Soal dan Pembahasan Keren ONMIPA-PT Wilayah 2024

Fofo, Ipan, Hniv, Refrain
RM, Wili, Wildabandon

27 April 2024

Daftar Isi

§0 Kata Pengantar (Preface)

Puji dan syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas rahmat dan hidayah-Nya kami, Fofo, Ipan, Hanip, Refrain, RM, Wili, dan Wildabandon dapat merilis *Soal dan Pembahasan Keren ONMIPA-PT Wilayah 2024* setelah pembahasan sebelumnya pada tahun 2022 dirilis dan karena beberapa hal kami memaksa menariknya. Agar hal tersebut tak terjadi kembali, kami sedikit menyamarkan nama kami walaupun mengetahui seluruh anggota dari tim penulis adalah perkara yang cukup mudah untuk pembaca. Sebagai sedikit *hint* untuk pembaca, berikut *hint* yang dapat kami berikan:

- Seluruh anggota tim penulis memiliki pengalaman sebagai alumni OSN;
- 3 dari 7 anggota tim penulis merupakan medalis OSN;
- 5 dari 7 anggota tim penulis merupakan medalis ONMIPA (2 lainnya berstatus *newcomer* sehingga belum ada medali) yang mana salah duanya adalah peraih medali emas ONMIPA;
- 2 dari 7 anggota tim penulis merupakan kontingen Indonesia untuk IMC.

Karena salah dua anggota dari tim penulis sudah ”pensiun” dari ONMIPA (dan mungkin IMC), kami membuat inisiatif untuk menulis pembahasan ini sebagai arsip pribadi atas saran dari Mas Refrain. Akan tetapi, karena kami percaya bahwa ini adalah ilmu yang harus dibagikan, solusi ini kami publikasikan untuk konsumsi bersama agar hasil yang ada dapat dikembangkan dan juga membuka solusi antarpeserta ONMIPA-PT tahun 2024. Sebenarnya, salah satu penulis kami hubungi secara mendadak untuk berpartisipasi dalam penulisan ini berhubung kami tahu penulis bersangkutan sedang *gabut*.

Terima kasih banyak juga kami haturkan kepada rekan-rekan kami yang membantu penulisan, paling khusus kepada **Kenji Gunawan** (Emas OSN 2022), **Rizky Rajendra Anantadewa** (Emas OSN 2022, Perunggu IMO 2023), dan **Khairul Umam** (Perunggu OSN 2023) yang memberikan solusi elegan untuk beberapa soal di sini, serta kepada **Fahreezan Sheraz Diyaldin** (Emas OSN 2019, Emas ONMIPA 2021, First Prize IMC 2022) yang melakukan *proofreading* dan memberi masukan draf pembahasan ini. Kami juga selalu terbuka untuk masukan sebagai wujud pengembangan dari pembahasan ini [1] agar pembahasan ini bisa semutakhir solusi resmi ONMIPA-PT Wilayah dari juri (kami tidak tahu solusi resminya).[2]

Yang pasti di Indonesia, 27 April 2024

Tim Penulis

[1] Apabila ada kesalahan atau solusi alternatif yang elegan untuk dicantumkan di pembahasan ini, silahkan hubungi Mas Refrain melalui Instagram @refrainfrn (dia sedikit *slow-response*).

[2] P.S. Apabila kami *in the mood* kami juga akan mengolah pembahasan ONMIPA-PT Nasional 2024 juga. *Stay tuned*!

§1 Hari 1

§1.1 Isian (60 Menit)

1. Jika I koleksi interval buka pada $\mathbb{R}$ dengan $I = \left\{ I_n : I_n = \left(1, 1 + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \right\}$, maka $\bigcup_{I_n \in I} I_n = \ldots$ dan $\bigcap_{I_n \in I} I_n = \ldots$

   Jawaban: $\bigcup_{I_n \in I} I_n = (1, 2)$ dan $\bigcap_{I_n \in I} I_n = \varnothing$.

   Solusi. (Refrain)
   Perhatikan bahwa $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$ sehingga berlaku

   $$\bigcup_{I_n \in I} I_n = I_1 = \boxed{(1, 2)}.$$

   Di lain sisi, dapat dibuktikan bahwa

   $$\bigcap_{I_n \in I} I_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I_n, \ \forall n \in \mathbb{N}\} = \boxed{\varnothing}$$

   dengan mengandaikan $\bigcap_{I_n \in I} I_n$ tak kosong (*Hint*: manfaatkan sifat Archimedean).

   □

2. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, dengan $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$. Untuk setiap dua bilangan asli m dan n, dengan $m \neq n$, nilai $\int_{-1}^{1} \frac{f_n(x) f_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \ldots$

   Jawaban: 0.

   Solusi. (Refrain)
   Dengan substitusi $x = \cos t$, $t \in (0, \pi)$ diperoleh $\sqrt{1 - x^2} = \sin t$, berlaku $f_n(x) = \cos(nt)$ dan $f_m(x) = \cos(mt)$ dan $dx = -\sin t \, dt$. Integral menjadi

   $$\begin{aligned}
   \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(nt)\cos(mt)}{\sin t} \cdot (-\sin t) \, dt &= \int_{0}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt) \, dt \\
   &= \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)\right) \, dt \\
   &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((m+n)t)}{m+n} + \frac{\sin((m-n)t)}{m-n} \right]_{0}^{\pi} \\
   &= \boxed{0} \quad (\because \sin n\pi = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}).
   \end{aligned}$$

   □

3. Diberikan G suatu grup siklis dengan order 2024. Banyak elemen G yang berorde ganjil adalah ...

   Jawaban: 253.

