. Di suatu hari, Divafeds diberi uang oleh ayahnya. Ia membelanjakan $\frac{1}{4}$ uangnya untuk membeli tas. Ia menghabiskan uang sebanyak Rp80.000,00 dari uang yang tersisa untuk membeli bahan pokok. Kemudian ia membeli beberapa peralatan sekolah sebanyak $\frac{1}{2}$ dari sisa uangnya. Jika sisa uang Divafeds sekarang adalah Rp35.000,00, tentukan banyak uang mula-mula Divafeds.

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: Rp200.000,00

Misalkan uang mula-mula Divafeds adalah x .

Ia membelanjakan $\frac{1}{4}$ uangnya untuk membeli tas. Maka sisa uang Divafeds adalah $x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$.

Kemudian ia menghabiskan uang sebanyak Rp80.000,00 dari uang yang tersisa untuk membeli bahan pokok. Maka sisa uang Divafeds adalah $\frac{3}{4}x - \text{Rp}80.000,00$.

Kemudian ia membeli beberapa peralatan sekolah sebanyak $\frac{1}{2}$ dari sisa uangnya. Maka sisa uangnya adalah

$$\left(\frac{3}{4}x - \text{Rp}80.000,00\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \text{Rp}80.000,00\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \text{Rp}80.000,00\right)$$

Diketahui bahwa sisa uangnya adalah Rp35.000,00.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \text{Rp}80.000,00\right) = \text{Rp}35.000,00$$

$$\frac{3}{4}x - \text{Rp}80.000,00 = \text{Rp}35.000,00 \cdot 2$$

$$\frac{3}{4}x - \text{Rp}80.000,00 = \text{Rp}70.000,00$$

$$\frac{3}{4}x = \text{Rp}70.000,00 + \text{Rp}80.000,00$$

$$\frac{3}{4}x = \text{Rp}150.000,00$$

$$x = \text{Rp}150.000,00 \cdot \frac{4}{3}$$

$$\therefore x = \text{Rp}200.000,00$$

Jadi, uang mula-mula Divafeds adalah Rp200.000,00.

Komentar:

- Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 3,7 sehingga tingkat soal ini dapat dikatakan mudah-sedang.
- Langkah pertama yang dapat dilakukan dengan memisalkan uang mula-mula Divafeds seperti pada pembahasan di atas.
- Kesalahan peserta yaitu tidak memberikan keterangan lebih lanjut apa yang dimisalkan. Sehingga jawaban peserta tidak sepenuhnya jelas.
- Beberapa peserta langsung menebak dari beberapa harga tas dan peralatan sekolah. Tetapi, hal tersebut akan mendapatkan poin minimum bahkan 0.

10. Buktikan bahwa

$$\frac{999.999.999.995}{999.999.999.997} < \frac{999.999.999.997}{999.999.999.999}$$

PDiusulkan oleh Yahya Setiawan

Bukti.

Misalkan

$$a = \frac{999.999.999.995}{999.999.999.997} \quad \text{dan} \quad b = \frac{999.999.999.997}{999.999.999.999}$$

Maka

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \frac{999.999.999.997}{999.999.999.995} = 1 + \frac{2}{999.999.999.995} \\ \frac{1}{b} &= \frac{999.999.999.999}{999.999.999.997} = 1 + \frac{2}{999.999.999.997} \end{aligned}$$

Karena $999.999.999.995 < 999.999.999.997$, berakibat

$$\begin{aligned} \frac{1}{999.999.999.995} &> \frac{1}{999.999.999.997} \\ \frac{2}{999.999.999.995} &> \frac{2}{999.999.999.997} \\ 1 + \frac{2}{999.999.999.995} &> 1 + \frac{2}{999.999.999.997} \\ \frac{1}{a} &> \frac{1}{b} \\ a &< b \\ \therefore \frac{999.999.999.995}{999.999.999.997} &< \frac{999.999.999.997}{999.999.999.999} \end{aligned}$$

Terbukti

Solusi Alternatif.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &< \frac{3}{7} \\ \frac{2}{4} &< \frac{4}{6} \\ \frac{3}{5} &< \frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$\text{Maka } \frac{999.999.999.995}{999.999.999.997} < \frac{999.999.999.997}{999.999.999.999}.$$

Terbukti

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 1,6 sehingga soal ini dapat dikategorikan soal sedang-sulit.
- (b) Kesalahan peserta yaitu hanya memberikan satu contoh, sebagai contoh hanya memberikan $\frac{1}{3} < \frac{3}{7}$ (1 contoh). Hal ini belum memberikan bukti yang kuat bahwa pernyataan pada soal benar.

4.3 Kelas 8 Babak Penyisihan

1. Diberikan x dan y memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} 2x + y &= 8 \\ 10x - 7y &= 28 \end{cases}$$

Nilai dari $4(x - y)$ adalah

- (a) 10
- (b) 8
- (c) 6
- (d) 4

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: (a) 10

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (10x - 7y) - (2x + y) &= 28 - 8 \\ 10x - 7y - 2x - y &= 20 \\ 8x - 8y &= 20 \\ 8(x - y) &= 20 \\ \therefore 4(x - y) &= \boxed{10} \end{aligned}$$

2. Luas lingkaran yang memiliki diameter 20 cm adalah
- (a) 320 cm^2
 - (b) 314 cm^2
 - (c) 1256 cm^2
 - (d) 114 cm^2

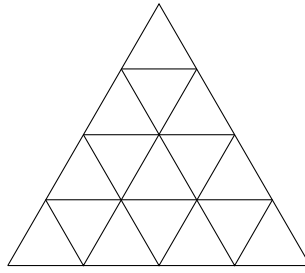
Diusulkan oleh Karina Tiara Putri

Solusi: (b) 314 cm^2

Karena diameter lingkaran adalah 20 cm, maka jari-jari lingkaran adalah 10 cm. Jadi, luas lingkaran adalah

$$L = \pi r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi = 100 \cdot 3,14 = \boxed{314 \text{ cm}^2}$$

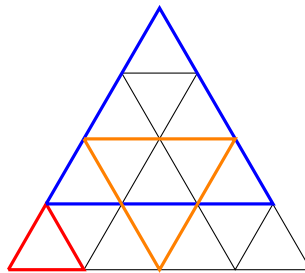
3. Banyak segitiga pada gambar di bawah ini adalah



- (a) 16
- (b) 25
- (c) 26
- (d) 27

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (d) 27



Banyak segitiga yang terbentuk dengan 1 segitiga adalah 16.

Banyak segitiga yang terbentuk dengan 4 segitiga adalah 7.

Banyak segitiga yang terbentuk dengan 8 segitiga adalah 3.

Banyak segitiga yang terbentuk dengan 16 segitiga adalah 1.

Jadi, banyak segitiga yang terbentuk adalah $16 + 7 + 3 + 1 = \boxed{27}$.

4. Suku ke-100 pada barisan $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ adalah
- (a) 5050
 - (b) 10100
 - (c) 4950
 - (d) 4851

Diusulkan oleh Karina Asta K.

Solusi: (a) 5050

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}1 &= 1 \\3 &= 1 + 2 \\6 &= 1 + 2 + 3 \\10 &= 1 + 2 + 3 + 4 \\15 &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5\end{aligned}$$

Sehingga barisan tersebut membentuk bilangan segitiga. Maka kita peroleh $U_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Sehingga suku ke-100 pada barisan tersebut adalah

$$U_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = \boxed{5050}$$

5. Bentuk sederhana dari $\frac{3^{n+1} - 3^n}{3^n + 3^{n-1}}$ adalah

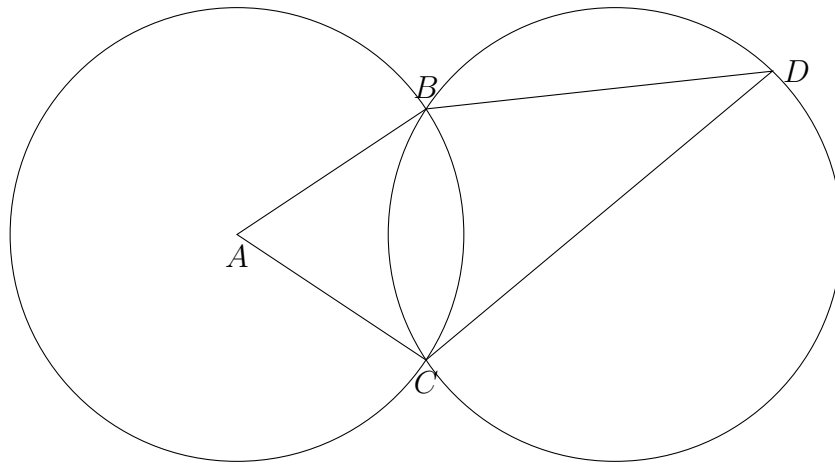
- (a) $\frac{5}{2}$
- (b) $\frac{5}{3}$
- (c) $\frac{3}{2}$
- (d) $\frac{4}{3}$

Diusulkan oleh Syefira Adji

Solusi: (c) $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
 \frac{3^{n+1} - 3^n}{3^n + 3^{n-1}} &= \frac{3^n \cdot 3 - 3^n \cdot 1}{3^{n-1} \cdot 3 + 3^{n-1}} \\
 &= \frac{3^n(3 - 1)}{3^{n-1}(3 + 1)} \\
 &= \frac{3^n \cdot 2}{3^{n-1} \cdot 4} \\
 &= \frac{3^n}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 3 \cdot \frac{1}{2} \\
 \therefore \frac{3^{n+1} - 3^n}{3^n + 3^{n-1}} &= \boxed{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

6. Perhatikan gambar berikut.

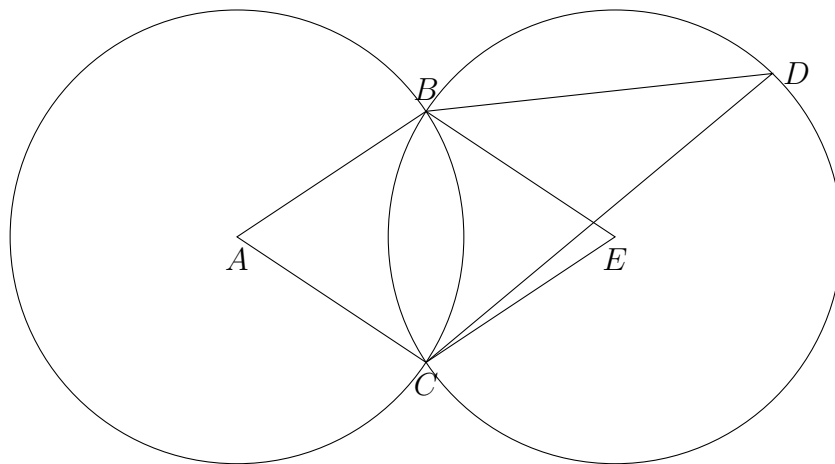


Diberikan dua lingkaran kongruen (sama) yang berpotongan di titik B dan C . Titik A merupakan pusat lingkaran dan titik D berada pada keliling lingkaran. Jika besar $\angle BAC = 36^\circ$, maka besar $\angle BDC$ adalah

- (a) 72°
- (b) 24°
- (c) 18°
- (d) 48°

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (c) 18°



Misalkan E merupakan pusat lingkaran.

Karena kedua lingkaran tersebut kongruen, maka besar $\angle BEC = \angle BAC = 36^\circ$. Karena $\angle BEC$ merupakan sudut pusat dan $\angle BDC$ merupakan sudut keliling dimana masing-masing menghadap busur yang sama, maka berlaku

$$\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BEC = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = \boxed{18^\circ}$$

7. Diberikan persegi ajaib berukuran 3×3 sebagai berikut.

6	a	8
b	5	c
2	d	4

Setiap persegi pada persegi ajaib 3×3 tersebut diisi dengan bilangan asli dari 1 sampai 9 sehingga jumlah diagonal, vertikal, dan horizontal adalah sama. Nilai dari $(a+d) - (b+c)$ adalah

- (a) 0
- (b) 2
- (c) 1
- (d) 4

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (a) 0

6	a	8
b	5	c
2	d	4

Perhatikan bahwa jumlah diagonalnya adalah 15.

Diketahui bahwa jumlah diagonal, vertikal, dan horizontal adalah sama. Maka haruslah

$$a + 5 + d = 15 \implies a + d = 10$$

dan

$$b + 5 + c = 15 \implies b + c = 10$$

Sehingga nilai dari $(a+d) - (b+c) = 10 - 10 = \boxed{0}$.

8. Jika $x + \frac{1}{x} = 5$, maka nilai $x^3 + \frac{1}{x^3}$ adalah

- (a) 100
- (b) 105
- (c) 110
- (d) 115

Diusulkan oleh Syefira Adji

Solusi: (c) 110

Teorema 6

Berlaku

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

Maka

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$5^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot 5$$

$$125 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 15$$

$$125 - 15 = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = \boxed{110}$$

9. Empat digit terakhir dari hasil $2018! + 2018$ adalah
- (a) 2020
 - (b) 2019
 - (c) 2017
 - (d) 2018

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (d) 2018

Perhatikan bahwa empat digit terakhir dari $20!$ adalah 0000. Maka empat digit terakhir dari $2018!$ adalah 0000. Sehingga kita peroleh empat digit terakhir dari $2018! + 2018$ adalah $\boxed{2018}$.

Teorema 7

Banyak angka nol berurutan dari kanan (tanpa terputus oleh angka selain 0) pada ekspresi $n!$ adalah

$$\left\lfloor \frac{n}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^4} \right\rfloor + \cdots$$

dengan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

10. Jumlah dari suku ke-5 dan suku ke-10 barisan aritmetika adalah 32. Jumlah 14 suku pertama dari barisan tersebut adalah

- (a) 448
- (b) 346
- (c) 224
- (d) 173

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (c) 224

Teorema 8

Pada barisan aritmetika, berlaku

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Maka $U_5 = a + 4b$ dan $U_{10} = a + 9b$. Diketahui bahwa jumlah dari suku ke-5 dan suku ke-10 adalah 32.

$$\begin{aligned}U_5 + U_{10} &= 32 \\(a + 4b) + (a + 9b) &= 32 \\a + 4b + a + 9b &= 32 \\2a + 13b &= 32\end{aligned}$$

Pada barisan aritmetika, juga berlaku $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$. Sehingga jumlah 14 suku pertama dari barisan tersebut adalah

$$S_{14} = \frac{14}{2}(2a + 13b) = 7 \cdot 32 = \boxed{224}$$

11. Bima akan membuat 100 buah teralis berbentuk busur lingkaran yang terbuat dari besi. Panjang jari-jari lingkaran adalah 14 cm dan besar sudut pusat berbentuk siku-siku. Panjang besi minimal untuk membuat teralis tersebut adalah ... m.
- (a) 22
 - (b) 66
 - (c) 2200
 - (d) 6600

Diusulkan oleh Maulidan Rochmatul Aulia

Solusi: (a) 22

Perhatikan bahwa panjang teralis dengan $\frac{1}{4}$ panjang busur lingkaran. Maka panjang sebuah teralis adalah

$$\frac{1}{4}K_{\odot} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2r = \frac{1}{4} \cdot \frac{22}{7} \cdot 2 \cdot 14 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$$

Maka panjang besi dari 100 teralis adalah $100 \times 22 \text{ cm} = 2200 \text{ cm} = \boxed{22} \text{ m}$.

12. Nilai dari

$$17 + \frac{34}{2} + \frac{51}{3} + \frac{68}{4} + \cdots + \frac{289}{17}$$

adalah

- (a) 289
- (b) 272
- (c) 306
- (d) 255

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (a) 289

$$17 + \frac{34}{2} + \frac{51}{3} + \frac{68}{4} + \cdots + \frac{289}{17} = \underbrace{17 + 17 + 17 + 17 + \cdots + 17}_{17 \text{ suku}} = 17 \cdot 17 = \boxed{289}$$

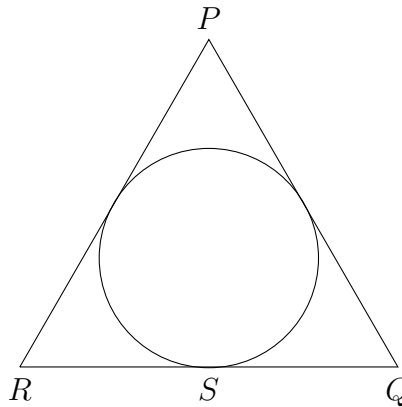
13. Diberikan $f(x) = 4x - 2$. Jika $f(m) = 30$ dan $f(2) = n$, maka nilai dari $m + n$ adalah ...
- (a) 9
(b) 14
(c) 11
(d) 18

Diusulkan oleh Ghufron Bagaskara

$$\begin{aligned}f(m) &= 30 \\4m - 2 &= 30 \\4m &= 30 + 2 \\4m &= 32 \\m &= \frac{32}{4} \\\therefore m &= 8 \\f(2) &= n \\4 \cdot 2 - 2 &= n \\8 - 2 &= n \\\therefore 6 &= n\end{aligned}$$

Maka nilai $m + n = 8 + 6 = \boxed{14}$.

14. Perhatikan $\triangle ABC$ dan lingkaran dalam pada gambar di bawah.



Lingkaran dalam $\triangle PQR$ menyinggung sisi RQ di titik S .

Jika $\triangle PQR$ samasisi dengan $QS = 12$ cm, maka luas daerah lingkaran dalam adalah ... cm^2 .

