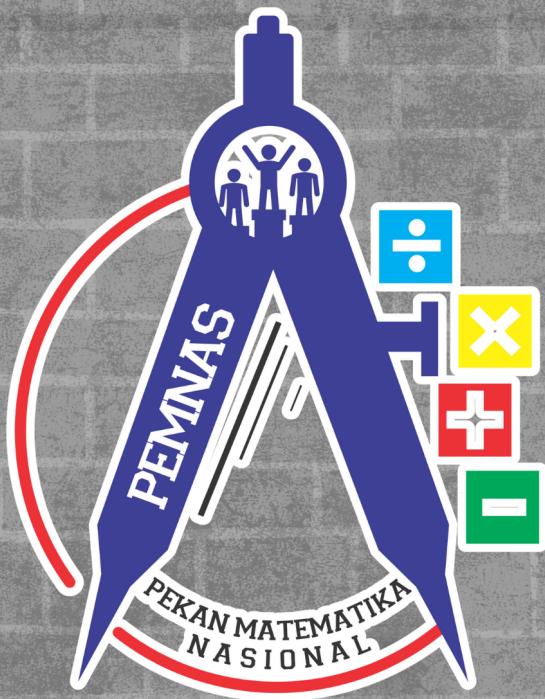




NASKAH SOAL

PEMNAS

Pekan Matematika Nasional 2024



Babak Penyisihan
Jenjang SMA/MA/SEDERAJAT

HIMPUNAN MAHASISWA MATEMATIKA DAN ILMU AKTUARIA (HIMATIKA)
DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Peraturan Babak Penyisihan Jenjang SMA/MA/Sederajat

1. Babak penyisihan akan dilaksanakan pada Sabtu, 9 November 2024.
2. Babak penyisihan PEMNAS 2024 terdiri dari 20 soal pilihan ganda dengan rincian 8 soal kategori mudah, 8 soal kategori sedang, dan 4 soal kategori sulit dengan waktu pengerjaan selama 75 menit.
3. Peserta diperbolehkan untuk menjawab atau tidak menjawab soal. Untuk menjawab soal memilih satu dari lima pilihan, yaitu (A), (B), (C), (D), atau (E).
4. Pengerjaan soal dilakukan melalui website oleh setiap peserta di ujian.pemnas.com. Pengerjaan dilaksanakan menggunakan PC (komputer atau laptop) dengan daya baterai yang cukup dan koneksi internet yang stabil.
5. Banyak peserta yang berhak lolos ke tahap semifinal adalah 50 peserta, di mana sebanyak 25 peserta dalam peringkat nasional dan 25 peserta lainnya merupakan perwakilan masing-masing rayon.
6. Bobot penilaian pada babak penyisihan:
 - (a). Setiap soal yang dijawab benar bernilai 2 poin untuk soal mudah, 3 poin untuk soal sedang, dan 4 poin untuk soal sulit.
 - (b). Setiap soal yang dijawab salah bernilai -1 poin.
 - (c). Setiap soal yang tidak dijawab (kosong) bernilai 0 poin.
7. Hal-hal yang diperbolehkan:
 - (a). Bertanya teknis hanya kepada CS.
 - (b). Menyediakan kertas kosong sebagai alat bantu menghitung.
 - (c). Menggunakan penggaris lurus dan jangka.
 - (d). Minum saat lomba berlangsung.
8. Hal-hal yang dilarang:
 - (a). Berbuat curang dengan cara apapun.
 - (b). Membuka handphone termasuk membuka sosial media.