   Solusi. (Refrain [Solusi 1], Wildabandon [Solusi 2])
   Solusi 1: Perhatikan bahwa $G = \langle a \rangle$ dengan $\circ(a) = 2024$. Jelas $a^0 = e$ memiliki

order 1 yang ganjil. Kemudian, elemen lainnya pada G yang memiliki order ganjil adalah a^t, $t \geq 1$. Di lain sisi,

$$\circ(a^t) = \frac{2024}{\gcd(2024, t)} \iff \gcd(2024, t) = \frac{2024}{\circ(a^t)} = \frac{2^3 \cdot 11 \cdot 23}{\circ(a^t)}.$$

Karena $\circ(a^t)$ ganjil, $8 \mid \gcd(2024, t)$. Oleh karena itu, dapat dicek nilai t untuk a^t yang memenuhi adalah kelipatan 8, yaitu $t = 8, 16, 24, \ldots, 2008, 2016$, terdapat 252 nilai t yang dimaksud. Terdapat $1 + 252 = \boxed{253}$ elemen G yang berorder ganjil.
Solusi 2: Tulis $G = \langle a \rangle$. Banyaknya elemen G yang berorde m adalah $\varphi(m)$ di mana $\varphi(m)$ menyatakan banyaknya bilangan asli t dengan $t \leq m$ yang memenuhi $\gcd(t, m) = 1$. Mengingat $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, maka kemungkinan orde ganjil dari elemen yang diminta adalah $1, 11, 23, 253$. Diperoleh banyaknya elemen berorde ganjil adalah

$$\varphi(1) + \varphi(11) + \varphi(23) + \varphi(253) = \boxed{253}.$$

Perhitungan di atas dapat dihitung menggunakan formula φ atau menggunakan fakta $\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$. □

4. Jika a, b, c, d merupakan bilangan bulat sehingga $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ mempunyai akar $\sqrt{3} - \sqrt{5}$, maka nilai $a + b + c + d$ adalah ...
Jawaban: -12.

Solusi. (Fofo [Solusi 1], Refrain ft. Khairul Umam [Solusi 2])
Solusi 1. Karena $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ merupakan akar dari f sebagai polinomial dengan koefisien bilangan bulat, maka haruslah $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, $-\sqrt{3} + \sqrt{5}$, dan $-\sqrt{3} - \sqrt{5}$ juga merupakan akar dari f. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{3} - \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{3} - \sqrt{5}\right) \\
&= \left[\left(x + \sqrt{3}\right)^2 - 5\right]\left[\left(x - \sqrt{3}\right)^2 - 5\right] \\
&= \left[x^2 - 2 - 2x\sqrt{3}\right]\left[x^2 - 2 + 2x\sqrt{3}\right] \\
&= \left(x^2 - 2\right)^2 - 12x^2 \\
&= x^4 - 16x^2 + 4.
\end{aligned}$$

Diperoleh $a = 0$, $b = -16$, $c = 0$, dan $d = 4$, sehingga $a + b + c + d = \boxed{-12}$.

Solusi 2. Dengan memisalkan $x = \sqrt{3} - \sqrt{5}$ diperoleh

$$x^2 = 8 - 2\sqrt{15} \iff x^2 - 8 = -2\sqrt{15} \implies (x^2 - 8)^2 = 60 \implies x^4 - 16x^2 + 4 = 0.$$

Diperoleh $a = 0$, $b = -16$, $c = 0$, dan $d = 4$, sehingga $a + b + c + d = \boxed{-12}$. □

5. Dalam sebuah kotak terdapat kelereng berwarna biru, hijau, merah, kuning, dan abu-abu dengan masing-masing warna terdapat 9 kelereng. Banyak cara mengambil 9 kelereng dari kotak sehingga setiap warna paling sedikit terambil satu kali adalah ...
Jawaban: 70.

Solusi. (Hniv)
Misalkan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 menyatakan banyaknya kelereng berwarna biru, hijau, merah, kuning, dan abu-abu, maka

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9.$$

Misalkan $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3 - 1, y_4 = x_4 - 1, y_5 = x_5 - 1$, maka y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 merupakan bilangan cacah, sehingga dengan stars and bars dari banyaknya yang memenuhi persamaan

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 4 \text{ (tidak ada pembatasan karena } y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \leq 8)$$

adalah $\binom{5+4-1}{5-1} = \binom{8}{4} = \boxed{70}$. □

§1.2 Uraian (120 menit)

1. Misalkan a dan b bilangan real positif yang memenuhi $\sqrt{b} < a < 2\sqrt{b}$. Barisan bilangan real (x_n) didefinisikan dengan $x_0 \geq 0$ dan

$$x_n = \frac{ax_{n-1} + b}{x_{n-1} + a}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Apakah $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ada? Jika ya, tentukan nilai limitnya.