- (a) 80π
- (b) 56π
- (c) 72π
- (d) 48π

Diusulkan oleh Lazuardini Dinda Aaqila

Solusi: (d) 48π

Teorema 9

Suatu segitiga yang memiliki panjang sisi a , b , dan c , maka panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga tersebut adalah

$$r = \frac{2L_{\triangle}}{a + b + c}$$

Teorema 10

Jika suatu segitiga sama sisi memiliki panjang sisi x satuan, maka luas segitiga tersebut adalah

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 \sqrt{3} \text{ satuan luas}$$

Karena $\triangle PQR$ segitiga sama sisi, maka titik S juga merupakan titik tengah RQ . Karena panjang $QS = 12$ cm, maka panjang $RQ = 24$ cm. Sehingga kita dapatkan juga panjang

$PQ = PQ = RQ = 24$ cm. Maka panjang jari-jari lingkaran dalam $\triangle PQR$ adalah

$$\begin{aligned} r &= \frac{2L_{\triangle ABC}}{K_{\triangle ABC}} \\ &= \frac{2 \cdot \left(\frac{24}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{24 + 24 + 24} \\ &= \frac{2 \cdot 12^2 \sqrt{3}}{72} \\ &= \frac{2 \cdot 144 \sqrt{3}}{72} \\ \therefore r &= 4\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

Maka luas lingkaran dalam tersebut adalah

$$L = \pi r^2 = \pi \left(4\sqrt{3}\right)^2 = \boxed{48\pi} \text{ cm}^2$$

15. Hasil dari $\left(\frac{a^5b^3c^3}{4bc}\right) \cdot \left(\frac{8ac}{3bc^{-3}}\right)$ adalah

- (a) $\frac{2a^5bc^{-3}}{3}$
- (b) $\frac{2a^5bc^6}{3}$
- (c) $\frac{2a^6bc^6}{3}$
- (d) $\frac{2a^6bc^5}{3}$

Diusulkan oleh Hersyananda Ramdhani Mahira Arifin

Solusi: (c) $\frac{2a^6bc^6}{3}$

$$\left(\frac{a^5b^3c^3}{4bc}\right) \cdot \left(\frac{8ac}{3bc^{-3}}\right) = \frac{2a^{5+1}b^{3-1-1}c^{3+1-1}}{2c^{-3}} = \frac{2a^6bc^3}{3c^{-3}} = \frac{2a^6bc^{3-(-3)}}{3} = \boxed{\frac{2a^6bc^6}{3}}$$

16. Bentuk rasional dari $\frac{4\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}-4}$ adalah

- (a) $-6 - 10\sqrt{3}$
- (b) $-10 - 6\sqrt{3}$
- (c) $10 + 6\sqrt{3}$
- (d) $-6 + 10\sqrt{3}$

Diusulkan oleh Hersyananda Ramdhani Mahira Arifin

Solusi: (b) $-10 - 6\sqrt{3}$

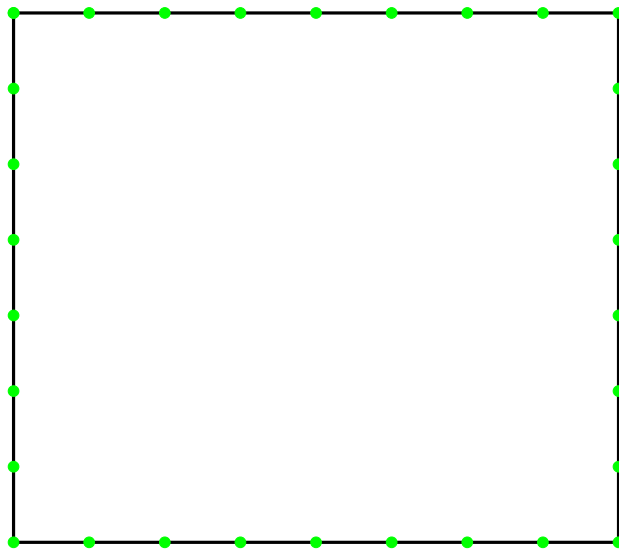
$$\begin{aligned}
 \frac{4\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}-4} &= \frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} \\
 &= \frac{(2\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} \\
 &= \frac{6+4\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4}{(\sqrt{3})^2-2^2} \\
 &= \frac{10+6\sqrt{3}}{3-4} \\
 &= \frac{10+6\sqrt{3}}{-1} \\
 \therefore \frac{4\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}-4} &= \boxed{-10-6\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

17. Kebun paman berbentuk persegi panjang berukuran $50\text{ m} \times 35\text{ m}$. Di sekeliling kebun nantinya akan dipasang pagar dengan jarak 5 m antar pagar. Banyak pagar yang dapat dipasang adalah

- (a) 34
- (b) 30
- (c) 36
- (d) 45

Diusulkan oleh Karina Tiara Putri

Solusi: (a) 34



Sehingga banyak pagar yang dipasang adalah 34.

18. Dua buah dadu berisi enam diberi nomor baru pada setiap sisinya. Dadu pertama diberi nomor 1, 1, 2, 3, 3, 3 dan dadu kedua diberi nomor $-1, -1, -1, -2, -2, -3$. Jika kedua dadu dilempar bersamaan, maka peluang terjadinya jumlah bilangan pada kedua sisi atas dadu bernilai positif adalah

- (a) $\frac{1}{4}$
 (b) $\frac{1}{2}$
 (c) $\frac{2}{3}$
 (d) $\frac{3}{4}$

Diusulkan oleh Syefira Adji

Solusi: (b) $\frac{1}{2}$

	1	1	2	3	3	3
-1	0	0	1	2	2	2
-1	0	0	1	2	2	2
-1	0	0	1	2	2	2
-2	-1	-1	0	1	1	1
-2	-1	-1	0	1	1	1
-3	-2	-2	-1	0	0	0

Kita peroleh $n(A) = 18$ dan $n(S) = 36$. Sehingga peluangnya adalah $P(A) = \frac{18}{36} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

19. Diketahui bilangan bulat positif k sehingga $5k + 1$ habis dibagi $3k - 18$. Jumlah semua nilai k yang memenuhi adalah

- (a) 44
- (b) 25
- (c) 59
- (d) 31

Diusulkan oleh Firmansyah Fahmi Nugraha

Solusi: (a) 44

Agar $5k + 1$ habis dibagi $3k - 18$, maka $\frac{5k + 1}{3k - 18}$ harus bilangan bulat.

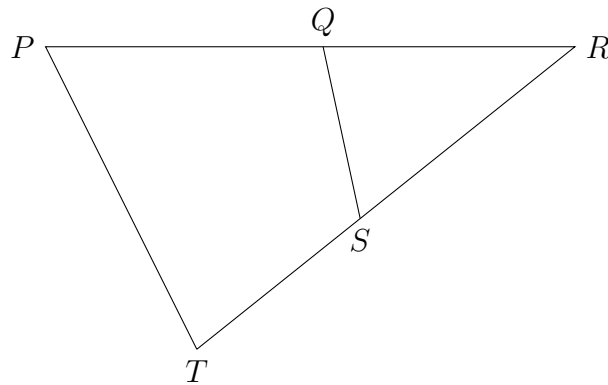
$$\begin{aligned}\frac{5k + 1}{3k - 18} &= \frac{1}{3} \left(\frac{5k - 1}{k - 6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{(5k - 30) + 31}{k - 6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{5k - 30}{k - 6} + \frac{31}{k - 6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{5(k - 6)}{k - 6} + \frac{31}{k - 6} \right) \\ \therefore \frac{5k + 1}{3k - 18} &= \frac{1}{3} \left(5 + \frac{31}{k - 6} \right)\end{aligned}$$

Agar $5 + \frac{31}{k - 6}$ bilangan bulat, maka $\frac{31}{k - 6}$ bilangan bulat. Karena 31 bilangan prima, maka hanya memiliki faktor 1, 31, -1, dan -31.

- Jika $k - 6 = 31$, maka $k = 37$. Ketika dicek, ternyata $\frac{5k + 1}{3k - 18} = 2$ (Memenuhi).
- Jika $k - 6 = 1$, maka $k = 7$. Ketika dicek, ternyata $\frac{5k + 1}{3k - 18} = 12$ (Memenuhi).
- Jika $k - 6 = -1$, maka $k = 5$. Ketika dicek, ternyata $\frac{5k + 1}{3k - 18} = -\frac{26}{3}$ (Tidak memenuhi).
- Jika $k - 6 = -31$, maka $k = -25$ (Tidak memenuhi).

Sehingga nilai k yang memenuhi hanyalah ketika $k = 37$ dan $k = 7$. Jadi, jumlah semua bilangan bulat positif k yang memenuhi adalah $7 + 37 = \boxed{44}$.

20. Perhatikan gambar berikut!



Diketahui bahwa besar $\angle PTR = \angle RQS$. Jika panjang $PT = 20$ cm, $SR = 24$ cm, panjang $QR = 18$ cm, dan panjang $PQ = 22$ cm, maka perbandingan keliling $PQST$ terhadap $\triangle PRT$ adalah

- (a) 8 : 15
- (b) 3 : 4
- (c) 3 : 5
- (d) 2 : 3

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (d) 2 : 3

Karena $\angle PTR = \angle RQS$ dan $\angle QRS = \angle PRT$, kita peroleh $\angle QSR = \angle TPR$. Berarti $\triangle PRT$ sebangun dengan $\triangle QRS$. Maka

$$\begin{aligned}\frac{QR}{RT} &= \frac{RS}{PR} \\ \frac{18}{RT} &= \frac{24}{40} \\ RT &= 18 \cdot \frac{40}{24} \\ \therefore RT &= 30 \text{ cm} \\ \frac{PT}{QS} &= \frac{PR}{RS} \\ \frac{20}{QS} &= \frac{40}{24} \\ QS &= 20 \cdot \frac{24}{40} \\ \therefore QS &= 12 \text{ cm}\end{aligned}$$

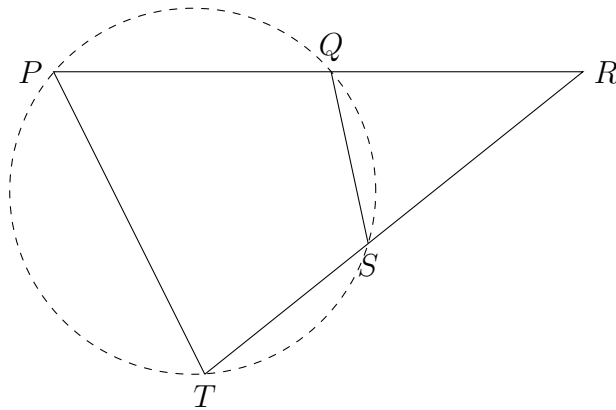
Sehingga perbandingan keliling $PQST$ terhadap $\triangle PRT$ adalah

$$\frac{K_{PQST}}{K_{\triangle PRT}} = \frac{20 + 6 + 12 + 22}{20 + 30 + 40} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

Jadi, perbandingan keliling $PQST$ terhadap $\triangle PRT$ adalah $\boxed{2 : 3}$.

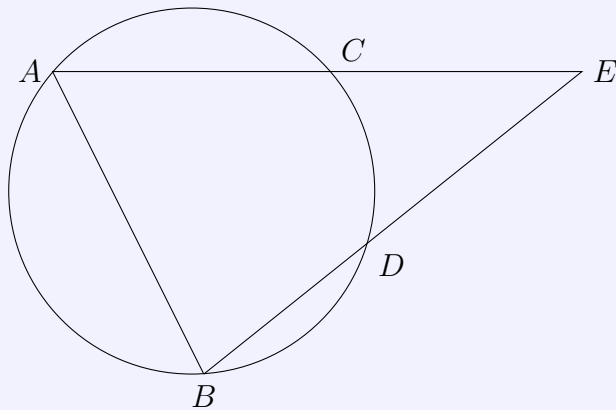
Solusi Alternatif.

Karena $\angle PTR = \angle RQS$ dan $\angle QRS = \angle PRT$, kita peroleh $\angle QSR = \angle TPR$. Maka $PQST$ merupakan segiempat tali busur.

**Teorema 11**

Menurut *Power Of a Point*, berlaku

$$EC \cdot EA = ED \cdot EB$$



Dengan *Power Of a Point*, berlaku

$$RQ \cdot RP = RS \cdot RT$$

$$18 \cdot 40 = 24 \cdot RT$$

$$RT = \frac{18 \cdot 40}{24}$$

$$\therefore RT = 30 \text{ cm}$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama seperti pada solusi sebelumnya.

21. Diberikan a dan b bilangan bulat dengan $-10 \leq a \leq b \leq 10$ yang memenuhi

$$a^2 + (a + b)^2 = (a + 2b)^2$$

Banyak pasangan (a, b) yang memenuhi adalah

- (a) 11
- (b) 12
- (c) 13
- (d) 14

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: (d) 14

$$\begin{aligned} a^2 + (a + b)^2 &= (a + 2b)^2 \\ a^2 + (a^2 + 2ab + b^2) &= a^2 + 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2 \\ a^2 + a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + 4ab + 4b^2 \\ 2a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + 4ab + 4b^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 - 4ab &= 4b^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= 4b^2 \\ (a - b)^2 &= 4b^2 \\ a - b &= \pm 2b \\ \therefore a &= \pm 2b + b \end{aligned}$$

Kasus 1: $a = 3b$

Karena $a \leq b$, maka haruslah $3b \leq b \Rightarrow b \leq 0$.

- Jika $b = 0$, maka $a = 0$.
- Jika $b = -1$, maka $a = -3$.
- Jika $b = -2$, maka $a = -4$.
- Jika $b = -3$, maka $a = -9$.
- Jika $b = -4$, maka $a = -12$ (Tidak memenuhi).

Maka kita dapatkan 3 pasangan (a, b) .

Kasus 2: $a = -b$

Karena $a \leq b$, maka haruslah $-b \leq b \Rightarrow 0 \leq b$.

- Jika $b = 0$, maka $a = 0$.
- Jika $b = 1$, maka $a = -1$.
- Jika $b = 2$, maka $a = -2$.
- Jika $b = 3$, maka $a = -3$
-
- Jika $b = 10$, maka $a = -10$.

Maka kita dapatkan 11 pasangan (a, b) .

Karena ada yang sudah terhitung di **Kasus 1**, maka pasangan seluruhnya ada $4 + 10 =$
14.

22. Banyak digit dari hasil $2018 \times 625^{11} \times 2^{43}$ adalah

- (a) 44
- (b) 46
- (c) 48
- (d) 50

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: (c) 48

Teorema 12

Ingat bahwa

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{dan} \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

Maka kita dapatkan

$$\begin{aligned} 2018 \times 625^{11} \times 2^{43} &= 2 \times 1009 \times (5^4)^{11} \times 2^{43} \\ &= 2^{1+43} \times 1009 \times 5^{44} \\ &= 2^{44} \times 5^{44} \times 1009 \\ &= (2 \times 5)^{44} \times 1009 \\ &= 10^{44} \times 1009 \\ &= \underbrace{1009}_{4 \text{ digit}} \underbrace{0000 \cdots 000}_{44 \text{ digit}} \end{aligned}$$

Sehingga banyak digit dari $2018 \times 625^{11} \times 2^{43}$ adalah $4 + 44 = \boxed{48}$ digit.

23. Jika $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2018}}} = \frac{m}{n}$ dimana $FPB(m, n) = 1$ dengan m, n bilangan asli, nilai dari $m - n$ adalah

- (a) 2020
- (b) 2019
- (c) 2018
- (d) 2017

Diusulkan oleh Faricha Azkia Ulfa

Solusi: (b) 2019

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2018}}} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2019}{2018}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{2018}{2019}} \\
 &= 1 + \frac{1}{\frac{4037}{2019}} \\
 &= 1 + \frac{2019}{4037} \\
 \therefore \frac{m}{n} &= \frac{6056}{4037}
 \end{aligned}$$

Karena $FPB(6056, 4037) = 1$, kita dapatkan $m = 6056$ dan $n = 4037$. Sehingga nilai $m - n = 6056 - 4037 = \boxed{2019}$.

24. Diberikan a dan b bilangan asli yang memenuhi persamaan

$$\begin{aligned}a + 2b &= m \\ a - b &= 7\end{aligned}$$

Banyak bilangan asli m dengan $3 \leq m \leq 25$ adalah

- (a) 9
- (b) 7
- (c) 6
- (d) 8

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: (c) 6

Dengan mengurangkan kedua persamaan,

$$\begin{aligned}(a + 2b) - (a - b) &= m - 7 \\ a + 2b - a + b &= m - 7 \\ 3b &= m - 7 \\ \therefore b &= \frac{m - 7}{3}\end{aligned}$$

Karena b bilangan bulat, maka $m - 7 \equiv 0 \pmod{3}$. Karena $7 \equiv 1 \pmod{3}$, maka haruslah $m \equiv 1 \pmod{3}$. Mengingat bahwa b bilangan asli, haruslah $m - 7 > 0 \Rightarrow m > 7$.

- Untuk $m = 10$, maka diperoleh $b = 1$ dan $a = 8$.
- Untuk $m = 13$, maka diperoleh $b = 2$ dan $a = 9$.
- Untuk $m = 16$, maka diperoleh $b = 3$ dan $a = 10$.
- Untuk $m = 19$, maka diperoleh $b = 4$ dan $a = 11$.
- Untuk $m = 22$, maka diperoleh $b = 5$ dan $a = 12$.
- Untuk $m = 25$, maka diperoleh $b = 6$ dan $a = 13$.

Sehingga terdapat $\boxed{6}$ bilangan asli m yang memenuhi.

Catatan:

Definisi $a \equiv b \pmod{c}$ adalah a bersisa b jika dibagi c . Sebagai contoh, $5 \equiv 2 \pmod{3}$ karena 5 bersisa 2 jika dibagi 3 dan $10 \equiv 0 \pmod{5}$ karena 10 bersisa 0 jika dibagi 5.

25. Diketahui fungsi f memenuhi persamaan

$$5f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{f(2x)}{x^2} = x$$

untuk $x \neq 0$. Nilai $f(1)$ adalah

- (a) $\frac{3}{7}$
- (b) $\frac{3}{14}$
- (c) $\frac{1}{6}$
- (d) $\frac{1}{7}$

Diusulkan oleh Kinasih Asta K.

Solusi: (b) $\frac{3}{14}$

Untuk $x = 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} 5f\left(\frac{1}{1}\right) + \frac{f(2 \cdot 1)}{1^2} &= 1 \\ 5f(1) + f(2) &= 1 \quad \dots(1) \end{aligned}$$

Untuk $x = \frac{1}{2}$, diperoleh

$$\begin{aligned} 5f\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) + \frac{f\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} &= \frac{1}{2} \\ 5f(2) + \frac{f(1)}{\frac{1}{4}} &= \frac{1}{2} \\ 5f(2) + 4f(1) &= \frac{1}{2} \quad \dots(2) \end{aligned}$$

Misalkan $f(1) = x$ dan $f(2) = y$. Kita peroleh

$$\begin{cases} 5x + y &= 1 & \dots(1) \\ 4x + 5y &= \frac{1}{2} & \dots(2) \end{cases}$$

Dengan Persamaan (1) $\times 5$ – Persamaan (2), kita peroleh

$$\begin{aligned} 5(5x + y) - (4x + 5y) &= 5(1) - \frac{1}{2} \\ 25x + 5y - 4x - 5y &= 5 - \frac{1}{2} \\ 21x &= \frac{10 - 1}{2} \\ 21x &= \frac{9}{2} \\ x &= \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{21} \\ \therefore f(1) &= \boxed{\frac{3}{14}} \end{aligned}$$

4.4 Kelas 8 Babak Final

1. Bilangan asli 4 digit (angka) $abcd$ (dengan a, b, c, d menyatakan angka) disebut *mambu* jika memenuhi syarat-syarat berikut.
 - a merupakan bilangan prima,
 - b merupakan bilangan kelipatan 2,
 - c merupakan bilangan ganjil, dan
 - d bernilai bebas.

Sebagai contoh, 2230 dan 3851 merupakan bilangan *mambu*. Tentukan banyak bilangan 4 digit yang *mambu*.

Diusulkan oleh Firmansyah Fahmi Nugraha

Solusi: 1000

Diketahui a bilangan prima, sehingga nilai kemungkinan untuk a adalah $2, 3, 5, 7 \Rightarrow 4$ kemungkinan.