- (c). Membuka catatan, buku rumus, *cheat sheet*, dan sebagainya.
 - (d). Tidak bekerja mandiri seperti menggunakan bantuan orang di sekitar dan joki.
 - (e). Menggunakan alat bantu hitung apapun, seperti kalkulator, handphone, tabel matematika, dan sebagainya
 - (f). Dilarang menggunakan busur derajat atau segitiga siku-siku. Namun, penggaris lurus atau jangka diperbolehkan.
 - (g). Makan dan minum kecuali meminum air putih.
9. Kesalahan peserta dalam mengoperasikan aplikasi saat kompetisi bukan tanggung jawab panitia.
10. Peserta tidak dapat mengerjakan kembali jika telah menyelesaikan ujian.
11. Apabila ditemukan pelanggaran, maka peserta akan diberikan sanksi sesuai dengan ketentuan yang berlaku.
12. Keputusan Panitia PEMNAS 2024 tidak dapat diganggu gugat.

LEMBAR SOAL BABAK PENYISIHAN PEMNAS TAHUN 2024
JENJANG SMA/MA/SEDERAJAT

1. Diberikan persegi $ABCD$ dan titik E terletak pada sisi AD sedemikian sehingga berlaku perbandingan panjang $AE : ED = 1 : 3$. Jika luas segitiga BED adalah 24 satuan luas, maka luas dari segiempat $DEBC$ adalah . . . satuan luas.
(A) 58 (B) 42 (C) 46 (D) 50 (E) 56
2. Di dalam sebuah kotak terdiri dari enam buah bola, bola tersebut diberikan nomor 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Dua bola diambil sekaligus secara acak dari dalam kotak. Peluang bahwa jumlah dari nomor bola yang terambil sama dengan 5 adalah . . .
(A) $\frac{2}{15}$ (B) $\frac{4}{15}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{3}$
3. Jika x dan y adalah dua bilangan real yang memenuhi
$$A = \sin^2(x) + \sin^2(y) = \cos^2(x) + \cos^2(y),$$
maka nilai dari A adalah . . .
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\frac{6}{5}$
4. Diberikan barisan bilangan asli a_1, a_2, a_3, \dots dengan $a_1 = 2024$. Untuk setiap bilangan asli n di mana $n \geq 2$, a_n merupakan bilangan asli terkecil sedemikian sehingga $\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ merupakan bilangan asli. Nilai dari a_{2024} adalah . . .
(A) 4051 (B) 4133 (C) 3959 (D) 4581 (E) 3743
5. Diberikan lima titik berbeda pada sebuah bidang. Misalkan N menyatakan banyaknya segitiga yang dapat dibentuk menggunakan titik-titik yang ada. Jumlah semua nilai berbeda dari N adalah . . .
(A) 33 (B) 25 (C) 29 (D) 24 (E) 26

6. Banyaknya bilangan bulat tak negatif n sedemikian sehingga

$$\sqrt{(2n+1)(4n^2+1)}$$

bilangan bulat adalah

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

7. Diberikan bilangan real positif a , b , dan c yang memenuhi $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right) = 4$. Nilai minimum dari $c + \frac{1}{a}$ adalah

- (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{7}{8}$ (E) $\frac{7}{4}$

8. Diberikan segitiga ABC dan titik M terletak pada \overline{AC} . Titik N merupakan bayangan pencerminan titik M terhadap garis BC dan AN memotong \overline{BC} di O . Terlebih lagi, A , B , M , dan O terletak pada lingkaran yang sama. Jika besar $\angle ABN = 56^\circ$, besar dari $\angle CMN$ adalah

- (A) 42° (B) 28° (C) 32° (D) 20° (E) 38°

9. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $AB = 5$, $BC = 6$, dan $CA = 7$. Titik P dan titik Q berturut-turut merupakan titik tengah CB dan CA , sedangkan titik O merupakan titik pusat lingkaran luar segitiga ABC . Panjang jari-jari lingkaran luar POQ adalah

- (A) $\frac{7}{5}\sqrt{6}$ (B) $\frac{21}{5}\sqrt{3}$ (C) $\frac{7}{16}\sqrt{3}$ (D) $\frac{35}{24}\sqrt{6}$ (E) $\frac{35}{48}\sqrt{6}$

10. Diketahui A , B , dan C adalah bilangan real sedemikian sehingga $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ merupakan faktor dari $x^{2024} + Ax^3 + Bx + C$. Nilai dari $A^2 + B^2 + C^2$ adalah

- (A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{5}{2}$ (E) $\frac{1}{2}$

11. Diketahui a, b, c , adalah suatu bilangan asli yang memenuhi $a > b > c$ dan $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} < 2$.