Solusi. (Fofo [Solusi 1], Wildabandon [Solusi 2])
Solusi 1: Jelas bahwa $a^2 - b > 0$. Dimisalkan $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dengan $f(x) = \frac{ax+b}{x+a} = a - \frac{a^2-b}{x+a}$. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \left(a - \frac{a^2-b}{x+a}\right) - \left(a - \frac{a^2-b}{y+a}\right) \right| \\
&= (a^2 - b) \cdot \left| -\frac{1}{x+a} + \frac{1}{y+a} \right| \\
&= (a^2 - b) \cdot \frac{|x-y|}{(x+a)(y+a)} \\
&\leq (a^2 - b) \cdot \frac{|x-y|}{a \cdot a} \\
&= (1 - \frac{b}{a^2})|x-y|. \quad \left(0 < 1 - \frac{b}{a^2} < 1\right)
\end{aligned}$$

Akibatnya, f adalah fungsi kontraksi. Dimisalkan $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f \circ f}_{\text{sebanyak } n}$. Menurut teorema *fixed point* Banach, terdapat dengan tunggal $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ sedemikian sehingga $f(c) = c$ dan barisan $(f_n(x))$ konvergen ke c untuk sebarang $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Karena $f(x_{n-1}) = x_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $f_n(x_0) = x_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian, barisan (x_n) konvergen dengan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Karena $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $c \geq 0$. Diperoleh

$$\frac{ac+b}{c+a} = f(c) = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b-c^2}{c+a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = \sqrt{b}.$$

> **Catatan.** Sebenarnya apa yang ditulis pada solusi ini hampir sama dengan membuktikan barisan (x_n) kontraktif agar (x_n) Cauchy dan akibatnya (x_n) konvergen (bukti sebagai latihan). Kami hanya iseng meningkatkan gaya pembahasan.

Solusi 2: Klaim $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ada dan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{b}$.
Klaim. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan real positif.
Bukti. Untuk $n = 1$ jelas benar karena $ax_0 + b > 0$ dan $x_0 + a > 0$. Asumsikan untuk suatu k maka $x_k > 0$. Ini berarti $ax_k + b > 0$ dan $x_k + a > 0$ yang berakibat $x_{k+1} > 0$. Terbukti. □

Kasus 1. $x_0 = \sqrt{b}$.
Akan dibuktikan dengan induksi bahwa $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ barisan konstan yang nilainya $\sqrt{b}$. Untuk $n = 0$, benar bahwa $x_0 = \sqrt{b}$. Asumsikan untuk suatu k berlaku $x_k = \sqrt{b}$. Maka

$$x_{k+1} = \frac{ax_k + b}{x_k + a} = \frac{a\sqrt{b} + b}{\sqrt{b} + a} = \sqrt{b},$$

terbukti. Jelas bahwa dari sini diperoleh $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{b}$.

Untuk dua kasus selanjutnya, akan dibuktikan terlebih dahulu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen.
Kasus 2. $x_0 > \sqrt{b}$.
Klaim 2.1. $x_n > \sqrt{b}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Bukti. Akan dibuktikan dengan induksi. Untuk $n = 1$,

$$\begin{aligned}
x_1 - \sqrt{b} = \frac{ax_0 + b}{x_0 + a} - \sqrt{b} &= \frac{ax_0 + b - x_0\sqrt{b} - a\sqrt{b}}{x_0 + a} \\
&= \frac{\left(a - \sqrt{b}\right)x_0 - \sqrt{b}\left(a - \sqrt{b}\right)}{x_0 + a}. \\
&= \frac{\left(x_0 - \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right)}{x_0 + a} \\
&> 0
\end{aligned}$$

yang memberikan $x_1 > \sqrt{b}$. Asumsikan untuk suatu k berlaku $x_k > \sqrt{b}$. Dengan cara yang sama, dapat diperoleh

$$x_{k+1} - \sqrt{b} = \frac{\left(x_k - \sqrt{b}\right)\left(a - \sqrt{b}\right)}{x_k + a} > 0 \implies x_{k+1} > \sqrt{b}.$$

Akan dibuktikan bahwa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan monoton turun (tegas). Hal ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa $x_{n+1} < x_n \iff x_{n+1} - x_n < 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tinjau

$$x_{n+1} - x_n = \frac{ax_{n-1} + b}{x_{n-1} + a} - x_n = \frac{b - x_n x_{n-1}}{x_{n-1} + a} < 0$$

mengingat $x_{n-1} + a > 0$ dan

$$b - x_n x_{n-1} < b - \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = 0 \implies b - x_n x_{n-1} < 0.$$

Karena $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ barisan monoton turun (tegas) dan terbatas ke bawah, maka $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen.
Kasus 3. $x_0 < \sqrt{b}$.
Kasus ini dikerjakan secara analog dengan kasus 2, yang mana nanti akan memberikan $x_n < \sqrt{b}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton naik (tegas).

Akibatnya, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ juga konvergen.
Dari semua kasus, dapat disimpulkan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ada dan misalkan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Ini berarti

$$L = \frac{aL+b}{L+a} \iff L^2 + aL = aL + b \iff L^2 = b.$$

Karena $x_n > 0$ untuk setiap bilangan asli n, maka $L \geq 0$ yang berarti $L = \sqrt{b}$. $\square$

2. Diberikan fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dengan sifat untuk setiap $x \in [a, b]$, terdapat $p \in [a, b]$ dengan $|f(p)| \leq \dfrac{2023}{2024}|f(x)|$. Buktikan terdapat $c \in [a, b]$, dengan $f(c) = 0$.