Diketahui b merupakan kelipatan 2, sehingga nilai kemungkinan untuk b adalah $0, 2, 4, 6, 8 \Rightarrow 5$ kemungkinan.

Diketahui c merupakan bilangan ganjil, sehingga nilai kemungkinan untuk c adalah $1, 3, 5, 7, 9 \Rightarrow 5$ kemungkinan.

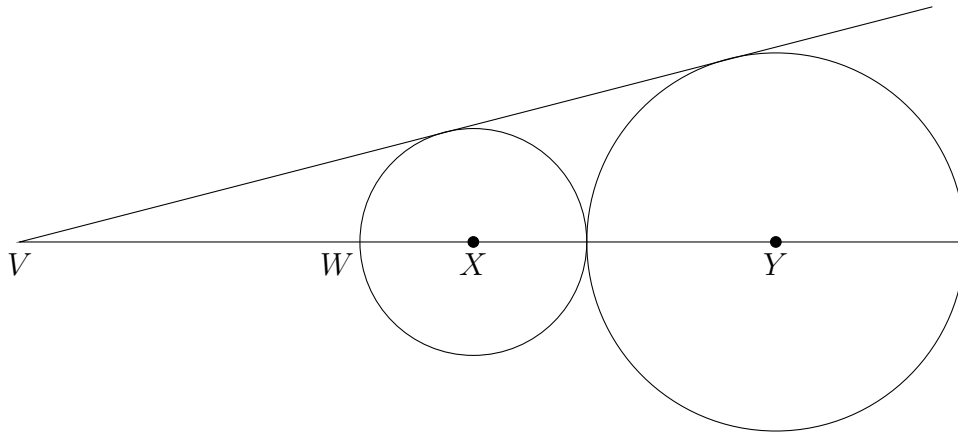
Diketahui d bernilai bebas, sehingga nilai kemungkinan untuk d adalah $0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9 \Rightarrow 10$ kemungkinan.

Maka total bilangan 4 digit yang *mambu* adalah $4 \times 5 \times 5 \times 10 = \boxed{1000}$ bilangan.

Komentar:

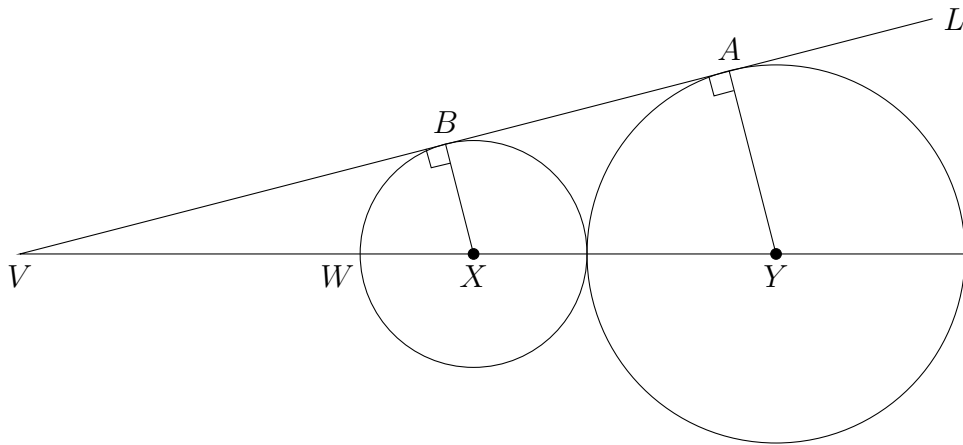
- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 1,45 sehingga soal ini dapat dikategorikan soal sedang-sulit.
- (b) Kesalahan peserta antara lain yaitu nilai b hanya disebutkan 2, 4, 6, 8 (4 kemungkinan). Padahal untuk $b = 0$ juga memenuhi. Dan untuk nilai d hanya disebutkan 1, 2, 3, $\dots$, 9 (9 kemungkinan). Padahal $d = 0$ juga memenuhi.

2. Pada gambar dibawah, jari-jari lingkaran kecil adalah 9 cm dan jari-jari lingkaran besar adalah 15 cm. Tentukan panjang VW .



Diusulkan oleh Anindya Puspita Budiariani

Solusi: 27 cm



Misalkan lingkaran kecil menyinggung VL di titik B dan lingkaran besar menyinggung VL di titik A . Menurut sifat garis singgung, maka $\angle XBV = \angle YAV = 90^\circ$. Sehingga kita peroleh $XB \parallel YA$.

Perhatikan bahwa YA merupakan jari-jari lingkaran besar dan XB merupakan jari-jari lingkaran kecil. Kita peroleh panjang $YA = 15$ cm dan $XB = 9$ cm. Perhatikan bahwa $\triangle VBX$ sebangun dengan $\triangle VAY$. Misalkan panjang $VW = x$. Maka

$$\begin{aligned} \frac{VX}{BX} &= \frac{VY}{AY} \\ \frac{VW + WX}{9} &= \frac{VW + WY}{15} \\ \frac{x + 9}{9} &= \frac{x + 9 + 9 + 15}{15} \\ \frac{x + 9}{9} &= \frac{x + 33}{15} \quad \text{Kalikan Silang} \\ 15(x + 9) &= 9(x + 33) \\ 15x + 135 &= 9x + 297 \\ 15x - 9x &= 297 - 135 \\ 6x &= 162 \end{aligned}$$

$$x = \frac{162}{6}$$
$$\therefore x = 27$$

Jadi, panjang VW adalah 27 cm.

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0,7 sehingga soal ini dapat dikategorikan soal sulit.
- (b) Ide utama dalam penyelesaian soal ini adalah memanfaatkan garis singgung dan kesebangunan.

3. Tentukan angka satuan dari

$$1^{2019} - 2^{2019} + 3^{2019} - 4^{2019} + 5^{2019} - 6^{2019} + 7^{2019} - 8^{2019} + 9^{2019}$$

Diusulkan oleh Kinasih Asta K.

Solusi: 5

Kita tahu bahwa $1^{2019} = 1$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 2^1 &= 2 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^4 &= 16 \\ 2^5 &= 32 \quad (\text{Berulang}) \end{aligned}$$

Pola tersebut berulang setelah 4 pola. Karena $2019 : 4$ bersisa 3, maka angka satuan dari 2^{2019} sama dengan angka satuan 2^3 yaitu 8.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 3^1 &= 3 \\ 3^2 &= 9 \\ 3^3 &= 27 \\ 3^4 &= 81 \\ 3^5 &= 1 \quad (\text{Berulang}) \end{aligned}$$

Pola tersebut berulang setelah 4 pola. Karena $2019 : 4$ bersisa 3, maka angka satuan dari 3^{2019} sama dengan angka satuan dari 3^3 yaitu 7.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 4^1 &= 4 \\ 4^2 &= 16 \\ 4^3 &= 64 \quad (\text{Berulang}) \end{aligned}$$

Pola tersebut berulang setelah 2 pola. Karena $2019 : 2$ bersisa 1, maka angka satuan dari 4^{2019} sama dengan angka satuan dari 4^1 yaitu 4.

Angka satuan dari 5^n (untuk n bilangan asli) selalu bernilai 5, sehingga angka satuan dari 5^{2019} adalah 5.

Angka satuan dari 6^n (untuk n bilangan asli) selalu bernilai 6, sehingga angka satuan dari 6^{2019} bernilai 6.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 7^1 &= 7 \\ 7^2 &= 49 \\ 7^3 &= 343 \\ 7^4 &= 2401 \\ 7^5 &= 16807 \quad (\text{Berulang}) \end{aligned}$$

Pola tersebut berulang setelah 4 pola. Karena $2019 : 4$ bersisa 3, maka angka satuan dari 7^{2019} sama dengan angka satuan dari 7^3 yaitu 3.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}8^1 &= 8 \\8^2 &= 64 \\8^3 &= 512 \\8^4 &= 4096 \\8^5 &= 32768 \quad (\text{Berulang})\end{aligned}$$

Pola tersebut berulang setelah 4 pola. Karena $2019 : 4$ bersisa 3, maka angka satuan dari 8^{2019} sama dengan angka satuan dari 8^3 yaitu 2.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}9^1 &= 9 \\9^2 &= 81 \\9^3 &= 729 \quad (\text{Berulang})\end{aligned}$$

Pola tersebut berulang setelah 2 pola. Karena $2019 : 2$ bersisa 1, maka angka satuan dari 9^{2019} sama dengan angka satuan dari 9^1 yaitu 9.

Misalkan

$$\begin{aligned}S &= 1^{2019} - 2^{2019} + 3^{2019} - 4^{2019} + 5^{2019} - 6^{2019} + 7^{2019} - 8^{2019} + 9^{2019} \\S &= 1^{2019} + (3^{2019} - 2^{2019}) + (5^{2019} - 4^{2019}) + (7^{2019} - 6^{2019}) + (9^{2019} - 8^{2019})\end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned}S &\equiv 1 + (7 - 8) + (5 - 4) + (3 - 6) + (9 - 2) \pmod{10} \\&\equiv 1 + (-1) + 1 + (-3) + 7 \pmod{10} \\\therefore S &\equiv 5 \pmod{10}\end{aligned}$$

Sehingga angka satuan dari $1^{2019} - 2^{2019} + 3^{2019} - 4^{2019} + 5^{2019} - 6^{2019} + 7^{2019} - 8^{2019} + 9^{2019}$ adalah $\boxed{5}$.

Catatan:

Definisi $a \equiv b \pmod{c}$ adalah a bersisa b jika dibagi c . Sebagai contoh, $5 \equiv 2 \pmod{3}$ karena 5 bersisa 2 jika dibagi 3 dan $10 \equiv 0 \pmod{5}$ karena 10 bersisa 0 jika dibagi 5.

Komentar:

- Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 1,11 sehingga soal ini dapat dikategorikan soal sedang-sulit.
- Kesalahan utama peserta dalam mengerjakan soal ini tidak teliti dalam menentukan angka satuan dari masing-masing bilangan.
- Bagi pembaca yang belum familiar, pembaca disarankan membaca "*Operasi Modulus*" atau "*Modulo*".

4. Perhatikan bentuk berikut.

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 &= 3^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 &= 6^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 10^2\end{aligned}$$

dan seterusnya.

Misalkan $S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + 30^3$. Tentukan nilai dari $\sqrt{\frac{S}{2}}$.

Diusulkan oleh Lalu Aldo Wadagaprana

Solusi: 240

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 &= (1 + 2)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 &= (1 + 2 + 3)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= (1 + 2 + 3 + 4)^2\end{aligned}$$

Demikian kita peroleh

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Kita peroleh

$$\begin{aligned}S &= 2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + 30^3 \\&= 2^3 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 15^3) \\S &= 8(1 + 2 + 3 + \cdots + 15)^2 \\\frac{S}{2} &= 4 \left(\frac{15(15+1)}{2}\right)^2 \\&= 4 \left(\frac{15 \cdot 16}{2}\right)^2 \\&= 2^2 (15 \cdot 8)^2 \\&= (2 \cdot 15 \cdot 8)^2 \\\sqrt{\frac{S}{2}} &= 240\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $\sqrt{\frac{S}{2}}$ adalah 240.

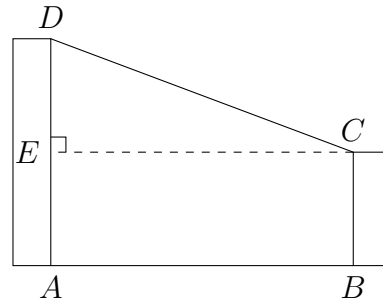
Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0 sehingga soal ini dapat dikategorikan soal sangat sulit.
- (b) Kesalahan sebagian besar peserta dengan menemukan pola $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$ kemudian menganggap $2^3+4^3+6^3+\cdots+30^3 = (2+4+6+\cdots+30)^2$.

5. Dua buah tiang berdampingan berjarak 24 meter dimana puncak dari tiang tersebut akan dihubungkan dengan kawat. Jika tinggi tiang masing-masing adalah 22 meter dan 12 meter, tentukan panjang kawat minimal yang dibutuhkan.

Diusulkan oleh Maulidan Rochmatul Aulia

Solusi: 26 meter



Dari gambar tersebut, panjang $AD = 22$ meter, $BC = 12$ meter, dan $AB = 24$ meter.

Misalkan kita tarik garis tegak lurus dari titik C dan memotong AD di E . Maka diperoleh $BC = AE = 12$ meter. Maka diperoleh panjang $DE = 10$ meter. Perhatikan bahwa juga panjang $EC = AB = 24$ meter. Perhatikan $\triangle ECD$, dengan Pythagoras

$$\begin{aligned} DC^2 &= DE^2 + EC^2 \\ &= 10^2 + 24^2 \\ &= 100 + 576 \\ &= 676 \\ DC &= \sqrt{676} \\ \therefore DC &= 26 \text{ meter} \end{aligned}$$

Jadi, panjang kawat minimal adalah 26 meter.

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 3,33 sehingga soal ini dapat dikategorikan mudah-sedang.

6. Buktikan bahwa harus ada satu diantara a dan b yang bernilai negatif sehingga terdapat pasangan real (a, b) dan memenuhi

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}.$$

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Bukti.

Asumsikan a dan b bilangan real.

Jelas bahwa $a, b \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= \frac{1}{a-b} \\ \frac{b-a}{ab} &= \frac{1}{a-b} \quad (\text{Kalikan Silang}) \\ (b-a)(a-b) &= ab \cdot 1 \\ (-1)(a-b)(a-b) &= ab \\ -(a-b)^2 &= ab \\ (a-b)^2 &= -ab \\ \therefore a-b &= \pm\sqrt{-ab}\end{aligned}$$

Karena a dan b bilangan real, sehingga $a-b$ juga bilangan real. Demikian juga $\pm\sqrt{-ab}$ harus bilangan real.

Jika $a, b > 0$, maka $ab > 0$ yang berakibat $-ab < 0$. Sehingga $\sqrt{-ab}$ bernilai imajiner (tidak real).

Jika $a, b < 0$, maka $ab > 0$ yang berakibat $-ab < 0$. Sehingga $\sqrt{-ab}$ bernilai imajiner (tidak real).

Jika salah satu dari a dan b bernilai negatif, maka $ab < 0$ yang berakibat $-ab > 0$. Sehingga $\sqrt{-ab}$ bernilai real.

Demikian agar terdapat solusi real (a, b) yang memenuhi $a-b = \pm\sqrt{-ab}$, harus terdapat salah satu bilangan diantara a dan b bernilai negatif.

Jadi, terbukti bahwa harus ada satu diantara a dan b yang bernilai negatif sehingga terdapat pasangan real (a, b) dan memenuhi

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}.$$

Terbukti

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0,33 sehingga tingkat kesulitan soal ini soal sangat sulit.

7. Tentukan nilai dari

$$\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \cdots + \frac{\frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}}$$

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: 9999

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} &= \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} \\ &= \frac{b+a}{b-a} \end{aligned}$$

Untuk $b = a + 1$, diperoleh

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{a+1+a}{a+1-a} = \frac{2a+1}{1} = 2a+1$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} &= 2(1) + 1 = 3 \\ \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} &= 2(2) + 1 = 5 \\ \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} &= 2(3) + 1 = 7 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}} &= 2(99) + 1 = 199 \end{aligned}$$

Kita peroleh

$$\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \cdots + \frac{\frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}} = 3 + 5 + 7 + \cdots + 199$$

Perhatikan bahwa $3 + 5 + 7 + \cdots + 199$ merupakan deret aritmetika dengan $a = 3$ dan $b = 2$. Kita peroleh $U_n = a + (n-1)b = 3 + (n-1) \cdot 2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$.

$$\begin{aligned} U_n &= 199 \\ 2n + 1 &= 199 \\ 2n &= 198 \\ n &= \frac{198}{2} = 99 \end{aligned}$$

Jadi, banyak suku deret aritmetika tersebut 99.

Teorema 13

Pada barisan aritmetika, jumlah n suku pertama dapat ditentukan dengan

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) \quad \text{atau} \quad S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

Maka jumlah 99 suku pertama adalah

$$S_{99} = \frac{99}{2}(3 + 199) = \frac{99}{2} \cdot 202 = 99 \cdot 101 = 9999$$

Jadi, nilai dari

$$\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \cdots + \frac{\frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}} = \boxed{9999}$$

Solusi Alternatif.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} &= \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} \\ &= \frac{b+a}{b-a} \end{aligned}$$

Untuk $b = a + 1$, diperoleh

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{a+1+a}{a+1-a} = \frac{2a+1}{1} = 2a+1$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} &= 2(1) + 1 = 3 \\ \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} &= 2(2) + 1 = 5 \\ \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} &= 2(3) + 1 = 7 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}} &= 2(99) + 1 = 199 \end{aligned}$$

Kita peroleh

$$\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \cdots + \frac{\frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}} = 3 + 5 + 7 + \cdots + 199$$

Perhatikan bahwa $1 + 3 + 5 + \dots + n = \left(\frac{1+n}{2}\right)^2$ dengan n bilangan ganjil. Maka

$$\begin{aligned} 3 + 5 + 7 + \dots + 99 &= (1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 199) - 1 \\ &= \left(\frac{1+199}{2}\right)^2 - 1 \\ &= 100^2 - 1 \\ &= 10000 - 1 \\ \therefore 3 + 5 + 7 + \dots + 199 &= 9999 \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari

$$\frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \dots + \frac{\frac{1}{99} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}} = \boxed{9999}$$

Komentar:

- (a) Soal ini dapat dikatakan soal sangat sulit karena hanya ada 1 peserta yang berhasil menyelesaikan soal ini.
- (b) Ide penyelesaian soal ini dengan mengubah bentuk $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ menjadi bentuk yang lebih sederhana.

8. Untuk n bilangan asli, didefinisikan $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$. Sebagai contoh, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ dan $3! = 1 \times 2 \times 3$.

Tentukan angka satuan dari

$$(1!)^{2019} + (2!)^{2019} + (3!)^{2019} + \cdots + (2019!)^{2019}$$

Diusulkan oleh Yahya Setiawan

Solusi: 9

Perhatikan bahwa untuk $n!$ dengan $n \geq 5$, angka satuan dari $n!$ adalah 0. Demikian juga angka satuan dari $(n!)^{2019}$ adalah 0. Maka angka satuan dari $(1!)^{2019} + (2!)^{2019} + (3!)^{2019} + \cdots + (2019!)^{2019}$ dapat dicari dengan menentukan angka satuan dari $(1!)^{2019} + (2!)^{2019} + (3!)^{2019} + (4!)^{2019}$.

Perhatikan bahwa $(1!)^{2019} = 1^{2019} = 1$.

Perhatikan bahwa $(2!)^{2019} = 2^{2019}$.

$$\begin{aligned} 2^1 &= 2 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^3 &= 8 \\ 2^4 &= 16 \\ 2^5 &= 32 \quad (\text{Berulang}) \end{aligned}$$

Pola tersebut berulang setelah 4 pola. Karena $2019 : 4$ bersisa 3, maka angka satuan dari 2^{2019} sama dengan angka satuan 2^3 yaitu 8.