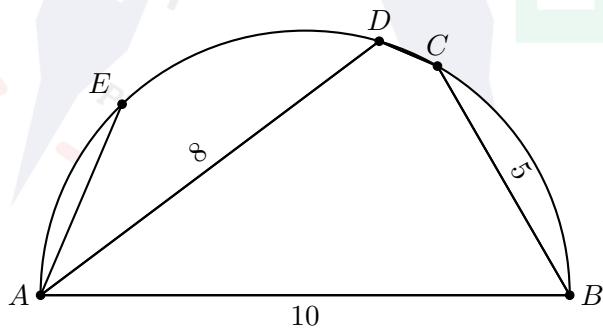
Nilai maksimum dari $\frac{3}{c} + \frac{2}{b} + \frac{1}{a}$ yang mungkin, dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ di mana p dan q adalah bilangan asli yang saling relatif prima. Nilai dari $p + q$ adalah . . .

- (A) 109 (B) 89 (C) 143 (D) 112 (E) 195

12. Terdapat 30 kelereng di mana 16 di antaranya berwarna merah identik dan sisanya berwarna kuning identik. Semua kelereng tersebut akan ditempatkan dalam 5 kantong yang berbeda. Banyaknya cara penempatan dengan syarat setiap kantong memuat setidaknya satu kelereng merah dan kuning, dan banyaknya kelereng kuning dalam setiap kantong tidak boleh lebih dari kelereng merah adalah . . .

- (A) 40040 (B) 19305 (C) 12870 (D) 10725 (E) 8580

13. Diberikan segiempat tali busur $ABCD$ dengan keempat titik sudutnya terletak pada setengah lingkaran ω , di mana \overline{AB} merupakan diameter ω , serta panjang $AB = 10$, $BC = 5$, dan $DA = 8$. Garis yang melalui A dan tegak lurus CD memotong ω sekali lagi di titik E . Panjang dari AE dapat dinyatakan sebagai $a\sqrt{b} - c$ di mana a, b, c adalah tiga bilangan asli dan b tidak habis dibagi bilangan kuadrat lebih besar dari 1. Nilai dari $a + b + c$ adalah . . .



- (A) 12 (B) 11 (C) 10 (D) 9 (E) 8

14. Suatu bilangan asli n disebut *glory-k* untuk suatu bilangan asli k , apabila terdapat bilangan bulat t sedemikian sehingga $1 \leq |n - kt| \leq 3$. Banyak bilangan asli yang kurang dari 2024 yang memenuhi persyaratan *glory-15* dan *glory-8* sekaligus adalah . . .

(A) 607

(B) 560

(C) 592

(D) 682

(E) 542

15. Diketahui $x^3 - 7x^2 + 1 = 0$ memiliki akar-akar p , q , dan r . Nilai dari

$$\sqrt{\frac{(p^2 + 1)(q^2 + 1)}{r^2 + 1}} + \sqrt{\frac{(q^2 + 1)(r^2 + 1)}{p^2 + 1}} + \sqrt{\frac{(r^2 + 1)(p^2 + 1)}{q^2 + 1}}$$

dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{\sqrt{b}}$ di mana a dan b merupakan bilangan asli serta b tidak habis dibagi bilangan kuadrat lebih besar dari 1. Nilai dari $a + b$ adalah