Solusi. (Refrain ft. Kenji Gunawan [Solusi 1], Wildabandon [Solusi 2])
Solusi 1: Andaikan tidak ada $c \in [a, b]$ yang demikian. Karena f kontinu, $|f|$ kontinu dan berlaku $|f(x)| > 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Karena $[a, b]$ adalah himpunan tertutup (atau himpunan kompak), berdasarkan Teorema Minimum-Maksimum terdapat $\xi \in [a, b]$ dengan sifat $|f(\xi)| = \min\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Dari asumsi, $|f(\xi)| > 0$. Berdasarkan sifat awal f, terdapat $p \in [a, b]$ dengan sifat $|f(p)| \leq \dfrac{2023}{2024}|f(\xi)| < |f(\xi)|$, kontradiksi dengan minimalitas $|f(\xi)|$. Pengandaian diingkar. Pernyataan soal terbukti.
Solusi 2: Untuk mempermudah penulisan, misalkan $\dfrac{2023}{2024} = \omega$. Akan dibentuk barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan prosedur berikut: misalkan $x_1 \in [a, b]$. Dari hipotesis, terdapat $x_2 \in [a, b]$ yang memenuhi $|f(x_2)| \leq \omega|f(x_1)|$. Secara induktif, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $x_n \in [a, b]$, maka terdapat $x_{n+1} \in [a, b]$ yang memenuhi $|f(x_{n+1})| \leq \omega|f(x_n)|$. Dari sini dapat diperoleh pula

$$|f(x_{n+1})| \leq \omega|f(x_n)| \leq \omega^2|f(x_{n-1})| \leq \cdots \leq \omega^{n-1}|f(x_1)|.$$

Karena barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ terbatas, menurut Bolzano-Weistrass terdapat subbarisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, misalkan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, yang konvergen. Karena $[a, b]$ merupakan himpunan kompak, maka barisan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $y^* \in [a, b]$. Karena f kontinu, berlaku $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(y^*)$. Perhatikan bahwa karena $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ subbarisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, dari sini dapat diperoleh pula

$$|f(y_n)| \leq \omega^{a_n}|f(x_1)| \leq \omega^{n-1}|f(x_1)| \implies |f(y_n)| \leq \omega^{n-1}|f(x_1)|.$$

Karena f kontinu dan $[a, b]$ kompak, maka $|f(x_1)|$ terbatas. Mengingat harga mutlak juga fungsi kontinu, ini berakibat pula

$$|f(y^*)| = \lim_{n\to\infty} |f(y_n)| \leq \lim_{n\to\infty} \omega^{n-1}|f(x_1)| = 0 \implies |f(y^*)| \leq 0$$

yang memberikan $f(y^*) = 0$, terbukti. $\square$

3. Diketahui $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_{1013} \times \mathbb{Z}_{1013}$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian berikut:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= ((a + c) \mod 1013, (b + d) \mod 1013),\\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac \mod 1013, (ad + bc + bd) \mod 1013),\end{aligned}$$

untuk setiap $(a, b), (c, d) \in \mathcal{R}$. Buktikan terdapat tepat sebanyak 2024 elemen taknol di $\mathcal{R}$ yang merupakan pembagi nol. (**Catatan:** 1013 merupakan bilangan prima.)

Solusi. (Refrain tapi terinspirasi tulisan Agent Ipan)
Diambil sembarang pembagi nol $(0,0) \neq (a,b) \in \mathcal{R}$ dengan pembagi nolnya adalah $(0,0) \neq (c,d) \in \mathcal{R}$. Berlaku $(a,b)\cdot(c,d) = (ac \mod 1013, (ad+bc+bd) \mod 1013) = (0,0)$. Karena 1013 prima, berlaku $a = 0$ atau $c = 0$. Penyelesaian dibagi dua kasus.

a) $a = 0$.
Karena $(a,b) \neq (0,0)$, haruslah $b \neq 0$ dan $(ad+bc+bd) \mod 1013 = 0 \iff b(c+d) \mod 1013 = 0$. Karena 1013 prima, haruslah $c + d = 0 \mod 1013$ atau $c = -d \mod 1013$ yang mana dapat diambil $c = 1$ dan $d = 1012$ dengan b bebas taknol yang mana (a,b) merupakan pembagi nol. Dapat diambil $b = 1, 2, 3, \ldots, 1012$ yang memenuhi ini. Ada 1012 pembagi nol untuk kasus ini.

b) $c = 0$.
Karena $(c,d) \neq (0,0)$, haruslah $d \neq 0$ dan $(ad+bc+bd) \mod 1013 = 0 \iff d(a+b) \mod 1013 = 0$. Karena 1013 prima, haruslah $a+b = 0 \mod 1013$ atau $a = -b \mod 1013$ yang mana dapat diambil $d = 1$ yang mana memberikan kemungkinan pembagi nol (a,b) berupa $(1,1012)$, $(2,1011)$, $(3,1010)$, $\ldots$, $(1012,1)$. Ada 1012 pembagi nol untuk kasus ini.