Perhatikan bahwa $(3!)^{2019} = 6^{2019}$. Angka satuan dari 6^n (untuk n bilangan asli) selalu bernilai 6. Sehingga angka satuan dari 6^{2019} adalah 6.

Perhatikan bahwa $(4!)^{2019} = 24^{2019}$. Karena yang ditanyakan angka satuan, kita hanya fokus pada angka satuan. Maka angka satuan dari 24^{2019} sama dengan angka satuan 4^{2019} .

$$\begin{aligned} 4^1 &= 4 \\ 4^2 &= 16 \\ 4^3 &= 64 \quad (\text{Berulang}) \end{aligned}$$

Pola tersebut berulang setelah 2 pola. Karena $2019 : 2$ bersisa 1, maka angka satuan dari 4^{2019} sama dengan angka satuan dari 4^1 yaitu 4.

Sehingga angka satuan dari $(1!)^{2019} + (2!)^{2019} + (3!)^{2019} + (4!)^{2019}$ adalah $1 + 8 + 6 + 4 = 19$, yaitu 9.

Jadi, angka satuan dari $(1!)^{2019} + (2!)^{2019} + (3!)^{2019} + \cdots + (2019!)^{2019}$ adalah $\boxed{9}$.

Komentar:

- Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 2,22 sehingga soal ini dapat dikatakan tingkat kesulitan soal ini adalah sedang.
- Ide pertama dalam mengerjakan soal ini melakukan analisis bahwa untuk $n \geq 5$, maka angka satuan dari $n!$ adalah 0.

9. Shino mengadakan ujian untuk Shikadai dengan ketentuan sebagai berikut:

- Semua soal harus dijawab,
- soal yang dijawab benar mendapat nilai 4, dan
- soal yang dijawab mendapat nilai -1 .

Jika terdapat 40 soal dan Shikadai mendapat nilai 85, tentukan selisih banyak soal yang dijawab benar dan dijawab salah oleh Shikadai.

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: 10

Misalkan banyak soal yang dijawab benar dan salah oleh Shikadai berturut-turut adalah b dan s .

Banyak soal adalah 40 soal, maka $b + s = 40$.

Soal yang dijawab benar mendapat nilai 4 dan soal yang dijawab salah mendapat nilai -1 . Karena Shikadai mendapat nilai 85, maka $4b + (-1)s = 85 \Rightarrow 4b - s = 85$.

Kurangkan kedua persamaan,

$$\begin{aligned}(4b - s) + (b + s) &= 85 + 40 \\ 4b - s + b + s &= 125 \\ 5b &= 125 \\ b &= \frac{125}{5} \\ \therefore b &= 25\end{aligned}$$

Substitusikan nilai b ,

$$\begin{aligned}b + s &= 40 \\ 25 + s &= 40 \\ s &= 40 - 25 \\ \therefore s &= 15\end{aligned}$$

Sehingga banyak soal yang dijawab benar adalah 25 dan banyak soal yang dijawab salah adalah 15. Jadi, selisih banyak soal yang dijawab benar dan dijawab salah oleh Shikadai adalah $25 - 15 = \boxed{10}$.

Komentar:

- Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 4 sehingga soal ini dapat dikategorikan soal mudah.
- Ide penyelesaian soal ini yaitu dengan memisalkan dan menyelesaikan sistem persamaan linier dua variabel.

10. Tentukan semua pasangan bilangan bulat (x, k) dengan $x > 2$ yang memenuhi

$$(x-3)(x-1)(x+1)(x+3) + 16 = k^4$$

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi:

Berdasarkan $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,

$$\begin{aligned} k^4 &= (x-3)(x-1)(x+1)(x+3) + 16 \\ &= (x-3)(x+3)(x-1)(x+1) + 16 \\ &= (x^2 - 3^2)(x^2 - 1^2) + 16 \\ &= (x^2 - 9)(x^2 - 1) + 16 \\ &= x^4 - x^2 - 9x^2 + 9 + 16 \\ &= x^4 - 10x^2 + 25 \\ k^4 &= (x^2 - 5)^2 \\ k^2 &= x^2 - 5 \quad \text{Karena } x > 2 \end{aligned}$$

Maka ekuivalen dengan $5 = x^2 - k^2$. Karena x, k bilangan bulat, maka $(x+k)(x-k)$ bilangan bulat. Sedangkan $5 = 5 \cdot 1 = (-5)(-1)$.

- Jika $x+k=5$ dan $x-k=1$, dengan menjumlahkan kedua persamaan

$$(x+k) + (x-k) = 5 + 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

Maka diperoleh $k=2$. Ketika dicek, ternyata memenuhi. Kita peroleh $(x, k) = (3, 2)$.

- Jika $x+k=1$ dan $x-k=5$, dengan menjumlahkan persamaan

$$(x+k) + (x-k) = 1 + 5 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

Kita peroleh $k=-2$. Ketika dicek, ternyata memenuhi. Kita dapatkan $(x, k) = (3, -2)$.

- Jika $x+k=-1$ dan $x-k=-5$, dengan menjumlahkan persamaan

$$(x+k) + (x-k) = -1 - 5 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$$

Karena $x > 2$, maka tidak ada pasangan (x, k) yang memenuhi.

- Jika $x+k=-5$ dan $x-k=-1$, dengan menjumlahkan persamaan

$$(x+k) + (x-k) = -5 - 1 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$$

Karena $x > 2$, maka tidak ada pasangan (x, k) yang memenuhi.

Maka, semua pasangan bilangan bulat (x, k) yang memenuhi adalah $\boxed{(3, 2), (3, -2)}$.

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 2 sehingga tingkat kesulitan soal ini adalah sedang.

4.5 Kelas 9 Babak Penyisihan (*Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono*)

1. Nilai dari $12 + 3 \times (-5) - 12 : 3$ adalah

- (a) -7
- (b) -29
- (c) 7
- (d) 29

Solusi: (a) -7

$$\begin{aligned}12 + 3 \times (-5) - 12 : 3 &= 12 + (-15) - 4 \\&= 12 - 15 - 4 \\ \therefore 12 + 3 \times (-5) - 12 : 3 &= \boxed{-7}\end{aligned}$$

2. Gatan memiliki beras sebanyak $2\frac{3}{5}$ kg. Karena merasa tidak cukup, Gatan membeli lagi beras sebanyak $1\frac{1}{5}$ kg. Setelah itu, beras tersebut dimasak sebanyak $2\frac{1}{4}$ kg. Sisa beras yang dimiliki Gatan sebanyak ... kg.

(a) $2\frac{9}{20}$

(b) $1\frac{1}{4}$

(c) $1\frac{11}{20}$

(d) $3\frac{1}{20}$

Solusi: (c) $1\frac{11}{20}$

Gatan memiliki beras sebanyak $2\frac{3}{5}$ kg. Lalu Gatan membeli lagi sebanyak $1\frac{1}{5}$ kg. Sehingga banyak beras Gatan sekarang adalah

$$2\frac{3}{5} + 1\frac{1}{5} = (2 + 1) + \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\right) = 3\frac{4}{5} \text{ kg}$$

Sebanyak $2\frac{1}{4}$ kg beras dimasak, sehingga sisa beras yang dimiliki Gatan adalah

$$3\frac{4}{5} - 2\frac{1}{4} = (3 - 2) + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{4}\right) = 1 + \left(\frac{16 - 5}{20}\right) = \boxed{1\frac{11}{20} \text{ kg}}$$

3. Bentuk sederhana dari $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$ adalah

- (a) $\sqrt{2}$
- (b) $2\sqrt{2}$
- (c) $\sqrt{30}$
- (d) $-\sqrt{2}$

Solusi: (a) $\sqrt{2}$

Berdasarkan $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98} &= \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{49 \cdot 2} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} \\ \therefore \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{98} &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

4. Nilai dari $\left(216^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ adalah

(a) -6

(b) 6

(c) $\frac{1}{6}$

(d) $\frac{1}{36}$

Solusi: (c) $\frac{1}{6}$

Ingat bahwa $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, dan $(a^m)^n = a^{mn}$,

$$\left(216^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 216^{\frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2})} = 216^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{216^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{216}} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

5. Suku ke-2019 dari barisan $3, 7, 11, 15, \dots$ adalah
- (a) 8075
 - (b) 9011
 - (c) 7023
 - (d) 8011

Solusi: (a) 8075

Perhatikan bahwa barisan tersebut membentuk barisan aritmetika dengan $a = 3$ dan $b = 4$.

Teorema 14

Untuk barisan aritmetika, suku ke- n dapat ditentukan dengan

$$U_n = a + (n - 1)b$$

Maka suku ke-2019:

$$U_{2019} = 3 + (2019 - 1) \cdot 4 = 3 + 2018 \cdot 4 = 3 + 8072 = \boxed{8075}$$

6. Zeta dan Luthfi akan mengecat tembok. Jika Zeta mengerjakan sendirian, Zeta dapat menyelesaikannya selama 24 jam. Jika Zeta dan Luthfi mengerjakan secara bersama-sama, maka mereka dapat menyelesaikannya selama 15 jam. Jika Luthfi mengerjakan sendirian, maka Luthfi dapat menyelesaikannya selama ... jam.

- (a) 10
- (b) 40
- (c) 35
- (d) 20

Solusi: (b) 40

Misalkan waktu yang dibutuhkan Luthfi jika dikerjakan secara sendiri adalah x jam. Maka berlaku

$$\begin{aligned}\frac{1}{24} + \frac{1}{x} &= \frac{1}{15} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{15} - \frac{1}{24} \\ &= \frac{8-5}{120} \\ &= \frac{3}{120} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{40} \\ \therefore x &= 40\end{aligned}$$

Jadi, Luthfi dapat menyelesaikannya selama 40 jam.

7. Perbandingan kelereng Rizky, Krisna, dan Alif adalah $2 : 3 : 5$. Jumlah kelereng mereka bertiga adalah 110 buah. Selisih kelereng Rizky dan Krisna adalah ... buah.

- (a) 32
- (b) 10
- (c) 22
- (d) 11

Solusi: (d) 11

Diketahui jumlah kelereng mereka bertiga adalah 110. Maka selisih kelereng Rizky dan Krisna adalah

$$\frac{3 - 2}{2 + 3 + 5} \cdot 110 = \frac{1}{10} \cdot 110 = \boxed{11}$$

8. Jika k merupakan penyelesaian dari sistem persamaan $4(2x - 1) = 7x + 11$, nilai dari $k + 7$ adalah

- (a) 15
- (b) 16
- (c) 20
- (d) 22

Solusi: (d) 22

$$4(2x - 1) = 7x + 11$$

$$8x - 4 = 7x + 11$$

$$8x - 7x = 11 + 4$$

$$\therefore x = 15$$

Karena k merupakan penyelesaian dari sistem persamaan $4(2x - 1) = 7x + 11$, maka diperoleh juga $k = 15$. Jadi, nilai dari $k + 7 = 15 + 7 = \boxed{22}$.

9. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut!

(i). $9n^2 - 1 = (3n + 1)(3n - 1)$

(ii). $2n^2 - n + 1 = (2n - 1)(n - 1)$

(iii). $4x^2 + 3xy - y^2 = (4x + y)(x - y)$

(iv). $4k^2 - 5k + 1 = (4k - 1)(k - 1)$

Pernyataan yang benar adalah

(a) (i) dan (iv)

(b) (ii) dan (iii)

(c) (i) dan (iii)

(d) (ii) dan (iv)

Solusi: (a) (i) dan (iv)

Perhatikan bahwa

$$(3n + 1)(3n - 1) = (3n)^2 - 1^2 = 9n^2 - 1$$

$$(2n - 1)(n - 1) = 2n^2 - 2n - n + 1 = 2n^2 - 3n + 1$$

$$(4x + y)(x - y) = 4x^2 - 4xy + xy - y^2 = 4x^2 - 3xy - y^2$$

$$(4k - 1)(k - 1) = 4k^2 - 4k - k + 1 = 4k^2 - 5k + 1$$

Jadi, pernyataan yang benar (i) dan (iv).

10. Harga dua tas dan sebuah sepatu adalah Rp82.500,00. Harga tiga tas dan dua sepatu adalah Rp140.000,00. Harga sebuah tas dan sebuah sepatu adalah
- (a) Rp49.500,00
 (b) Rp65.500,00
 (c) Rp57.500,00
 (d) Rp43.000,00

Solusi: (c) Rp57.500,00

Misalkan harga sebuah tas adalah t dan harga sebuah sepatu adalah s .

Diketahui harga dua tas dan sebuah sepatu adalah Rp82.500,00. Maka $2t + s = \text{Rp}82.500,00$.

Diketahui harga tiga tas dan dua sepatu adalah Rp140.000,00. Maka $3t + 2s = \text{Rp}140.000,00$.

Perhatikan bahwa $2(2t + s) = 2 \times \text{Rp}82.500$ yang ekuivalen dengan $4t + 2s = \text{Rp}165.000,00$.

Eliminasi kedua persamaan.

$$4t + 2s = \text{Rp}165.000,00$$

$$3t + 2s = \text{Rp}140.000,00$$

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ t = \text{Rp}25.000,00 \end{array}$$

Dengan mensubstitusikan nilai t ,

$$2t + s = \text{Rp}82.500,00$$

$$2(\text{Rp}25.000,00) + s = \text{Rp}82.500,00$$

$$\text{Rp}50.000,00 + s = \text{Rp}82.500,00$$

$$s = \text{Rp}82.500,00 - \text{Rp}50.000,00$$

$$\therefore s = \text{Rp}32.500,00$$

Sehingga harga sebuah tas dan sebuah sepatu adalah $t + s = \text{Rp}25.000,00 + \text{Rp}32.500,00 = \boxed{\text{Rp}57.500,00}$.

Solusi Alternatif.

Dengan cara yang sama seperti sebelumnya, misalkan t adalah harga sebuah tas dan s adalah harga sebuah sepatu. Diperoleh $2t + s = \text{Rp}82.000,00$ dan $3t + 2s = \text{Rp}140.000,00$.

Dengan mengurangkan kedua persamaan,

$$(3t + 2s) - (2t + s) = \text{Rp}140.000,00 - \text{Rp}82.500,00$$

$$3t + 2s - 2t - s = \text{Rp}57.500,00$$

$$t + s = \text{Rp}57.500,00$$

Jadi, harga sebuah tas dan harga sebuah sepatu adalah $\boxed{\text{Rp}57.500,00}$.

11. Diberikan $P = \{x \mid 1 \leq x \leq 8, x \text{ bilangan asli}\}$ dan $Q = \{\text{Faktor positif dari } 18\}$. Maka $(P \cap Q) \cap (P - Q) = \dots$.

- (a) $\{\}$
- (b) $\{1, 2, 3, 6\}$
- (c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 18\}$
- (d) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Solusi: (a) $\{\}$

Kita peroleh $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dan $Q = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

$$P \cap Q = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$P - Q = \{4, 5, 7, 8\}$$

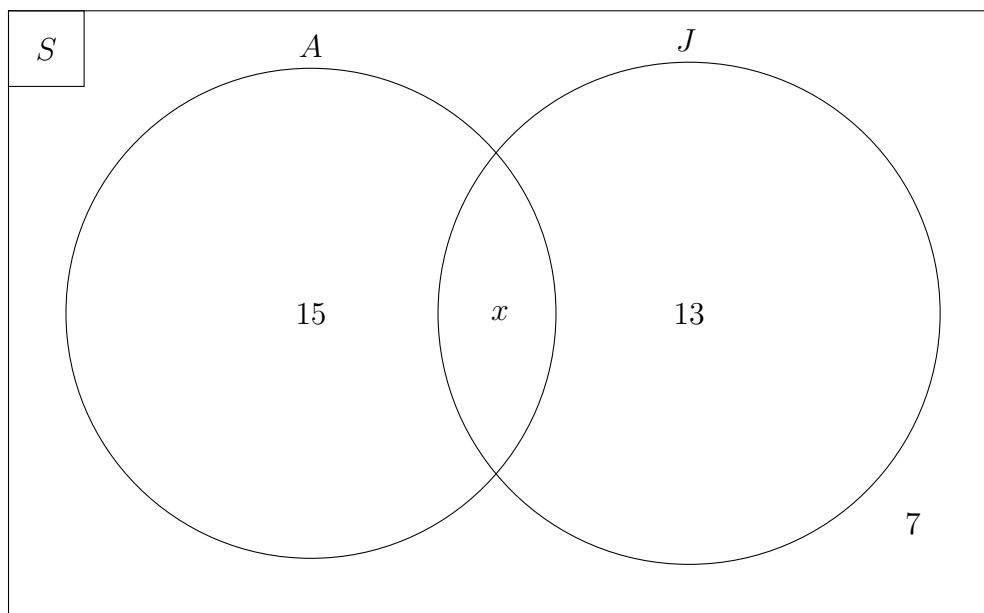
$$\therefore (P \cap Q) \cap (P - Q) = \boxed{\{\}}$$

12. Jumlah siswa di kelas 9.2 ada 30 siswa. Banyak siswa yang menyukai buah jeruk ada 13 siswa, banyak siswa yang menyukai buah apel ada 15 siswa, dan sebanyak 7 siswa tidak menyukai keduanya. Banyak siswa yang menyukai apel sekaligus jeruk adalah

- (a) 3
(b) 4
(c) 5
(d) 6

Solusi: (c) 5

Misalkan J adalah himpunan siswa yang menyukai buah jeruk dan A adalah himpunan siswa yang menyukai buah apel. Kita punya $n(A) = 15, n(J) = 13$, dan $n(A \cup J)^c = 7$. Kita tahu bahwa $n(S) = 30$. Perhatikan Diagram Venn berikut.



Maka banyak siswa yang **hanya** menyukai apel adalah $15 - x$ dan banyak siswa yang **hanya** menyukai jeruk adalah $13 - x$. Diketahui $n(S) = 30$.

$$\begin{aligned} 30 &= (15 - x) + x + (13 - x) + 7 \\ 30 &= 15 - x + x + 13 - x + 7 \\ 30 &= 35 - x \\ x &= 35 - 30 \\ \therefore x &= 5 \end{aligned}$$

Jadi, banyak siswa yang menyukai keduanya adalah 5.

Solusi Alternatif.

$$\begin{aligned} S_{\text{emesta}} + I_{\text{risan}} &= L_{\text{ainnya}} \\ 30 + I_{\text{risan}} &= 15 + 13 + 7 \\ 30 + I_{\text{risan}} &= 35 \\ I_{\text{risan}} &= 35 - 30 \\ \therefore I_{\text{risan}} &= 5 \end{aligned}$$

Jadi, banyak siswa yang menyukai keduanya adalah 5.