(A) 178

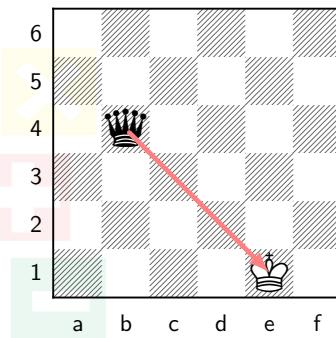
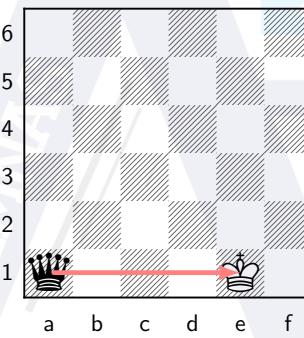
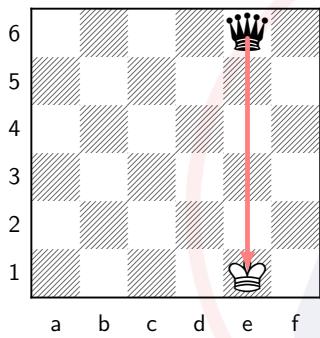
(B) 196

(C) 208

(D) 142

(E) 180

16. Diletakkan raja putih dan ratu hitam secara acak pada papan catur 6×6 . Raja putih dikatakan dalam posisi *diserang* apabila berada dalam baris, kolom, atau diagonal yang sama dengan ratu hitam sebagaimana gambar berikut.



Peluang bahwa raja putih tidak dalam posisi diserang ratu adalah

(A) $\frac{9}{14}$

(B) $\frac{13}{21}$

(C) $\frac{13}{20}$

(D) $\frac{34}{63}$

(E) $\frac{28}{189}$

17. Diberikan segitiga ABC , I titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC dan H perpotongan ketiga garis tinggi segitiga ABC . Lingkaran luar segitiga BIC memotong ruas garis AC di titik D dan memotong perpanjangan AB di titik E . Lingkaran luar segitiga ADE berpotongan dengan lingkaran luar segitiga ABC di titik P . Jika panjang $AB = 10$ dan $CE = CA = 16$, maka panjang PH adalah

(A) $\frac{14}{\sqrt{3}}$

(B) $3\sqrt{3}$

(C) $\frac{11}{2\sqrt{3}}$

(D) $\frac{22}{\sqrt{6}}$

(E) $2\sqrt{5}$

18. Diberikan $A = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$. Banyaknya fungsi $f : A \rightarrow A$ yang memenuhi

$$x = f^{f(x)}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{f \text{ sebanyak } f(x)}(x)$$

untuk setiap $x \in A$ adalah

- (A) 46 (B) 32 (C) 20 (D) 54 (E) 62

19. Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n merupakan akar-akar **real berbeda** dari persamaan $x^5 + 3x^4 - 7x^3 - x^2 - 9x - 2 = 0$. Nilai dari

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+x_k}$$

adalah

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$

20. Diberikan $S = \{0, 1, 2, \dots, 898\}$ dan $S \times S = \{(a, b) \mid a, b \in S\}$. Misalkan $(a, b) \in S \times S$ dengan $a \neq b$, lalu didefinisikan:

- (a, b) *spesial* jika terdapat bilangan asli x yang memenuhi $\frac{ax - b}{899}$ atau $\frac{bx - a}{899}$ merupakan bilangan bulat.
- (a, b) *jelek* jika untuk setiap bilangan asli x berlaku $\frac{ax - b}{899}$ dan $\frac{bx - a}{899}$ masing-masing bukan bilangan bulat.

Kemudian, didefinisikan fungsi $f : S \times S \rightarrow \{0, 1, 2\}$ dengan

$$f(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{jika } a = b \\ 1, & \text{jika } (a, b) \text{ spesial} \\ 2, & \text{jika } (a, b) \text{ jelek} \end{cases}$$

Dua digit terakhir dari $\sum_{i=0}^{898} \sum_{j=0}^{898} f(i, j)$ adalah

- (A) 82 (B) 14 (C) 32 (D) 98 (E) 30