Terdapat $1012 + 1012 = 2024$ pembagi nol untuk ring $(\mathcal{R}, +, \cdot)$. □

4. Suatu grup hingga $(G, \star)$ berorde n dikatakan rapi jika terdapat n unsur berbeda $g_1, g_2, \ldots g_n$ dari G sehingga $G = \{g_1 \star g_2, g_2 \star g_3, \ldots, g_{n-1} \star g_n, g_n \star g_1\}$.

   a) Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_7, +)$ rapi

   b) Buktikan bahwa untuk setiap n genap, $(\mathbb{Z}_n, +)$ tidak rapi.

Solusi. (Refrain ft. Rizky Rajendra Anantadewa)

a) Pembaca dapat membuktikan bahwa susunan $g_i = \overline{(i \pmod 7)}$ memenuhi kriteria untuk membuat $(\mathbb{Z}_7, +)$ rapi.

b) Andaikan $(\mathbb{Z}_n, +)$ rapi, terdapat n unsur berbeda $g_1, g_2, \ldots g_n$ dengan sifat $\{g_1 + g_2, g_2 + g_3, \ldots, g_n + g_1\} = \mathbb{Z}_n$. Karena kesamaan himpunan ini, berlaku pula

$$\sum_{i=1}^{n} (g_{i \pmod n} + g_{i+1 \pmod n}) = 2\sum_{i=1}^{n} i \equiv \sum_{i=1}^{n} i \pmod n. \text{ (mengapa?)}$$

Diperoleh kesamaan

$$\frac{n(n+1)}{2} \equiv \sum_{i=1}^{n} i \equiv 2\sum_{i=1}^{n} i \equiv n(n+1) \equiv 0 \pmod n.$$

Akan tetapi, dapat dibuktikan bahwa $\frac{n(n+1)}{2} \neq 0$ untuk n genap, kontradiksi. Grup $(\mathbb{Z}_n, +)$ tidak rapi untuk n genap.

□

5. Tunjukkan bahwa jika $n + 1$ bilangan bulat berbeda diambil dari himpunan $\{1, 2, \ldots, kn\}$, maka selalu ada dua bilangan bulat yang selisihnya paling banyak $k - 1$.

Solusi. (Hniv)
Kita dapat mempartisi himpunan $\{1, 2, \ldots, kn\}$ menjadi n buah himpunan sebagai berikut ini:

$$H_i = \{k(i-1)+1, k(i-1)+2, k(i-1)+3, ..., k(i-1)+k\}$$
$$\text{dengan } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Dikarenakan ada n buah himpunan partisi, maka jika diambil $n+1$ bilangan dari $\{1, 2, \ldots, kn\}$, akibatnya ada 2 bilangan di himpunan partisi yang sama. Karena ada 2 bilangan yang berada di himpunan partisi yang sama, maka selisih kedua bilangan tersebut paling banyak adalah $(k(i-1)+k) - (k(i-1)+1) = k-1$. Jadi selalu ada dua bilangan bulat yang selisihnya paling banyak $k-1$. $\square$

§2 Hari 2

§2.1 Isian (60 Menit)

1. Banyak bilangan kompleks z yang memenuhi $z^{20} = 1$ dan $z^{24} \in \mathbb{R}$ adalah ...

   Jawaban: 4

   Solusi. (Refrain)
   Karena $z^{20} = 1$ dan $z^{24} \in \mathbb{R}$, berlaku $z^4 = \frac{z^{24}}{z^{20}} = z^{24} \in \mathbb{R}$. Cukup jelas bahwa $|z| = 1$ sehingga haruslah $z^4 \in \{-1, 1\}$. Akan tetapi, haruslah $z^4 = 1$. Apabila $z^4 = -1$, $z^{20} = (z^4)^5 = -1 \neq 1$. Bilangan kompleks z yang memenuhi ketentuan soal adalah akar dari $z^4 = 1$ yang ada sebanyak $\boxed{4}$. □

2. Jika diberikan fungsi kompleks $f(z) = \bar{z}e^{-|z|^2}$, maka nilai $f'(i)$ adalah ...
   Jawaban: $\frac{1}{e}$

   Solusi. (Wildabandon)
   Tulis $z = x + iy$ di mana x, y bilangan real. Maka
   $$f(x+iy) = (x-iy)e^{-x^2-y^2} = xe^{-x^2-y^2} - iye^{-x^2-y^2}.$$
   Diperoleh $u(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$ dan $v(x,y) = -ye^{-x^2-y^2}$. Tinjau
   $$\begin{aligned} u_x &= e^{-x^2-y^2} - 2x^2e^{-x^2-y^2} &&\implies u_x(0,1) = \frac{1}{e} \\ v_y &= -e^{-x^2-y^2} + 2y^2e^{-x^2-y^2} &&\implies v_y(0,1) = \frac{1}{e} \\ u_y &= -2xye^{-x^2-y^2} &&\implies u_y(0,1) = 0 \\ v_x &= 2xye^{-x^2-y^2} &&\implies v_x(0,1) = 0. \end{aligned}$$
   Karena turunan parsial u dan v ada serta kontinu (di sekitar $(0,1)$), kemudian berlaku $u_x(0,1) = v_y(0,1)$ dan $u_y(0,1) = -v_x(0,1)$, ini berarti $f'(i)$ ada dan
   $$f'(i) = u_x(0,1) + iv_x(0,1) = \frac{1}{e} + i \cdot 0 = \boxed{\frac{1}{e}}.$$
   □

3. Misal P_4 adalah ruang polinomial dengan koefisien real berderajat paling tinggi 4. Didefinisikan pemetaan $T_k : P_4 \to P_4$ dengan
   $$T_k(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) := a_0 + a_1^kx^2 + a_2x^4$$
   Banyak pasangan bilangan (k, m) dengan $k, m \in \{1,2,3,4\}$ sehingga T_k^m pemetaan linear adalah ... (Catatan: $T_k^m := \underbrace{T_k \circ T_k \circ \ldots \circ T_k}_{\text{sebanyak } m \text{ kali}}$.)