13. Jika $f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2 + 4x + 7$. Jumlah semua nilai k yang memenuhi $f(k) = 19$ adalah
- (a) -2
 - (b) 1
 - (c) 2
 - (d) -3

Solusi: (a) -2

Subtitusikan $x = 2k$,

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{x}{2}\right) &= x^2 + 4x + 7 \\
 f\left(\frac{2k}{2}\right) &= (2k)^2 + 4(2k) + 7 \\
 f(k) &= 4k^2 + 8k + 7 \\
 19 &= 4k^2 + 8k + 7 \\
 0 &= 4k^2 + 8k + 7 - 19 \\
 0 &= 4k^2 + 8k - 12 \quad \text{Bagi kedua ruas dengan 4} \\
 0 &= k^2 + 2k - 3 \\
 0 &= (k + 3)(k - 1)
 \end{aligned}$$

Sehingga kita dapatkan $k + 3 = 0 \Rightarrow k = -3$ atau $k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$. Maka jumlah semua nilai k yang memenuhi adalah $-3 + 1 = \boxed{-2}$.

14. Diberikan $A = \{\text{Bilangan prima kurang dari 11}\}$ dan $B = \{\text{Faktor positif dari 2019}\}$. Banyak fungsi $f : B \rightarrow A$ adalah
- (a) 16
 - (b) 25
 - (c) 128
 - (d) 256

Solusi: (d) 256

Teorema 15

Jika $n(A) = a$ dan $n(B) = b$, maka banyak fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah b^a .

Kita peroleh

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \quad \text{dan} \quad B = \{1, 3, 673, 2019\}$$

Sehingga kita peroleh $n(A) = 4$ dan $n(B) = 4$. Maka banyak fungsi $f : B \rightarrow A$ adalah $n(A)^{n(B)} = 4^4 = \boxed{256}$.

15. Garis l tegak lurus terhadap garis yang melalui titik $(4, 1)$ dan $(5, 3)$. Gradien garis l adalah
- (a) 2
 (b) -2
 (c) $\frac{1}{2}$
 (d) $-\frac{1}{2}$

Solusi: (d) $\frac{1}{2}$

Teorema 16

Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Misalkan garis k tegak lurus terhadap garis l . Misalkan $(x_1, y_1) = (4, 1)$ dan $(x_2, y_2) = (5, 3)$. Persamaan garis k adalah

$$\begin{aligned}\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{y - 1}{3 - 1} &= \frac{x - 4}{5 - 4} \\ \frac{y - 1}{2} &= \frac{x - 4}{1} \\ \frac{y - 1}{2} &= x - 4 \\ y - 1 &= 2(x - 4) \\ y - 1 &= 2x - 8 \\ y &= 2x - 8 + 1 \\ \therefore y &= 2x - 7\end{aligned}$$

Maka gradien garis k adalah $m_k = 2$.

Teorema 17

Kedua garis tegak lurus jika hasil kali gradien kedua garis tersebut adalah -1 .

Maka

$$\begin{aligned}m_k \times m_l &= -1 \\ 2 \times m_l &= -1 \\ \therefore m_l &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Jadi, gradien garis l adalah $\boxed{-\frac{1}{2}}$.

16. Persamaan garis yang sejajar dengan $y - 2x = 7$ dan melalui titik $(1, 1)$ adalah

- (a) $y - 2x = 6$
- (b) $2x - y = 1$
- (c) $2x + y = -9$
- (d) $y - 2x = -2$

Solusi: (b) $2x - y = 1$

Perhatikan bahwa

$$y - 2x = 7 \implies y = 2x + 7$$

Teorema 18

Kedua garis dikatakan sejajar jika gradien kedua garis tersebut sama.

Garis yang sejajar dengan $y = 2x + 7$ harus memiliki gradien yang sama, yaitu 2.

Teorema 19

Persamaan garis yang memiliki gradien m dan melalui titik (x_1, y_1) adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Maka persamaan garis yang sejajar dengan $y = 2x + 7$ dan melalui $(1, 1)$ adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y - 1 = 2x - 2$$

$$-1 + 2 = 2x - y$$

$$\therefore 1 = 2x - y$$

Kita peroleh persamaan garis tersebut $\boxed{2x - y = 1}$.

17. Di sebuah gedung, terdapat 12 baris yang terdiri dari beberapa kursi. Baris pertama terdapat 4 kursi, baris kedua terdapat 7 kursi, baris ketiga terdapat 10 kursi, baris keempat terdapat 13 kursi, dan seterusnya. Banyak kursi di gedung tersebut adalah ... kursi.
- (a) 189
 - (b) 37
 - (c) 231
 - (d) 246

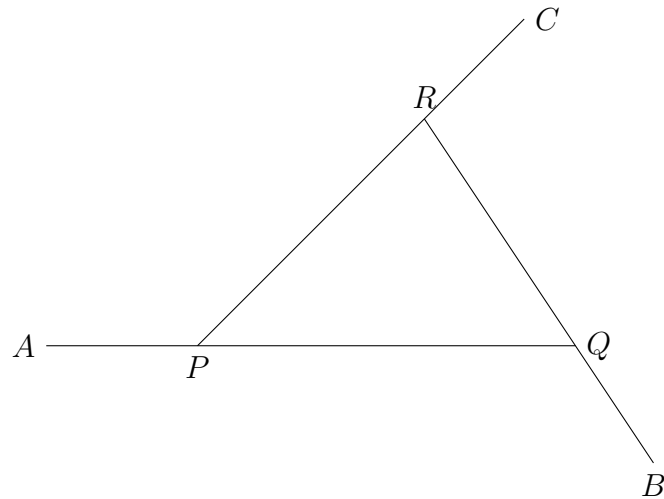
Solusi: (d) 246

Perhatikan pola banyak kursi: 4, 7, 10, 13, $\dots$ yang berarti membentuk barisan aritmetika dengan $a = 4$ dan $b = 3$. Maka banyak kursi di gedung tersebut adalah

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) \\ S_{12} &= \frac{12}{2}(2 \cdot 4 + (12-1) \cdot 3) \\ &= 6(8 + 11 \cdot 3) \\ &= 6(8 + 33) \\ &= 6 \cdot 41 \\ \therefore S_{12} &= 246 \end{aligned}$$

Jadi, banyak kursi di gedung tersebut adalah 246.

18. Perhatikan gambar berikut!



Besar $\angle RPA + \angle PQB + \angle QRC$ adalah

- (a) 225°
- (b) 300°
- (c) 360°
- (d) 400°

Solusi: (c) 360°

Misalkan $\angle RPQ = x$, $\angle PQR = y$, dan $\angle QRP = z$. Karena PQR adalah segitiga, maka jumlah sudut-sudutnya adalah 180° yang berarti $x + y + z = 180^\circ$.

Perhatikan bahwa

$$\angle RPA + \angle QPR = 180^\circ$$

$$\angle PQB + \angle PQR = 180^\circ$$

$$\angle QRC + \angle QRP = 180^\circ$$

Jumlahkan.

$$(\angle RPA + \angle QPR) + (\angle PQB + \angle PQR) + (\angle QRC + \angle QRP) = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$$

$$\angle RPA + x + \angle PQB + y + \angle QRC + z = 540^\circ$$

$$\angle RPA + \angle PQB + \angle QRC + (x + y + z) = 540^\circ$$

$$\angle RPA + \angle PQB + \angle QRC + 180^\circ = 540^\circ$$

$$\angle RPA + \angle PQB + \angle QRC = 540^\circ - 180^\circ$$

$$\therefore \angle RPA + \angle PQB + \angle QRC = \boxed{360^\circ}$$

Solusi Alternatif.

Perhatikan bahwa berlaku

$$\angle RPA = \angle PRQ + \angle RQP = y + z$$

$$\angle PQB = \angle QPR + \angle PRQ = x + z$$

$$\angle QRC = \angle QPR + \angle PQR = x + y$$

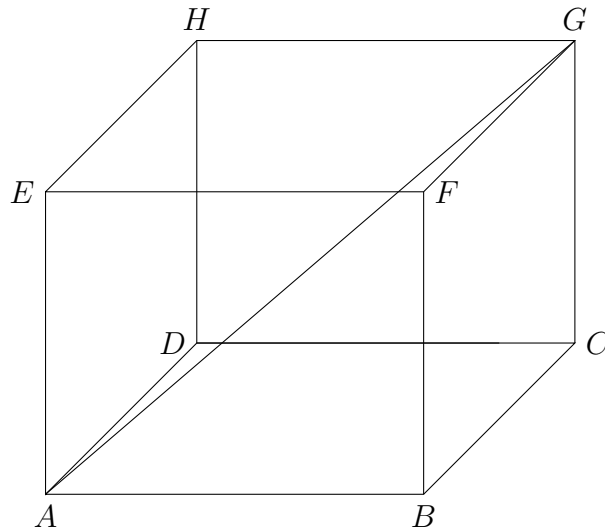
Jumlahkan.

$$\begin{aligned}\angle RPA + \angle PQB + \angle QRC &= (y + z) + (x + z) + (x + y) \\ &= y + z + x + z + x + y \\ &= 2x + 2y + 2z \\ &= 2(x + y + z) \\ &= 2(180^\circ) \\ \angle RPA + \angle PQB + \angle QRC &= \boxed{360^\circ}\end{aligned}$$

19. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$, panjang $AG = 18$ cm. Volume kubus adalah ... cm^3 .

- (a) $648\sqrt{3}$
- (b) $1458\sqrt{2}$
- (c) 216
- (d) 729

Solusi: (a) $648\sqrt{3}$



Perhatikan bahwa AG merupakan diagonal ruang. Misalkan panjang sisi kubus adalah a . Maka $AG = a\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
 AG &= 18 \text{ cm} \\
 a\sqrt{3} &= 18 \text{ cm} \\
 a &= \frac{18}{\sqrt{3}} \text{ cm} \\
 &= \frac{18}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ cm} \\
 &= \frac{18\sqrt{3}}{3} \text{ cm} \\
 \therefore a &= 6\sqrt{3} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Maka volume kubus adalah

$$V = a^3 = (6\sqrt{3})^3 = 216\sqrt{27} = 216 \cdot 3\sqrt{3} = \boxed{648\sqrt{3}} \text{ cm}^3$$

20. Diberikan 4 buah keping logam masing-masing memiliki dua sisi: gambar dan angka akan dilempar secara bersamaan sebanyak sekali. Peluang munculnya 2 buah angka dan 2 buah gambar adalah

- (a) $\frac{3}{4}$
- (b) $\frac{3}{8}$
- (c) $\frac{3}{16}$
- (d) $\frac{1}{3}$

Solusi: (b) $\frac{3}{8}$

Misalkan G menyatakan kejadian muncul gambar dan A menyatakan kejadian muncul angka. Maka banyak susunan yang mungkin:

$GGAA$, $AAGG$, $AGAG$, $GAGA$, $AGGA$, dan $GAAG$

Kita dapatkan ada 6 susunan kejadian yang mungkin yang berarti $n(K) = 6$. Karena terdapat 4 koin, maka $n(S) = 2^4 = 16$. Maka peluang muncul 2 buah angka dan 2 buah gambar adalah

$$P(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{6}{16} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

Solusi Alternatif.

Misalkan G menyatakan kejadian muncul gambar dan A menyatakan kejadian muncul angka. Maka banyak susunan yang mungkin $\frac{4!}{2!2!} = 6$. Dengan cara yang sama seperti solusi sebelumnya, akan diperoleh bahwa peluang muncul 2 buah angka dan dua buah gambar adalah $\boxed{\frac{3}{8}}$.

21. Data berikut merupakan daftar kegemaran dari 120 siswa.

- Sebanyak 10% dari seluruh siswa menyukai olahraga kasti,
- sebanyak 45% dari seluruh siswa menyukai olahraga sepak bola,
- sebanyak 15% dari seluruh siswa menyukai olahraga basket, dan
- sisanya siswa menyukai olahraga voli.

Banyak siswa yang menyukai olahraga voli adalah ... siswa.

- (a) 54
- (b) 18
- (c) 36
- (d) 24

Solusi: (c) 36

Maka banyak siswa yang menyukai olahraga voli adalah

$$100\% - (10\% + 45\% + 15\%) = 100\% - 70\% = 30\%$$

Diketahui total siswa seluruhnya adalah 120. Maka banyak siswa yang menyukai olahraga voli adalah

$$30\% \cdot 120 = \frac{30}{100} \cdot 120 = \boxed{36}$$

22. Rata-rata dari 5 orang siswa adalah 80. Seorang siswa mengikuti ulangan susulan dan mendapat nilai 92. Rata-rata dari keenam siswa tersebut adalah

- (a) 87
- (b) 77
- (c) 80
- (d) 82

Solusi: (d) 82

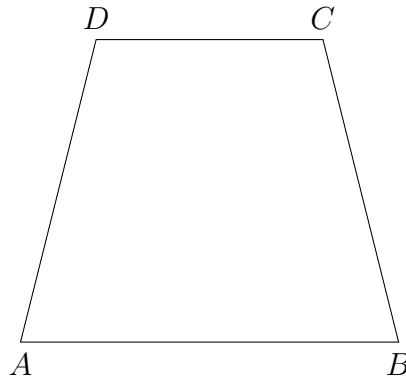
Misalkan nilai dari 5 siswa tersebut adalah x_1, x_2, x_3, x_4 , dan x_5 . Diketahui rata-rata dari 5 siswa tersebut adalah 80.

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} &= 80 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 80 \cdot 5 \\ \therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 400\end{aligned}$$

Seorang siswa mengikuti susulan dan mendapat nilai 92. Maka rata-ratanya adalah

$$\begin{aligned}\text{Rata-rata} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 92}{6} \\ &= \frac{400 + 92}{6} \\ &= \frac{492}{6} \\ \therefore \text{Rata-rata} &= \boxed{82}\end{aligned}$$

23. Perhatikan gambar berikut!

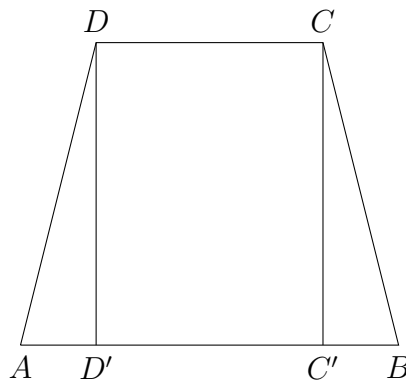


Trapezium $ABCD$ merupakan trapesium samakaki. Jika panjang $AB = 24$ cm, panjang $DC = 12$ cm, dan panjang $AD = 10$ cm, luas trapesium $ABCD$ adalah ... cm^2 .

- (a) 72
- (b) 144
- (c) 180
- (d) 288

Solusi: (b) 144

Kita tarik garis tegak lurus ke sisi AB dari titik D dan C berturut-turut memotong AB di D' dan C' .



Demikian kita peroleh panjang $D'C' = DC = 12$ cm. Karena $ABCD$ trapesium sama kaki, maka panjang $AD' = BC' = x$. Maka

$$\begin{aligned} AD' + D'C' + C'B &= AB \\ x + 12 + x &= 24 \\ 2x &= 24 - 12 \\ x &= \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

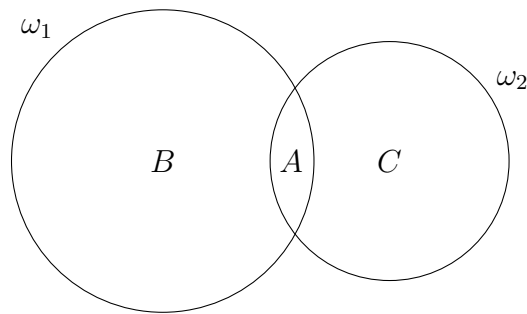
Berarti panjang $AD' = BC' = 6$ cm. Perhatikan pada $\triangle AD'D$. Menurut Phytagoras,

$$\begin{aligned} AD'^2 + DD'^2 &= AD^2 \\ 6^2 + DD'^2 &= 10^2 \\ 36 + DD'^2 &= 100 \\ DD'^2 &= 100 - 36 \Rightarrow DD' = 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

Maka luas trapesium $ABCD$:

$$L = \frac{AB + CD}{2} \cdot DD' = \frac{24 + 12}{2} \cdot 8 = 36 \cdot 4 = \boxed{144} \text{ cm}^2$$

24. Perhatikan gambar berikut!



Diberikan lingkaran ω_1 dan ω_2 , dan daerah perpotongan kedua lingkaran tersebut dinyatakan dengan A . Daerah lingkaran ω_1 tetapi diluar daerah irisan kedua lingkaran dinyatakan dengan B . Daerah ω_2 tetapi diluar daerah irisan kedua lingkaran dinyatakan dengan C . Luas daerah A adalah $\frac{2}{9}$ luas lingkaran ω_1 dan luas daerah A adalah $\frac{2}{5}$ luas lingkaran ω_2 . Jika luas daerah A adalah 4 satuan luas, maka selisih luas daerah B dan C adalah ... satuan luas.

- (a) 8
- (b) 10
- (c) 2
- (d) 16

Solusi: (a) 8

Luas daerah A adalah 4 satuan luas.

Luas daerah A adalah $\frac{2}{9}$ lingkaran ω_1 . Maka

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2}{9} \cdot L_{\omega_1} \\
 4 &= \frac{2}{9}(A + B) \\
 4 \cdot \frac{9}{2} &= 4 + B \\
 18 - 4 &= B \\
 \therefore B &= 14
 \end{aligned}$$

Luas daerah A adalah $\frac{2}{5}$ luas lingkaran ω_2 . Maka

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2}{5} \cdot L_{\omega_2} \\
 4 \cdot \frac{5}{2} &= A + C \\
 10 &= 4 + C \\
 10 - 4 &= C \\
 \therefore C &= 6
 \end{aligned}$$

Sehingga selisih luas daerah B dan C adalah $14 - 6 = \boxed{8}$ satuan luas.

25. Diberikan a, b, c merupakan bilangan asli yang memenuhi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = ab + bc + ac$$

Maka nilai dari $a + b + c$ adalah

- (a) 6
- (b) 5
- (c) 4
- (d) 3

Solusi: (d) 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= ab + bc + ac \\ \frac{bc + ac + ab}{abc} &= ab + bc + ac \\ \frac{ab + bc + ac}{abc} &= ab + bc + ac \end{aligned}$$

Karena a, b, c merupakan bilangan asli, tidak mungkin $a + b + c = 0$. Bagi kedua ruas dengan $ab + bc + ac$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{abc} &= 1 \\ \therefore abc &= 1 \end{aligned}$$

Karena a, b, c bilangan asli, maka hanya akan dipenuhi ketika $a = b = c = 1$. Maka nilai dari $a + b + c = 1 + 1 + 1 = \boxed{3}$.

26. Banyak bilangan real x yang memenuhi

$$(x^2 - 6x + 9)^{x^2 - 1} = 1$$

adalah

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

Solusi: (d) 4

Kasus 1: $x^2 - 1 = 0$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Kasus 2: $x^2 - 6x + 9 = 1$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 4) = 0$$

Maka $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ atau $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$.

Kasus 3: $x^2 - 6x + 9 = -1$

$$x^2 - 6x + 10 = 0$$

Perhatikan bahwa nilai diskriminan persamaan kuadrat tersebut adalah $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(10) = 36 - 40 = -4 < 0$ yang berarti x tidak bernilai real.