   Jawaban: 10

   Solusi. (Hniv)
   Perhatikan bahwa
   $$\begin{aligned} T_k^1(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) &= a_0 + a_1^kx^2 + a_2x^4 \\ T_k^2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) &= a_0 + a_1^kx^4 \\ T_k^3(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) &= a_0 \\ T_k^4(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) &= a_0 \end{aligned}$$

Jelas bahwa T_k^3 dan T_k^4 adalah pemetaan linear untuk sembarang $k \in \{1,2,3,4\}$, sedangkan T_k^1 dan T_k^2 adalah pemetaan linear jika dan hanya jika $k = 1$ (mengapa?), maka pasangan (k, m) yang memenuhi adalah

$$(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(1,4),(2,4),(3,4), \text{ dan } (4,4).$$

Jadi banyaknya ada $\boxed{10}$.

$\square$

4. Misalkan $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_{10}}$ basis baku dari ruang vektor $\mathbb{R}^{10}$. Tinjau dua himpunan $U = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}+\mathbf{e_5}+\mathbf{e_6}, \mathbf{e_7}+\mathbf{e_8}+\mathbf{e_9}+\mathbf{e_{10}}\}$ dan $V = \{\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}+\mathbf{e_4}, \mathbf{e_5}+\mathbf{e_6}, \mathbf{e_7}+\mathbf{e_8}, \mathbf{e_9}+\mathbf{e_{10}}\}$. Dimensi terkecil dari subruang yang memuat U dan V adalah ...

Jawaban: 7

Solusi. (Hniv)
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} U \cup V = \{&\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}+\mathbf{e_5}+\mathbf{e_6}, \mathbf{e_7}+\mathbf{e_8}+\mathbf{e_9}+\mathbf{e_{10}}, \\ &\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}+\mathbf{e_4}, \mathbf{e_5}+\mathbf{e_6}, \mathbf{e_7}+\mathbf{e_8}, \mathbf{e_9}+\mathbf{e_{10}}\} \end{aligned}$$

dengan mengingat subruang terkecil yang memuat U dan V adalah $\operatorname{span}(U \cup V)$, mencari dimensi dari $\operatorname{span}(U \cup V)$ sama dengan mencari rank dari matriks $A \in M_{10\times 9}$ yang mana entri tiap kolom mengikuti vektor yang termuat di $U \cup V$. Dengan mengambil transpose matriks A diperoleh

$$A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{e_1}^T \\ (\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3})^T \\ (\mathbf{e_4}+\mathbf{e_5}+\mathbf{e_6})^T \\ (\mathbf{e_7}+\mathbf{e_8}+\mathbf{e_9}+\mathbf{e_{10}})^T \\ (\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2})^T \\ (\mathbf{e_3}+\mathbf{e_4})^T \\ (\mathbf{e_5}+\mathbf{e_6})^T \\ (\mathbf{e_7}+\mathbf{e_8})^T \\ (\mathbf{e_9}+\mathbf{e_{10}})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$$

dapat dicek dengan OBE tipe 3 (menjumlahkan suatu baris dengan kelipatan salah satu baris lainnya) bahwa matriks A^T ekuivalen dengan

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Karena $\dim(\operatorname{span}(U \cup V)) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T) = 7$, maka dimensi subruang terkecil yang memuat U dan V adalah $\boxed{7}$. $\square$

5. Dalam kejuaraan catur yang diikuti oleh 10 peserta, setiap peserta bertanding dengan peserta lain tepat satu kali. Peserta yang menang, kalah, dan seri di setiap pertandingan, berturut-turut diberikan skor $2, 0$, dan 1. Jika total skor setiap peserta di akhir kejuaraan berbeda-beda, maka maksimal banyak pertandingan yang mungkin dimenangkan oleh peserta dengan skor terendah adalah ...
Jawaban: 2

Solusi. (Wildabandon)
Banyaknya pertandingan yang berlangsung adalah $C(10, 2) = \dfrac{10!}{(10-2)!2!} = 45$. Karena pada setiap pertandingan, jumlah poin dari dua peserta yang bertanding tersebut selalu 2 poin, maka jumlah poin seluruh tim pada akhir pertandingan adalah $45 \cdot 2 = 90$. Klaim bahwa nilai maksimal dari peserta skor terendah adalah 4. Andaikan tidak, yaitu poin yang diperoleh peserta skor terendah setidaknya 5. Maka jumlah poin akhir semua tim setidaknya adalah

$$5 + 6 + 7 + \cdots + 14 = 95 > 90,$$

kontradiksi. Jadi, nilai maksimal dari peserta skor terendah adalah 4 yang berarti maksimal memiliki $\boxed{2}$ kemenangan. Hal ini memungkinkan sebagaimana ditunjukkan oleh konfigurasi berikut. Misalkan $T_1, T_2, \cdots, T_{10}$ sebagai nama pemain. Tinjau baris ke-i, yaitu untuk T_i melawan tim $T_1, T_2, \cdots, T_{10}$ di mana M menyatakan menang, S menyatakan seri, K menyatakan kalah saat T_i melawan $T_1, T_2, \cdots, T_{10}$. Sebagai contoh, baris pertama merupakan perolehan untuk T_1 yang menunjukkan 2 kali menang (melawan T_2 dan T_3) dan kalah untuk sisanya. Kemudian baris kedua menunjukkan peroleh T_2 yang menunjukkan 2 menang, 1 seri, dan kalah sisanya.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	Skor
T_1		M	M	K	K	K	K	K	K	K	4
T_2	K		M	M	S	K	K	K	K	K	5
T_3	K	K		M	M	M	K	K	K	K	6
T_4	M	K	K		M	M	S	K	K	K	7
T_5	M	S	K	K		M	M	S	K	K	8
T_6	M	M	K	K	K		M	M	S	K	9
T_7	M	M	M	S	K	K		M	S	K	10
T_8	M	M	M	M	S	K	K		M	K	11
T_9	M	M	M	M	M	S	S	K		K	12
T_{10}	M	M	M	M	M	M	M	M	M		18

□

§2.2 Uraian (120 menit)

1. Untuk setiap bilangan kompleks z dengan $|z| = 1$, tunjukkan bahwa

$$1 \leq |1 + z| + |1 + 2z| \leq 5$$

Solusi. (Refrain)
Dengan ketaksamaan segitiga, berlaku

$$0 = 1 - 1 \leq |z| - 1 \leq ||z| - 1| \leq |z + 1| \leq |z| + 1 = 1 + 1 = 2,$$
$$1 = 2 - 1 \leq 2|z| - 1 \leq ||2z| - 1| \leq |2z + 1| \leq 2|z| + 1 = 3.$$

Dengan dua ketaksamaan ini, secara langsung diperoleh

$$1 = 0 + 1 \le |1 + z| + |1 + 2z| \le 2 + 3 = 5$$

$\square$

2. Tentukan daerah D di bidang kompleks sehingga untuk setiap $z \in D$, $\lim\limits_{|z|\to\infty} e^z$ ada.

Solusi. (Fofo, direvisi Refrain)

Untuk sembarang tripel bilangan real (a, b_1, b_2) dengan $b_1 < b_2$, dibentuk daerah atau domain, yaitu himpunan terbuka dan terhubung

$$D(a, b_1, b_2) = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) < a, b_1 < \operatorname{Im}(z) < b_2\} \subseteq \mathbb{C}$$

Lemma 1. Untuk sembarang daerah $D(a, b_1, b_2)$ berlaku $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in D(a,b_1,b_2)}} \operatorname{Re}(z) = -\infty$.

Bukti. Untuk sembarang $z \in D(a, b_1, b_2)$ berlaku $|\operatorname{Im}(z)| < \max\{|b_1|, |b_2|\} =: B$ dan $\operatorname{Re}(z) < a$. Karena $|z| \le |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| < |\operatorname{Re}(z)| + B$ haruslah $|\operatorname{Re}(z)| \to \infty$ ketika $|z| \to \infty$. Akan tetapi, karena $\operatorname{Re}(z) < a$ haruslah $\operatorname{Re}(z) \to -\infty$.

Klaim. Daerah $D = D(a, b_1, b_2)$ merupakan daerah di mana $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in D}} e^z$ ada dan limitnya adalah 0.

Bukti. Untuk setiap $z \in D(a, b_1, b_2)$ berlaku $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Berdasarkan Lemma 1, berlaku

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in D(a,b_1,b_2)}} |e^z| = \lim_{\operatorname{Re} z\to-\infty} e^{\operatorname{Re} z} = 0.$$

Berdasarkan hasil ini, telah diperoleh daerah D yang diinginkan. $\square$

> **Catatan.**
>
> a) Kami (tim penulis) asumsikan daerah D yang dicari adalah daerah D dengan sifat $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in D}} e^z$ ada.
>
> b) Secara lebih umum pembaca dapat mengecek pernyataan berikut sebagai latihan yang memperumum hasil dari soal ini
>
> "Apabila untuk daerah $A \subseteq \mathbb{C}$ terdapat tripel bilangan real (a, b_1, b_2), $b_1 < b_2$, dengan sifat $A \subseteq D(a, b_1, b_2)$ dan $\operatorname{Re} z$ pada A tidak memiliki batas bawah, maka $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in A}} e^z$ ada."
>
> c) (Fahreezan Sheraz Diyaldin) Daerah dimaksud pada b) belum menjadi syarat perlu nilai limit sehingga ekuivalensi pernyataan masih perlu penyesuaian. Anda dapat mengecek daerah $A = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x < 0,\ x < y < -x\}$ sebagai daerah lain yang tidak akan termuat oleh himpunan $D(a, b_1, b_2)$ apapun tetapi nilai limit masih ada dan juga bernilai 0.

3. Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & b & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$. Buktikan bahwa matriks A dapat didiagonalkan.