Dari ketiga kasus tersebut, semua nilai real x yang memenuhi adalah 1, -1, 2, 4 yang berarti banyak bilangan real x adalah 4.

27. Diberikan a, b, c memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} \frac{a+1}{b+1} = \frac{b+2}{c+2} = \frac{c+3}{a+3} \\ a+b+c = 6 \end{cases}$$

Maka nilai dari $a \times b \times c$ adalah

- (a) 1
- (b) 8
- (c) 27
- (d) 64

Solusi: (b) 8

Misalkan terdapat a_1, a_2, b_1 , dan b_2 sehingga $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$. Maka kita peroleh

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} = k &\Rightarrow a_1 = b_1 k \\ \frac{a_2}{b_2} = k &\Rightarrow a_2 = b_2 k \end{aligned}$$

Yang berarti

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= b_1 k + b_2 k \\ a_1 + a_2 &= (b_1 + b_2)k \\ \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} &= k \end{aligned}$$

Demikian $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$. Maka dengan cara yang sama,

$$\frac{a+1}{b+1} = \frac{b+2}{c+2} = \frac{c+3}{a+3} = \frac{a+1+b+2+c+3}{b+1+c+2+a+3} = 1$$

Maka $\frac{a+1}{b+1} = 1 \Rightarrow a+1 = b+1 \Rightarrow a = b$. Dengan cara yang sama, kita peroleh juga $b = c$ dan $c = a$. Maka kita dapatkan $a = b = c$. Padahal $a + b + c = 6$, maka $a = b = c = 2$ yang berarti $a \times b \times c = 2 \times 2 \times 2 = \boxed{8}$.

28. Diberikan $f(x) = x^2 + ax + b$ sehingga $f(2) = f(4) = 0$. Nilai dari $f(9)$ adalah
- (a) 35
 - (b) 143
 - (c) -2
 - (d) 57

Solusi: (a) 35

Teorema 20

Jika terdapat $f(x) = x^2 + ax + b$ sehingga $f(x_1) = f(x_2) = c$, maka

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) + c$$

Karena $f(2) = f(4) = 0$, maka 2 dan 4 merupakan akar-akar persamaan

$$f(x) = (x - 2)(x - 4) + 0$$

Demikian kita peroleh $f(x) = (x - 2)(x - 4)$. Kita peroleh

$$f(9) = (9 - 2)(9 - 4) = 7 \cdot 5 = \boxed{35}$$

29. Banyak nilai x yang memenuhi persamaan

$$1 \cdot x^{2019} + 2 \cdot x^{2019} + 3 \cdot x^{2019} + \cdots + 100 \cdot x^{2019} = x^{2020}$$

adalah

- (a) 4
- (b) 3
- (c) 2
- (d) 1

Solusi: (a) 35

$$\begin{aligned} 1 \cdot x^{2019} + 2 \cdot x^{2019} + 3 \cdot x^{2019} + \cdots + 100 \cdot x^{2019} &= x^{2020} \\ (1 + 2 + 3 + \cdots + 100)x^{2019} &= x^{2020} \\ \frac{100 \cdot 101}{2} \cdot x^{2019} &= x^{2020} \\ 5050x^{2019} &= x^{2020} \\ 0 &= x^{2020} - 5050x^{2019} \\ 0 &= (x - 5050)x^{2019} \end{aligned}$$

Maka kita peroleh $x - 5050 = 0 \Rightarrow x = 5050$ dan $x^{2019} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Maka banyak nilai x yang memenuhi persamaan adalah $\boxed{2}$.

30. Banyak pasangan bilangan asli (x, k) dengan $x > 2$

$$(x-3)(x-1)(x+1)(x+3) + 16 = k^4$$

adalah

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3

Solusi: (b) 1

Berdasarkan $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,

$$\begin{aligned} k^4 &= (x-3)(x-1)(x+1)(x+3) + 16 \\ &= (x-3)(x+3)(x-1)(x+1) + 16 \\ &= (x^2 - 3^2)(x^2 - 1^2) + 16 \\ &= (x^2 - 9)(x^2 - 1) + 16 \\ &= x^4 - x^2 - 9x^2 + 9 + 16 \\ &= x^4 - 10x^2 + 25 \end{aligned}$$

$$k^4 = (x^2 - 5)^2$$

$$k^2 = x^2 - 5 \quad \text{Karena } x > 2$$

Maka ekuivalen dengan $5 = x^2 - k^2$. Karena x, k bilangan bulat, maka $(x+k)(x-k)$ bilangan bulat. Sedangkan $5 = 5 \cdot 1$. Karena x dan k bilangan asli, maka $x+k > x-k$ dan $x+k > 0$.

- Jika $x+k = 5$ dan $x-k = 1$, dengan menjumlahkan kedua persamaan

$$(x+k) + (x-k) = 5 + 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

Maka diperoleh $k = 2$. Ketika dicek, ternyata memenuhi.

Maka semua pasangan bilangan bulat (x, k) yang memenuhi adalah $(3, 2)$ yang berarti banyak pasangan bilangan asli (x, k) yang memenuhi adalah $\boxed{1}$.

4.6 Kelas 9 Babak Final

1. Diberikan $f(x) = x^2 - 8x + 7$.

- Tentukan semua nilai x sehingga $f(x) = 0$.
- Buktikan bahwa $f(x) \geq -9$.
- Tentukan semua nilai x sehingga $f(x) < 0$.
- Tentukan nilai k sehingga terdapat bilangan real x yang memenuhi $f(x) = k$.
- Gambarkan grafik $f(x)$.

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: (a) 7 dan 1; (c) $1 < x < 7$; (d) $k \geq 9$

(a) Diketahui $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 7 &= 0 \\(x - 1)(x - 7) &= 0\end{aligned}$$

Maka $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ dan $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

(b) Berdasarkan bentuk umum fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, maka kita dapatkan $a = 1, b = -8$, dan $c = 7$. Maka kita dapatkan

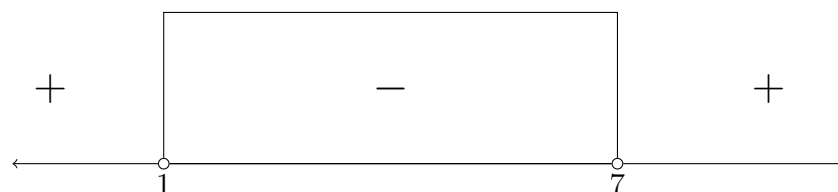
$$\begin{aligned}f(x) &\geq -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-8)^2 - 4(1)(7)}{4(1)} = -\frac{64 - 28}{4} = -\frac{36}{4} = -9 \\ \therefore f(x) &\geq -9\end{aligned}$$

Terbukti

(c) Semua nilai x yang memenuhi $f(x) < 0$.

$$(x - 1)(x - 7) < 0$$

Sehingga $x = 1$ dan $x = 7$. Perhatikan bahwa untuk $x = 0$ berakibat $f(x) > 0$. Maka dengan garis bilangan diperoleh:



$$\therefore \boxed{1 < x < 7}$$

(d) Diketahui $f(x) = k$ dan x real.

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 7 &= k \\x^2 - 8x + (7 - k) &= 0\end{aligned}$$

Kita peroleh $a = 1, b = -8$, dan $c = 7 - k$. Karena x bernilai real, haruslah nilai diskriminannya lebih besar atau samadengan 0 ($D \geq 0$).

Maka kita peroleh

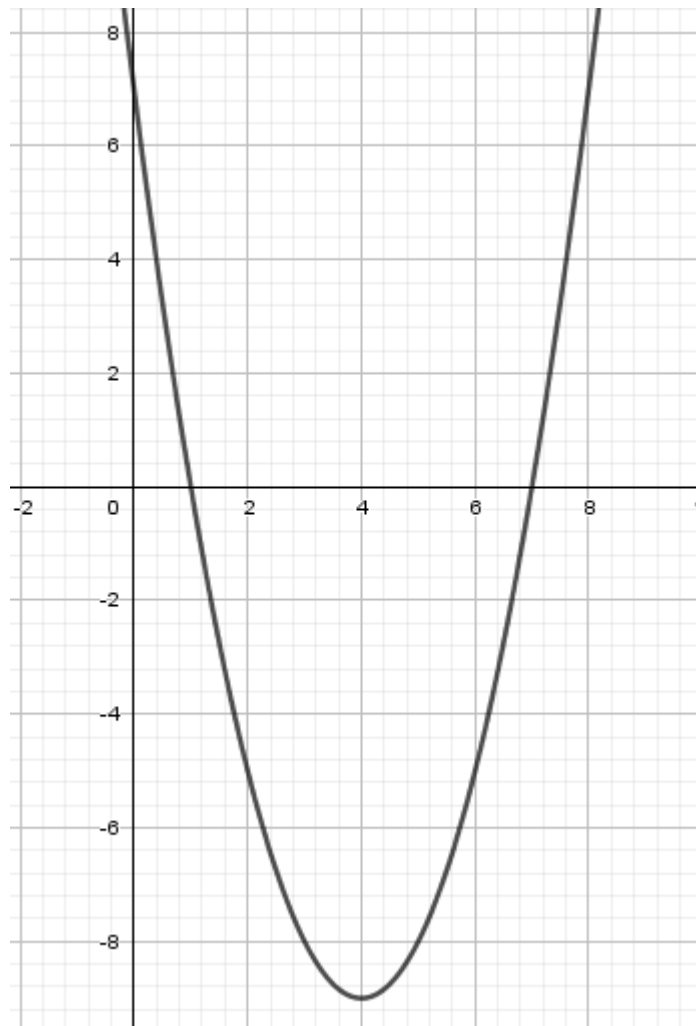
$$\begin{aligned}
 b^2 - 4ac &\geq 0 \\
 (-8)^2 - 4(1)(7 - k) &\geq 0 \\
 64 - 28 + 4k &\geq 0 \\
 36 + 4k &\geq 0 \\
 4k &\geq 0 - 36 \\
 4k &\geq -36 \Rightarrow \boxed{k \geq -9}
 \end{aligned}$$

- (e) Berdasarkan bagian (a), 1 dan 7 merupakan akar-akar dari $f(x) = x^2 - 8x + 7$ yang berarti grafik $f(x)$ memotong sumbu- x di titik $(1, 0)$ dan $(7, 0)$. Perhatikan juga bahwa $f(x)$ memotong sumbu- y di titik $(0, 7)$.

Kita tentukan sumbu simetri grafik $f(x) = x^2 - 8x + 7$.

$$\begin{aligned}
 x_{op} &= \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(1)} = 4 \\
 y_{op} &= \frac{-D}{4a} = -9
 \end{aligned}$$

Maka titik puncak grafik fungsi $f(x)$ adalah $(x_{op}, y_{op}) = (4, -9)$.



Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0,7 sehingga soal ini dikategorikan soal sulit.

2. Jika

$$\frac{\sqrt{21 + 2 \times 108^{\frac{1}{2}}} + (26 - 6\sqrt{17})^{\frac{2}{4}}}{2\sqrt{29 + 4\sqrt{51}}} = \frac{m}{n}$$

dimana $FPB(m, n) = 1$ dan m, n bilangan asli, tentukan nilai $m + n$.

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

Solusi: 3

Teorema 21

Berdasarkan

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \text{dan} \quad (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\begin{aligned} \sqrt{21 + 2 \times (108)^{\frac{1}{2}}} &= \sqrt{21 + 2\sqrt{108}} \\ &= \sqrt{12 + 9 + 2\sqrt{12 \cdot 9}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{12} + \sqrt{9})^2} \\ \therefore \sqrt{21 + 2 \times (108)^{\frac{1}{2}}} &= \sqrt{12} + \sqrt{9} = 2\sqrt{3} + 3 \\ (26 - 6\sqrt{17})^{\frac{2}{4}} &= (26 - 2\sqrt{3^2 \cdot 17})^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{17 + 9 - 2\sqrt{17 \cdot 9}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{17} - \sqrt{9})^2} \\ &= \sqrt{17} - \sqrt{9} \\ \therefore (26 - 6\sqrt{17})^{\frac{2}{4}} &= \sqrt{17} - 3 \\ \sqrt{29 + 4\sqrt{51}} &= \sqrt{29 + 2\sqrt{2^2 \cdot 51}} \\ &= \sqrt{17 + 12 + 2\sqrt{17 \cdot 12}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{17} + \sqrt{12})^2} \\ \therefore \sqrt{29 + 4\sqrt{51}} &= \sqrt{17} + \sqrt{12} = \sqrt{17} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Maka kita peroleh

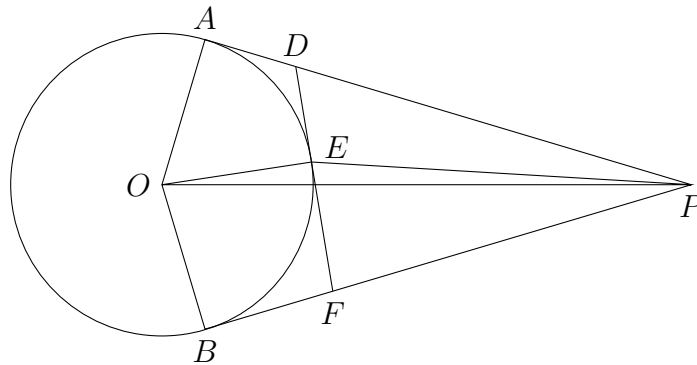
$$\begin{aligned}
 \frac{m}{n} &= \frac{\sqrt{21 + 2 \times 108^{\frac{1}{2}}} + (26 - 6\sqrt{17})^{\frac{2}{4}}}{2\sqrt{29 + 4\sqrt{51}}} \\
 &= \frac{2\sqrt{3} + 3 + (\sqrt{17} - 3)}{2(\sqrt{17} + 2\sqrt{3})} \\
 &= \frac{2\sqrt{3} + 3 + \sqrt{17} - 3}{2(\sqrt{17} + 2\sqrt{3})} \\
 &= \frac{\sqrt{17} + 2\sqrt{3}}{2(\sqrt{17} + 2\sqrt{3})} \\
 \therefore \frac{m}{n} &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Kita peroleh $m = 1$ dan $n = 2$. Jadi, $m + n = 1 + 2 = \boxed{3}$.

Komentar:

- (a) Soal ini digolongkan soal sangat sulit karena hanya rata-rata nilai peserta yang berhasil menyelesaikan soal ini adalah 0.
- (b) Banyak peserta menghitung $a + b\sqrt{c}$ menjadi $(a + b)\sqrt{c}$ atau $a \cdot b^{\frac{1}{2}}$ menjadi $(ab)^{\frac{1}{2}}$.

3. Perhatikan gambar di bawah!



Titik O merupakan pusat lingkaran. Titik A dan B berada di keliling lingkaran sehingga $\angle PBO = \angle PAO = 90^\circ$. Jika panjang $AP = 17$ cm dan $OB = 4$ cm, tentukan panjang OP .

Diusulkan oleh Lazuardini Dinda Aaqila

Solusi: $\sqrt{305}$ cm

Perhatikan bahwa PB dan PA masing-masing merupakan garis singgung. Perhatikan bahwa OA dan OB masing-masing merupakan jari-jari lingkaran sehingga panjang $AO = BO$. Karena panjang $OA = OB$, maka panjang $PB = PA$. Maka menurut Pythagoras,

$$OP = \sqrt{AO^2 + AP^2} = \sqrt{4^2 + 17^2} = \boxed{\sqrt{305} \text{ cm}}$$

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 6,6 sehingga tingkat kesulitan soal ini adalah sangat mudah.
- (b) Kesalahan peserta antara lain mengaplikasikan Pythagoras dengan tidak tepat, yaitu dengan $OP = \sqrt{AP^2 - AO^2}$.

4. Untuk n bilangan asli, didefinisikan $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$. Sebagai contoh, $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ dan $3! = 1 \times 2 \times 3$.

Diberikan x dan y bilangan asli yang memenuhi

$$x! + y! = x! \times y!$$

Tentukan semua pasangan (x, y) yang memenuhi.

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: (2, 2)

WLOG (tanpa mengurangi keumuman), misalkan $x > y$.

Definisikan RHS (right hand side) adalah ruas kanan dan LHS (left hand side) adalah ruas kiri.

Perhatikan bahwa $RHS = x! \times y! \equiv 0 \pmod{x!}$. Karena $LHS = RHS$, maka haruslah $LHS \equiv 0 \pmod{x!}$. Karena $x! \equiv 0 \pmod{x!}$, agar $x! + y! \equiv 0 \pmod{x!}$ haruslah $y! \equiv 0 \pmod{x!}$.

Karena $x > y$, tidak mungkin $y!$ habis dibagi $x!$ sehingga tidak mungkin $x! + y! = x! \times y!$.

Maka haruslah $x = y$. Substitusikan.

$$\begin{aligned} x! + y! &= x! \times y! \\ x! + x! &= (x!)^2 \\ 2x! &= (x!)^2 \\ 0 &= (x!)^2 - 2x! \\ \therefore 0 &= (x! - 2) \cdot x! \end{aligned}$$

Karena tidak mungkin $x! = 0$, sehingga haruslah $x! - 2 = 0 \Rightarrow x! = 2 \Rightarrow x = 2$. Kita peroleh $y = x = 2$.

Jadi, semua pasangan (x, y) yang memenuhi adalah $\boxed{(2, 2)}$.

Solusi Alternatif.

$$\begin{aligned} x! + y! &= x! \times y! \\ \frac{x! + y!}{x! \times y!} &= 1 \\ \frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} &= 1 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk $x = y = 2$ memenuhi.

Untuk $x, y > 2$, berakibat

$$\begin{aligned} x! > 2 &\implies \frac{1}{x!} < \frac{1}{2} \\ y! > 2 &\implies \frac{1}{y!} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Maka kita peroleh

$$\frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$
$$\therefore \frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} < 1$$

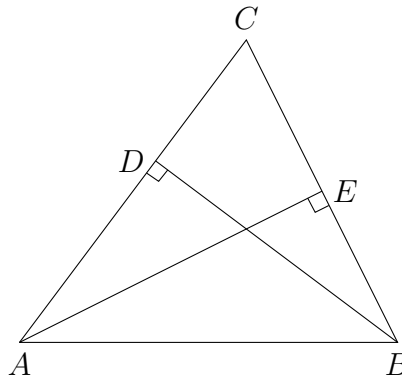
Sehingga untuk $x, y > 2$ tidak mungkin $\frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} = 1$.

Jadi, semua pasangan (x, y) yang memenuhi adalah $\boxed{(2, 2)}$.

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0 sehingga tingkat kesulitan soal ini adalah sangat sulit.
- (b) Kesalahan peserta antara lain mengubah $x! + y! = x!y!$ menjadi $\frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} = 0$.