Solusi. (Fofo [Solusi 1], Refrain ft. Wili [Solusi 2])
Solusi 1: Karena A simetris (atau A Hermitian), maka A dapat didiagonalkan. (lol, kependekan jawabannya)

Solusi 2: Dapat dibuktikan bahwa nilai eigen dari A adalah 0, $\dfrac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{2}$, dan $\dfrac{b-\sqrt{b^2+8a^2}}{2}$ dengan mencari akar dari $\det(\lambda I - A) = 0$. Karena A memiliki tiga nilai eigen yang berbeda karena $a \neq 0$ sehingga $\dfrac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{2} \neq \dfrac{b-\sqrt{b^2+8a^2}}{2}$, A memiliki tiga vektor eigen yang bebas linear sehingga A dapat didiagonalkan. $\square$

4. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 20 & 24 \\ p & q \end{bmatrix}$ dengan p dan q real. Selidiki apakah terdapat bilangan real p dan q agar ada $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ sehingga persamaan

$$A^2\mathbf{x} = A\mathbf{b}$$

tidak memiliki solusi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Jika ada, sebutkan semua p dan q yang mungkin. Berikan penjelasan jawaban Saudara.

Solusi. (RM, diketik Refrain, kami berusaha mengolah seelegan mungkin)

Klaim. Pasangan (p, q) yang memenuhi hanyalah $\left(-\dfrac{50}{3}, -20\right)$.

Bukti. Agar persamaan $A^2\mathbf{x} = A\mathbf{b}$ memiliki kemungkinan tidak ada solusi untuk suatu $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ haruslah A singular (tidak invertibel) dan (p, q) yang mungkin memiliki sifat $q = \dfrac{6}{5}p$.

Untuk setiap $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, berlaku

$$A\mathbf{x} = k_1 \begin{bmatrix} 20 \\ p \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad A\mathbf{b} = k_2 \begin{bmatrix} 20 \\ p \end{bmatrix}$$

dengan $k_1 = x_1 + \dfrac{6}{5}x_2$, $k_2 = b_1 + \dfrac{6}{5}b_2 \in \mathbb{R}$. Lebih lanjut, kesamaan $A^2\mathbf{x} = A\mathbf{b}$ dengan fakta sebelumnya berlaku jika dan hanya jika

$$k_1\left(20 + \frac{6}{5}p\right)\begin{bmatrix} 20 \\ p \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 20 \\ p \end{bmatrix} \iff k_2 = k_1\left(20 + \frac{6}{5}p\right).$$

Jika $20 + \dfrac{6}{5}p \neq 0 \iff p \neq -\dfrac{100}{3}$, maka $k_1 = \dfrac{k_2}{20 + \frac{6}{5}p}$.

Akibatnya, untuk setiap $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, dapat ditentukan $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ untuk $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ yang memenuhi $k_1 = \dfrac{k_2}{20 + \frac{6}{5}p}$. Tidak mungkin ada $p \neq -\dfrac{50}{3}$ yang memenuhi. Di lain sisi, untuk $p = -\dfrac{50}{3}$, berlaku $A^2 = 0$. Akan tetapi, pembaca dapat mencari $\mathbf{b} \notin \text{null}(A)$ karena $\text{rank}(A) = 1$. Terbukti hanya pasangan $(p, q) = \left(-\dfrac{50}{3}, -20\right)$ yang memenuhi. $\square$

5. Jika koefisien a dan b dari persamaan garis lurus $ax + by = 0$ adalah dua bilangan berbeda dari $\{0, 1, 2, 3, 6, 7\}$, tentukan banyaknya garis lurus berbeda yang dapat dibentuk.

Solusi. (Wili, diketik Refrain)
Penyelesaian dibagi dalam tiga kasus:

a) $a = 0$.
Persamaan garis lurus menjadi $by = 0$ dengan b dapat dipilih dari $\{1, 2, 3, 6, 7\}$. Untuk setiap nilai b, persamaan yang dihasilkan merepresentasikan garis lurus yang sama, yaitu garis $y = 0$. Jadi, terdapat 1 garis lurus yang dapat dibentuk untuk kasus ini.

b) $b = 0$.
Analog dengan cara sebelumnya, hanya ada garis $x = 0$ sehingga hanya terdapat 1 garis lurus yang dapat dibentuk untuk kasus ini.

c) $a, b \neq 0$.
Banyak cara memilih pasangan (a, b) dari $\{1, 2, 3, 6, 7\}$ dengan $a \neq b$ adalah $P(5, 2) = \dfrac{5!}{(5-2)!} = 20$. Dari 20 pasangan (a, b) tersebut, terdapat pasangan-pasangan berbeda yang merepresentasikan garis yang sama. Sebagai contoh, $x + 3y = 0$ dan $2x + 6y = 0$ merepresentasikan garis yang sama. Secara keseluruhan, pasangan-pasangan (a, b) berbeda yang merepresentasikan garis yang sama adalah

- $(1, 2)$ dan $(3, 6)$ merepresentasikan garis $x + 2y = 0$.
- $(2, 1)$ dan $(6, 3)$ merepresentasikan garis $2x + y = 0$.
- $(1, 3)$ dan $(2, 6)$ merepresentasikan garis $x + 3y = 0$.
- $(3, 1)$ dan $(6, 2)$ merepresentasikan garis $3x + y = 0$.

Dengan demikian, terdapat $1 + 1 + 20 - 4 = \boxed{18}$ garis lurus berbeda yang dapat dibentuk.

$\square$