5. Perhatikan gambar berikut!



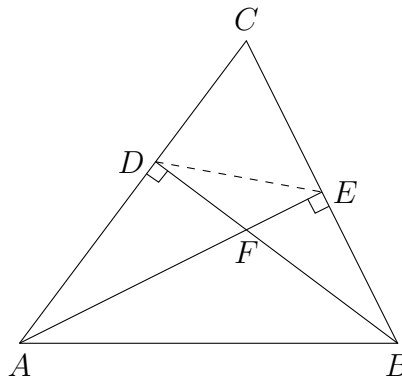
Diberikan $\triangle ABC$, dengan BD dan AE merupakan garis tinggi $\triangle ABC$.

- Buktikan bahwa besar $\angle DAE = \angle EBD$.
- Buktikan bahwa $ABED$ segiempat talibusur.
- Buktikan bahwa $\angle BAC = \angle DEC$ dan $\angle ABC = \angle CDE$.

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Bukti.

Misalkan BD dan AE berpotongan di F .



- Misalkan besar $\angle DFA = y$. Maka

$$\begin{aligned}\angle DAF + \angle DFA + \angle ADF &= 180^\circ \\ \angle DAF + y + 90^\circ &= 180^\circ \\ \angle DAF &= 180^\circ - 90^\circ - y \\ \angle DAF &= 90^\circ - y\end{aligned}$$

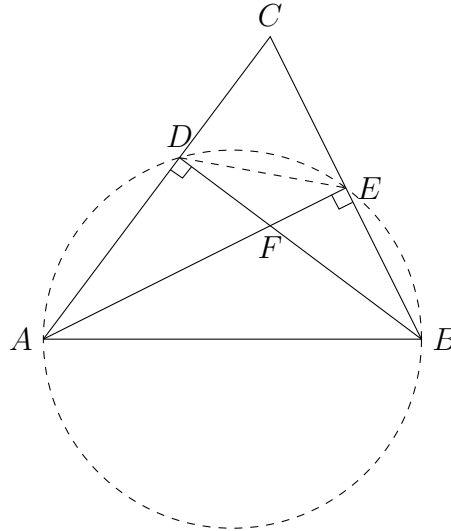
Karena $\angle DFA$ dan $\angle EFB$ bertolak belakang, maka besar $\angle EFB = \angle DFA = y$.
Maka

$$\begin{aligned}\angle FBE + \angle EFB + \angle BEF &= 180^\circ \\ \angle FBE + y + 90^\circ &= 180^\circ \\ \angle FBE &= 180^\circ - 90^\circ - y \\ \angle FBE &= 90^\circ - y\end{aligned}$$

Kita peroleh besar $\angle DAF = \angle FBE = 90^\circ - y$. Padahal besar $\angle DAF = \angle DAE$ dan $\angle FBE = \angle EBD$. Berarti $\angle DAE = \angle EBD$.

Terbukti

- (b) Karena besar $\angle ADB = \angle AEB$ dan besar $\angle DAE = \angle EBD$, maka $ABED$ merupakan segiempat talibusur.



Terbukti

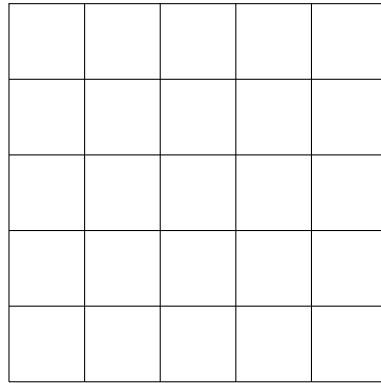
- (c) Karena $ABED$ merupakan segiempat talibusur, berakibat $\angle BAC = \angle DEC$ dan $\angle ABC = \angle CDE$.

Terbukti

Komentar:

- Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0,6 sehingga tingkat kesulitan soal ini adalah sulit.
- Memberikan asumsi yang tidak disertai bukti merupakan hal yang tidak valid. Seperti mengasumsikan $\triangle ADB$ sebangun dengan $\triangle ABE$.
- Beberapa kemungkinan nilai peserta yang menghasilkan tidak sempurna adalah mengasumsikan $\triangle ADF$ dan $\triangle FBE$ sebangun. Kedua segitiga itu memang sebangun, tetapi peserta tidak memberikan bukti secara jelas. Anggap pengoreksi tidak tahu bahwa kedua segitiga itu sebangun, maka anda bertugas meyakinkan mereka.
- Bagi pembaca yang ingin memperdalam teknik *angle chasing* (pencarian besar-besar sudut dan relasi-relasinya), pembaca disarankan untuk membaca ebook "*Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*" oleh *Evan Chen*.

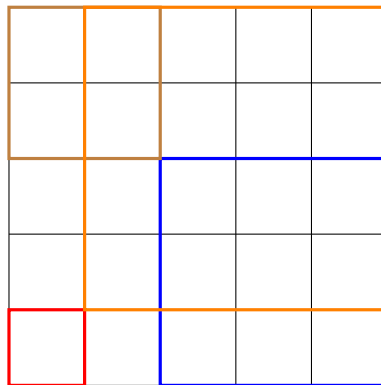
6. Diberikan sebuah persegi berukuran 5×5 , dibuat dari beberapa persegi 1×1 .



Tentukan banyak persegi pada gambar di atas.

Diusulkan oleh Valeent Roynald Subakti

Solusi: 55



Banyak persegi yang terbentuk dari persegi 1×1 ada 25.

Banyak persegi yang terbentuk dari persegi 2×2 adalah 16.

Banyak persegi yang terbentuk dari persegi 3×3 adalah 9.

Banyak persegi yang terbentuk dari persegi 4×4 adalah 4.

Banyak persegi yang terbentuk dari persegi 5×5 adalah 1.

Sehingga banyak persegi pada gambar tersebut adalah 55.

Solusi Alternatif.

Banyak persegi $n \times n$ yang terbentuk adalah

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Sehingga banyak persegi dari persegi 5×5 adalah

$$\frac{5(5+1)(2 \cdot 5 + 1)}{6} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} = \boxed{55}$$

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 4,5 sehingga tingkat kesulitan soal ini adalah mudah.
- (b) Salah satu penyebab peserta tidak mendapat poin yang maksimal adalah ada beberapa persegi yang tidak terhitung. Karena sebagian peserta menghitung banyak persegi secara satu per satu sehingga membutuhkan ketelitian yang ekstra.

7. Tentukan banyak bilangan bulat m dengan $3 \leq m \leq 25$ yang memenuhi persamaan

$$\begin{cases} a + 2b = m \\ a - b = 7 \end{cases}$$

dengan a dan b bilangan asli.

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: 6

Dengan mengurangkan kedua persamaan,

$$\begin{aligned} (a + 2b) - (a - b) &= m - 7 \\ a + 2b - a + b &= m - 7 \\ 3b &= m - 7 \\ \therefore b &= \frac{m - 7}{3} \end{aligned}$$

Karena b bilangan bulat, maka $m - 7 \equiv 0 \pmod{3}$. Karena $7 \equiv 1 \pmod{3}$, maka haruslah $m \equiv 1 \pmod{3}$. Mengingat bahwa b bilangan asli, haruslah $m - 7 > 0 \Rightarrow m > 7$.

- Untuk $m = 10$, maka diperoleh $b = 1$ dan $a = 8$.
- Untuk $m = 13$, maka diperoleh $b = 2$ dan $a = 9$.
- Untuk $m = 16$, maka diperoleh $b = 3$ dan $a = 10$.
- Untuk $m = 19$, maka diperoleh $b = 4$ dan $a = 11$.
- Untuk $m = 22$, maka diperoleh $b = 5$ dan $a = 12$.
- Untuk $m = 25$, maka diperoleh $b = 6$ dan $a = 13$.

Sehingga terdapat 6 bilangan asli m yang memenuhi.

Catatan:

Definisi $a \equiv b \pmod{c}$ adalah a bersisa b jika dibagi c . Sebagai contoh, $5 \equiv 2 \pmod{3}$ karena 5 bersisa 2 jika dibagi 3 dan $10 \equiv 0 \pmod{5}$ karena 10 bersisa 0 jika dibagi 5.

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0,7 sehingga soal ini dikategorikan soal sulit.
- (b) Ide pertama yang dapat digunakan yaitu menghilangkan salah satu variabel (eliminasi).
- (c) Bagi pembaca yang belum familiar, pembaca disarankan membaca "*Operasi Modulus*" atau "*Modulo*".

8. Tentukan nilai dari

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{64^8}} - \sqrt{\sqrt[5]{36^5}}}{\sqrt[4]{\sqrt{125^{\frac{8}{3}}}}}$$

Diusulkan oleh Valeent Roynald Subakti

Solusi: 2

Berdasarkan $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt[4]{64^8}} &= 64^{8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}} = 64^{\frac{2}{3}} = (2^6)^{\frac{2}{3}} = 2^{6 \cdot \frac{2}{3}} = 2^4 = 16 \\ \sqrt{\sqrt[5]{36^5}} &= 36^{5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} = (6^2)^{\frac{1}{2}} = 6^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 6^1 = 6 \\ \sqrt[4]{\sqrt{125^{\frac{8}{3}}}} &= 125^{\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = 125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 5^1 = 5\end{aligned}$$

Kita dapatkan

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{64^8}} - \sqrt{\sqrt[5]{36^5}}}{\sqrt[4]{\sqrt{125^{\frac{8}{3}}}}} = \frac{16 - 6}{5} = \frac{10}{5} = \boxed{2}$$

Jadi, nilai dari $\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{64^8}} - \sqrt{\sqrt[5]{36^5}}}{\sqrt[4]{\sqrt{125^{\frac{8}{3}}}}}$ adalah $\boxed{2}$.

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 5 sehingga soal ini adalah soal mudah.

9. Tentukan semua nilai x yang memenuhi

$$(x^2 - 8x + 11)^{x^2 - 6x + 8} = 1$$

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

Solusi: $2, 4, 6, -4 + \sqrt{6}$, dan $-4 - \sqrt{6}$

Kasus 1: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$(x - 4)(x - 2) = 0$$

Sehingga $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ atau $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Kasus 2: $x^2 - 8x + 11 = 1$

$$x^2 - 8x + 10 = 0$$

Maka $a = 1, b = -8$, dan $c = 10$. Dengan rumus ABC (kecap, baterai, dan lain-lain):

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(10)}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 40}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{24}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm 2\sqrt{6}}{2} \\ \therefore x_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

Kita peroleh $x = -4 + \sqrt{6}$ dan $x = -4 - \sqrt{6}$.

Kasus 3: $x^2 - 8x + 11 = -1$.

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \implies (x - 2)(x - 6) = 0$$

Maka kita peroleh $x = 2$ dan $x = 6$. Ketika dicek kembali, ternyata memenuhi.

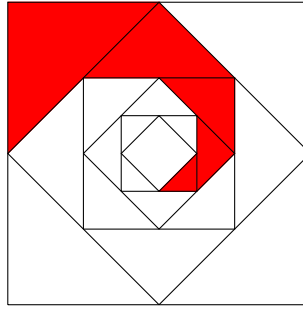
Dari ketiga kasus tersebut, didapat nilai x yang memenuhi adalah $2, 4, 6, -4 + \sqrt{6}$, dan $-4 - \sqrt{6}$.

Jadi, semua nilai x yang memenuhi adalah $\boxed{2, 4, 6, -4 + \sqrt{6}, \text{ dan } -4 - \sqrt{6}}$.

Komentar:

- (a) Rata-rata nilai peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0,3 sehingga soal ini dapat dikategorikan soal sangat sulit.
- (b) Soal ini dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat-sifat pada eksponen (perpangkatan). Bagi yang belum familiar, pembaca disarankan membaca tentang *Eksponen* dan *Persamaan Kuadrat*.

10. Jika panjang sisi persegi terbesar adalah $\frac{1}{2}$ satuan dan persegi berikutnya diperoleh dengan cara menghubungkan semua titik tengah pada keempat sisinya. Tentukan luas yang diarsir dalam satuan luas.



Diusulkan oleh Anindya Puspita Budiariani

Solusi: $\frac{31}{512}$ satuan luas

Misalkan P_n menyatakan persegi ke- n dan S_n menyatakan segitiga yang berwarna merah ke- n .

Diketahui panjang sisi P_1 adalah $\frac{1}{2}$. Maka panjang sisi siku-siku S_1 adalah $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ satuan. Sehingga luas S_1 :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32} \text{ satuan luas}$$

Karena S_1 adalah segitiga samakaki, maka panjang sisi P_2 adalah $\frac{1}{4}\sqrt{2}$ satuan. Maka panjang sisi S_2 adalah $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$ satuan. Sehingga luas S_2 :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{1}{64} \text{ satuan luas}$$

Karena S_2 segitiga samakaki, maka panjang sisi P_3 adalah $\frac{1}{8}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{4}$ satuan. Maka panjang sisi S_3 adalah $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ satuan. Sehingga luas S_3 :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{128} \text{ satuan luas}$$

Karena S_3 segitiga samakaki, maka panjang sisi P_4 adalah $\frac{1}{8}\sqrt{2}$ satuan. Maka panjang sisi S_4 adalah $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{1}{16}\sqrt{2}$ satuan. Sehingga luas S_4 :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{16}\sqrt{2} = \frac{1}{256} \text{ satuan luas}$$

Karena S_4 segitiga samakaki, maka panjang sisi P_5 adalah $\frac{1}{16}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{8}$ satuan. Maka panjang sisi S_5 adalah $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$ satuan. Sehingga luas S_5 :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{512} \text{ satuan luas}$$

Maka luas daerah yang diarsir adalah

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 &= \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} \right) \text{ satuan luas} \\ &= \frac{16 + 8 + 4 + 2 + 1}{512} \text{ satuan luas} \\ L_{arsir} &= \frac{31}{512} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah $\boxed{\frac{31}{512} \text{ satuan luas}}$.

Solusi Alternatif.

Misalkan L_{P_n} dan L_{S_n} berturut-turut menyatakan luas P_n dan S_n .

Perhatikan bahwa $L_{P_{n-1}} = \frac{1}{2}L_{P_n}$. Sehingga juga berakibat $L_{S_{n-1}} = \frac{1}{2}L_{S_n}$.

Kita peroleh $L_{S_1} = \frac{1}{32}$ satuan luas. Sehingga

$$\begin{aligned} L_{S_2} &= \frac{1}{2}L_{S_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{64} \text{ satuan luas} \\ L_{S_3} &= \frac{1}{2}L_{S_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{128} \text{ satuan luas} \\ L_{S_4} &= \frac{1}{2}L_{S_3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{128} = \frac{1}{256} \text{ satuan luas} \\ L_{S_5} &= \frac{1}{2}L_{S_4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{256} = \frac{1}{512} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

Maka luas daerah yang diarsir adalah:

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} \right) \text{ satuan luas} \\ &= \frac{16 + 8 + 4 + 2 + 1}{512} \text{ satuan luas} \\ L_{arsir} &= \frac{31}{512} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

Jadi, luas daerah yang diarsir adalah $\boxed{\frac{31}{512} \text{ satuan luas}}$.

Komentar:

- Rata-rata peserta dalam mengerjakan soal ini adalah 0,9 sehingga soal ini termasuk soal sulit.
- Salah satu kemungkinan yang menyebabkan tidak mendapatkan poin yang maksimal adalah adanya tipografi. Seperti $\frac{1}{216}$ tetapi dituliskan $\frac{1}{261}$, melainkan proses selanjutnya benar.

5 Scemathics Olympiad TST

Pada bagian ini, disajikan soal yang *tidak* ditunjuk di soal lomba. Selamat menikmati!

1. Tentukan nilai x yang memenuhi $\frac{1}{x}(x+7) = 8$.

Diusulkan oleh Kinasih Asta K.

2. Jumlah semua sudut-sudut dalam pada segi-8 adalah ... $^{\circ}$.

Diusulkan oleh Maulidan Rochmatul Aulia

3. Tentukan banyak pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi $\frac{7}{x} = \frac{y}{8}$.

Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

4. Nilai dari $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$ adalah

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

5. Buktikan bahwa

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

untuk semua bilangan real x, y , dan z .

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

6. Diberikan segiempat tali busur $ABCD$ dengan AC merupakan diameter lingkaran. Jika panjang $AB = 10$, $AD = 8$, dan $BC = 6$, maka luas segiempat $ABCD$ adalah

Diusulkan oleh Firmansyah Fahmi Nugraha

7. Diberikan $f(x) = 7x + 2$ dan $g(f(x)) = 14x + 3$. Maka nilai dari $g^{-1}(2)$ adalah

Diusulkan oleh Faricha Azkia Ulfa

8. Diberikan $\triangle ABC$, dibuat lingkaran yang melalui titik A dan C sehingga memotong AB dan BC berturut-turut di titik E dan F . Jika panjang $BF = FC = p$ dan p bilangan prima, buktikan bahwa $AB \cdot EB$ dapat habis dibagi oleh 6 bilangan asli.

Diusulkan oleh Anindya Puspita Budiariani

9. Banyak bilangan prima yang habis membagi 2019^8 adalah

Diusulkan oleh Hersyananda Ramdhani Mahira Arifin

10. Angka satuan dari 7^{2019} adalah

Diusulkan oleh Syefira Adji

11. Jumlah dua bilangan prima berbeda merupakan bilangan ganjil. Buktikan bahwa jika bilangan prima yang lebih besar dibagi bilangan prima yang lebih kecil selalu bersisa 1.

Diusulkan oleh Yahya Setiawan

12. Diberikan bilangan asli a dan b dengan $a > b$ sehingga $FPB(a + b, a - b) = 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{2a + b}{5a + b}$$

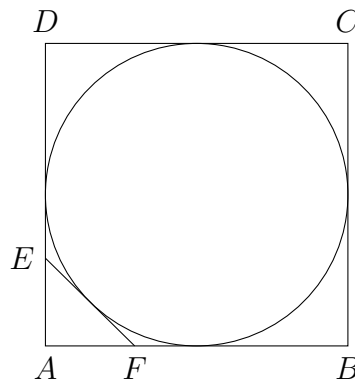
merupakan bentuk pecahan paling sederhana.

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

13. Buktikan bahwa $652^n + 4710^n$ selalu habis dibagi 7 jika dan hanya jika n bilangan ganjil.

Diusulkan oleh Karina Tiara Putri

14. Diberikan persegi $ABCD$ dan lingkaran di dalam persegi $ABCD$ yang menyinggung keempat sisi persegi $ABCD$. Titik E dan F berturut-turut pada sisi AD dan AB sehingga $\triangle AFE$ menyinggung lingkaran. Tentukan perbandingan keliling persegi terhadap keliling $\triangle AEF$.



Diusulkan oleh Fabian Thariq El Hadi

15. Didefinisikan $\lceil x \rceil$ adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x . Sebagai contoh, $\lceil 2 \rceil = 2$, $\lceil 33, 1 \rceil = 34$, dan $\lceil -2, 7 \rceil = -2$.

Diberikan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2019}$ dengan $0 < x_i < 1$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, 2019$. Tentukan nilai dari

$$\lceil x_1 \rceil + \lceil x_2 \rceil + \lceil x_3 \rceil + \dots + \lceil x_{2019} \rceil$$

Diusulkan oleh Yahya Setiawan

16. Bentuk pecahan yang senilai dari $0, 2019201920192019 \dots$ adalah

Diusulkan oleh Ghufon Bagaskara

17. Banyak pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ adalah

Diusulkan oleh Lazuardini Dinda Aqilah

18. Bilangan asli n terbesar sehingga $\frac{17!}{3^n}$ bilangan bulat adalah

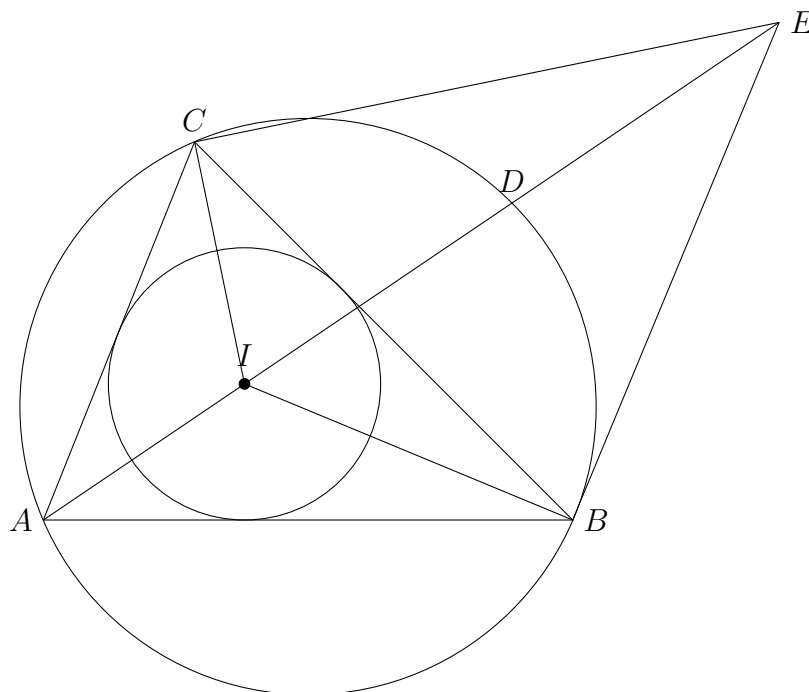
Diusulkan oleh Lahu Aldo Wadagaprana

19. Tentukan nilai $k + l$ terkecil dengan k dan l bilangan asli yang memenuhi persamaan

$$7k + 3 = 5l + 2$$

Diusulkan oleh Valeent Roynald Subakti

20. Diberikan $\triangle ABC$ lancip dengan I merupakan titik pusat lingkaran dalam $\triangle ABC$. Perpanjang AI sehingga memotong lingkaran luar $\triangle ABC$ di D . Titik I dicerminkan terhadap titik D menghasilkan titik E seperti pada gambar di bawah.



Buktikan $BECI$ segiempat tali busur.

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

21. Diberikan $\triangle ABC$ lancip dan misalkan lingkaran luar $\triangle ABC$ yang berpusat di O adalah ω . Titik D terletak pada segmen AB sehingga CD melalui titik O . Titik E terletak diluar lingkaran ω sehingga ED memotong lingkaran ω di titik F dan berlaku

$$EF \cdot FD = EC^2 - EF^2 \quad \text{dan} \quad BD^2 + BE^2 = ED^2$$

Buktikan bahwa ED sejajar CA .

Diusulkan oleh Wildan Bagus Wicaksono

6 Kisah Sang Juara

6.1 Fabian Thariq El Hadi

Assalamualaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Perkenalkan nama saya Fabian Thari El Hadi, bisa dipanggil Fabian atau Febi. Saya ingin berbagi pengalaman olimpiade matematika saya! Mulai dari yang awalnya baru mengenal matematika sampai sekarang duduk di kelas 9 SMP.



Saya mulai tertarik matematika waktu di kelas 3 SD. Saya tertarik pelajaran ini karena saya merasa senang waktu mengerjakan soal matematika. Matematika sudah seperti permainan yang seru bagi saya. Namun untuk matematika, nilai pelajaran saya kurang bagus.

Saya baru mengenal olimpiade matematika di kelas 5 SD. Waktu itu SMPN 1 Probolinggo mengadakan lomba olimpiade matematika dan IPA. Saya tertarik mengikutinya karena kata guru saya, kalau saya bisa menang di lomba tersebut, saya bisa dengan mudah masuk tanpa tes ke SMPN 1 Probolinggo. Nah, karena saya hanya dibekali materi SD kelas 5, saya tidak bisa mengerjakan soal-soal yang dilombakan. Karena materi yang diujikan belum pernah saya dapatkan.

Lalu di sekolah saya diadakan seleksi untuk mewakili sekolah di OSN tingkat kota. Saya mengikuti seleksi tersebut. Dan besoknya saya dipanggil dan diberi tahu bahwa saya lolos untuk mewakili sekolah di OSK matematika. Namun besoknya lagi nama saya dicoret dan saya dimasukkan ke lomba siswa berprestasi putra tingkat kota. Dan alhamdulillah saya meraih juara 2.

Kemudian di kelas 6, saya mengikuti olimpiade MIPA yang diadakan SMPN 5 Probolinggo. Dan saya tidak menyangka bisa membawa pulang juara 3. Kemudian ada lomba lagi, namun ini bukan olimpiade, namun tetap lomba matematika. Dan saya berhasil menjadi juara 2. Beberapa hari kemudian ada lomba lagi. Lomba ini merupakan lomba yang sama, yang saya ikuti waktu kelas 5. Lomba ini diadakan SMPN 1 Probolinggo. Dan alhamdulillah kekalahan saya terbalaskan, saya dapat juara harapan 1 dalam lomba tersebut.



Pengalaman saya terus berlanjut ketika di SMP. Waktu di SMP saya lolos untuk mengikuti extra OSN di sekolah. Waktu pertama saya kurang bisa mengikuti materi olimpiade untuk SMP. Walau terus belajar saya belum bisa menguasai materi SMP, sehingga pada saat kelas 7, saya masih tidak bisa mengikuti OSN tingkat kota. Namun saya tidak patah semangat, saya terus berusaha agar dapat menjadi perwakilan untuk mengikuti OSK di kelas 8.

Saya baru bisa memahami materi olimpiade SMP di kelas 8. Ada teman saya yang membantu saya dalam belajar. Dia meminjamkan buku, mengajari saya, memberi saran untuk membeli buku apa, dan menjadi rekan saya dalam olimpiade beregu. Ketika 1 regu dengannya saya banyak belajar darinya. Sehingga kemampuan saya semakin lama semakin meningkat. Lalu tibalah seleksi untuk menentukan siapa yang menjadi perwakilan mengikuti OSN tingkat kota. Dan saya tidak lolos dalam seleksi tersebut. Pengalaman saya terus berlanjut di kelas 9. Saya tetap mengikuti lomba-lomba yang ada. Namun saya tidak bisa mengikuti semua lomba, karena saya sudah harus fokus untuk kegiatan kelas 9.

Selama masa SMP, saya mengikuti banyak lomba olimpiade matematika seperti MLC, OMITS, OMVN, Dirganala, PEMNAS, S2LC, LIGA MATEMATIKA, MSC, dan lain lain. Namun saya hanya memperoleh sedikit prestasi karena sebagian besar mengalami kekalahan. Dalam beberapa lomba saya dapat masuk ke babak selanjutnya di luar kota. Sebagian lomba yang telah saya menangi seperti juara harapan olimpiade matematika 1 di SMA 1 Paiton, juara harapan 1 olimpiade MIPA SMAN 1 Probolinggo, juara 1 lomba olimpiade matematika intern sekolah, dan lain lain. Untuk prestasi terbaik yang pernah saya peroleh yaitu harapan 2 lomba olimpiade matematika Vektor nasional beregu.



Untuk kedepannya saya akan terus berusaha agar dapat lolos untuk menjadi peserta Olimpiade Sains Nasional di SMA. Hanya itu pengalaman yang dapat saya sampaikan, semoga bermanfaat! Wassalamualaikum warahmatullahi wabarakatuh.

6.2 Faricha Azkia Ulfa

Nama saya Faricha Azkia Ulfa saya dari kelas 9.7. Saat ini saya bergabung dalam schematics bidang matematika. Saya suka matematika sejak SD. Saya selalu suka saat pelajaran matematika berlangsung.



Saya pertama kali ikut olimpiade kelas 3 SD. Pada saat itu saya dipilih oleh guru untuk mewakili sekolah di tingkat Kabupaten. Pertama kali ikut lomba saya sangat grogi saat mengerjakan soal. Saya takut tidak bisa, takut salah dan takut kalah. Tapi, lama kelamaan saya bisa terbiasa menghadapi soal olimpiade dan tidak terlalu grogi. Selama ikut lomba, saya juga sering mengalami kekalahan. Untuk itu, saya lebih banyak berdoa dan berlatih lagi. Materi materi yang tidak saya mengerti saya tanyakan pada kakak yang kebetulan juga suka matematika. Hal itu terus terjadi hingga saat ini. Setiap ada lomba saya selalu berusaha menyempatkan diri untuk ikut. Saya tidak terlalu berambisi untuk menang, saya hanya mencari pengalaman dan wawasan baru. Dari lomba tersebut terkadang saya mendapat teman baru, kenalan baru dari dalam maupun luar kota. Jika diberi kesempatan untuk menang, itu bonus bagi saya. Jika pun saya kalah, saya tidak bersedih dan mencoba di lain kesempatan.

6.3 Wildan Bagus Wicaksono

Assalaamu'alaikum wr. wb.

Halo! Perkenalkan nama saya Wildan Bagus Wicaksono dari kelas 9.2. Baru tahun 2019 saya akan lulus. Aamiin :v.



Saat SD, saya lebih menyukai mata pelajaran IPA karena banyak gambar yang menarik sehingga saya waktu itu lebih tertarik ke mata pelajaran IPA. Namun, saat kelas 5 saya ditunjuk untuk mengikuti olimpiade matematika (saat itu saya belum mengetahui apapun tentang olimpiade seperti OSN). Saya hanya dibekali materi kelas 5 dan kelas 6 SD oleh guru saya. Saat di rumah, saya juga tidak pernah mencari soal-soal olimpiade matematika dan hanya belajar materi yang diberikan oleh guru saya.

Saat pelaksanaan lomba, terdapat 3 babak: isian singkat, uraian, dan eksplorasi. Babak pertama, kami disajikan soal babak uraian. Pertama kali saya melihat selembar kertas soal dengan 10 soal yang disajikan, saya langsung merasa pusing dan tidak tahu apa-apa yang harus dilakukan. Saya hanya bisa menebak-nebak jawabannya dan tentunya jawaban itu bukanlah jawaban yang valid. Pada babak kedua, yaitu babak eksplorasi. Kalau tidak salah, seingat saya disajikan 4 soal. Pada babak ini, saya hanya bisa mengerjakan sedikit soal saja. Semua saya kerjakan tetapi masalahnya saya tidak menuliskan prosesnya (caranya) dan langsung menuliskan jawaban akhir. Tentunya hal ini tidak akan mendapatkan poin sama sekali. Babak ketiga, yaitu isian singkat. Pada babak ini, kita hanya perlu menuliskan hasil akhir saja. Sama dengan babak pertama, ada beberapa soal yang disajikan dalam bahasa Inggris. Tentunya membuat saya semakin bingung. Pada babak ini, saya lumayan bisa mengerjakan beberapa soal saja. Dan beberapa hari, diumumkan hasil peserta yang lolos ke provinsi dan saya tidak lolos. Semenjak itu, saya mulai tertarik terhadap soal olimpiade matematika.

Saat itu, saya belum bisa menemukan atau jarang sekali buku Olimpiade Matematika di Kota Probolinggo. Sehingga jika guru saya memiliki buku Olimpiade Matematika, saya biasanya langsung pinjam untuk fotokopi. Saya juga mulai sering mengikuti olimpiade matematika yang diadakan oleh universitas-universitas dan yang lainnya seperti Vektor oleh UM. Dan satupun dari lomba-lomba yang saya ikuti tidak berhasil saya menangkan. Namun, saya tidak putus asa dan semakin bersemangat.

Kemudian, ada olimpiade matematika dan IPA tingkat SD/MI sederajat yang diadakan oleh SMP Negeri 1 Probolinggo. Saya mengikuti bidang matematika dan banyak bertemu dengan orang-orang yang sudah menjadi pemenang di lomba lainnya. Namun, saya tidak minder. Saat babak penyisihan, kami disajikan soal pilihan ganda. Pada babak ini, saya lumayan banyak bisa mengerjakan soal yang disajikan. Dan saya berhasil mengikuti ke babak selanjutnya, yaitu babak final. Selisih poin yang saya dapatkan dengan poin anak yang berada di peringkat 1 lumayan jauh. Namun, saya abaikan saja dan melanjutkan ke babak final. Saat babak final, saya berhasil mengerjakan 9 soal dari 10 soal. Saya tidak dapat mengerjakan soal

geometri. Pada saat itu, saya belum mengetahui barisan aritmetika, deret aritmetika, dan lain-lain materi di SMP (kecuali aljabar). Sehingga saya berpikir dengan nalar saja. Setelah selesai dan keluar ruangan, saya berdiskusi dengan teman saya dan tentunya ada perbedaan jawaban.

Saat waktu pengumuman tiba, kami semua dikumpulkan di lapangan. Satu per satu nama pemenang dipanggil dari peringkat 5 ke peringkat 1. Nama-nama yang sudah menjadi pemenang di lomba sebelumnya telah terpanggil, sedangkan saya tidak. Dan akhirnya saya ditunjuk sebagai juara 2. Dan kami semua pada hari Senin dipanggil untuk mengambil piala. Tentunya saya sangat bahagia dan bersyukur bisa berdiri di depan dan menjadi pemenang. Momen ini pertama kali saya memenangkan lomba olimpiade matematika. Dan diantara pemenang tersebut, terdapat juga Fabian dan Faricha. Dan juga ternyata juga terdapat siswa kelas 5 yang waktu itu berhasil menjadi juara 3 yang merupakan calon peserta OSN tingkat Provinsi Jawa Timur.



Perjuangan saya berlanjut di SMP Negeri 1 Probolinggo. Mulai kelas 7, saya mulai mencari referensi olimpiade matematika di kota Probolinggo. Dan saya menemukan beberapa buku OSN. Saat belajar, saya sangat pusing dengan materi OSN SMP. Terkadang, saya juga mencoba soal OSN SMA walaupun akhirnya tidak bisa :v. Soal OSN SD saja saat itu saya masih banyak yang tidak bisa. Saya mengikuti seleksi calon peserta ekstrakurikuler OSN karena banyak calon peserta melebihi kapasitas yang semestinya. Pada seleksi pertama, disajikan soal uraian dan saya berhasil menyelesaikan semuanya. Pada seleksi kedua, disajikan soal uraian dan saya tidak bisa menyelesaikan satu soal pun sehingga saya mengerjakan apa adanya. Pada seleksi ketiga, disajikan soal pilihan ganda dan saya berhasil mengerjakan beberapa soal saja. Dan ternyata saya diumumkan sebagai peringkat 4 dan berhasil masuk ke kelas OSN. Di kelas OSN ini, saya banyak sekali mendapatkan ilmu baru. Saya juga mengikuti lomba-lomba untuk mengukur kemampuan saya. Beberapa bulan kemudian, diadakan seleksi calon peserta yang berhak maju di OSK 2017. Entah saya kenapa sebenarnya tidak mau menuju OSK dan berharap kelas 8 yang terpilih. Pada saat seleksi pertama dan kedua, soal yang disajikan menurut saya susah dan hanya mengerjakan apa adanya. Pada saat seleksi ketiga, saya berhasil mengerjakan semua soal. Dan akhirnya saya ditunjuk menjadi calon peserta OSK 2017 untuk mewakili sekolah. Kemudian, saya dilatih setiap pulang sekolah dan karantina (pembinaan saat jam pelajaran) hampir sebulan lamanya. Saat pembinaan, jujur saya sangat pusing. Selain dibina oleh guru, saya juga dibantu oleh kakak-kakak kelas dan menanyakan materi yang tidak saya pahami. Saat OSK 2017 dilaksanakan, saya tidak peduli pesertanya adalah kelas 8. Yang penting saya datang, kerjakan, lalu lupakan soalnya:v. Saya hanya mengerjakan 7 soal dari 15 soal dan ada beberapa yang tidak teliti. Tetapi, saya ditunjuk sebagai juara 1 dan saya sangat bersyukur bisa melanjutkan ke tingkat provinsi. Dan ketika dibina untuk ke provinsi, tentunya saya semakin pusing. Selain dibina oleh guru SMP Negeri 1 Probolinggo, peserta yang berhak lolos ke provinsi (juara 1 – juara 3) juga dibina oleh guru dari SMP lain yang ditunjuk untuk

membina kami untuk tingkat provinsi. Hal ini saya manfaatkan sebaik mungkin dan tidak saya sia-siakan. Saat di provinsi, kami berangkat pagi menuju kota Surabaya. Saya banyak bertemu dengan orang-orang yang tidak familiar wajahnya. Saya hanya berhasil mengerjakan 2 soal isian singkat dari 10 soal isian singkat dan 0 soal uraian dari 4 soal uraian. Dan hasilnya, kami semua tidak lolos ke tingkat nasional.

Pada tahun 2018, saya ditunjuk kembali menjadi perwakilan sekolah. Saya juga berlatih melalui AOPS (Art Of Problems Solving) serta KTOM (Kontes Terbuka Olimpiade Matematika) yang diadakan kontes setiap bulannya secara gratis. Semua siswa bisa mengikutinya dan soal yang disajikan tingkat olimpiade SMA. Namun, saya tetap mengikutinya dan bisa berlatih serta tidak mengukur tingkat SMA atau SMP. Saya juga belajar lewat grup OSN Matematika, Line Square KTOM, dan teman-teman saya antara lain Agustino, Valentio Iversson, Audrey Felicio Anwar, Jason Chrysopraxe, dan lain-lain. Saya banyak belajar materi-materi baru seperti *Chauchy Schwarz*, *Jensen's Inequality*, *Algoritma Euclid*, *Radical Axis*, *Angle Chasing*, dan lain-lain. Dan akhirnya saya kembali ditunjuk menjadi juara 1 di OSK 2018 dan berhak menuju provinsi. Dan saat pelatihan ke OSP, ternyata kami juga dibina oleh dosen UM selama 2 hari yang 2 dosen diantaranya adalah juri OSN SMA: Pak Heri dan Pak Purwanto. Saat OSP, saya berhasil mengerjakan hampir semua soal. Namun, saya banyak tidak teliti dan akhirnya tidak lolos kembali ke Nasional. Saya tetap mengikuti ajang lain selain OSN untuk mengukur kemampuan saya dan terus belajar mencapai target saya di OSN SMA nanti.

