Soal dan Pembahasan Keren ONMIPA-PT Nasional 2024 v1.1

Yang Emas-Emas Aja (YEEA)

16 Mei 2024

Daftar Isi

§0 Kata Pengantar (Preface)

Puji dan syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa karena atas rahmat dan hidayah-Nya kami, Yang Emas-Emas Aja (YEEA) dapat merilis *Soal dan Pembahasan Keren ONMIPA-PT Nasional 2024* melanjutkan pembahasan sebelumnya, yaitu *Soal dan Pembahasan Keren ONMIPA-PT Wilayah 2024*. Tim penulis kali ini ada sedikit perubahan dari tim penulis sebelumnya di mana hanya beberapa penulis saja yang berpartisipasi. Sebagai sedikit *hint* untuk pembaca, berikut *hint* yang dapat kami berikan:

- Seluruh anggota tim penulis memiliki pengalaman sebagai alumni OSN;
- 1 dari 3 anggota tim penulis merupakan medalis OSN. Lebih lanjut, penulis tersebut merupakan peraih medali emas OSN;
- 3 dari 3 anggota tim penulis merupakan peraih medali emas ONMIPA;
- 2 dari 3 anggota tim penulis merupakan kontingen Indonesia untuk IMC.

Pembahasan ini kami buat dengan waktu sesingkat-singkatnya karena beberapa alasan (dan kami memiliki sedikit rahasia yang tidak akan kami sampaikan secara publik) di mana salah satu alasannya adalah salah dua anggota tim penulis cukup *gabut* sehingga mereka menghubungi dua anggota lainnya untuk membantu menulis solusi yang dibuat setelah diskusi bersama. Walaupun pembahasan dari salah satu penulis hanya untuk satu soal, penulis tersebutlah yang melakukan revisi pada pembahasan ini sehingga mampu memberikan pembahasan terbaik yang mungkin.

Seperti pembahasan edisi sebelumnya, kami selalu terbuka untuk masukan sebagai wujud pengembangan dari pembahasan ini [1] agar pembahasan ini bisa semutakhir solusi resmi ONMIPA-PT Nasional dari juri (kami tidak tahu solusi resminya).

Makassar, 16 Mei 2024

Tim Penulis

[1] Apabila ada kesalahan atau solusi alternatif yang elegan untuk dicantumkan di pembahasan ini, silahkan hubungi Mas Refrain melalui Instagram @refrainfrn (dia sedikit *slow-response*).

§1 Hari 1

1. Diberikan barisan bilangan real (a_n) yang memenuhi kondisi $0 < a_n < 1$ dan
$$a_n(1-a_{n+1}) > \frac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Selidiki kekonvergenan barisan (a_n) dan tentukan limitnya jika ada.

Solusi. (Refrain [Solusi 1], Wildabandon [Solusi 2])
Solusi 1. Berdasarkan kondisi (a_n), barisan (a_n) terbatas ke bawah. Kemudian, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku
$$a_n - a_{n+1} > 0 \iff a_n + (1-a_{n+1}) > 1. \tag{1}$$
Berdasarkan AM-GM berlaku
$$a_n + (1-a_{n+1}) \geq 2\sqrt{a_n(1-a_{n+1})} > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$
Oleh karena, ketaksamaan (1) berlaku sehingga (a_n) turun monoton. Berdasarkan teorema kekonvergenan monoton (turun), (a_n) konvergen, katakan ke $a \in \mathbb{R}$.

Bentuk barisan (b_n), $b_n := a_n(1-a_{n+1})$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena (a_n) konvergen, (b_n) konvergen, katakan ke $b := a(1-a) \in \mathbb{R}$. Berlaku $b \geq \frac{1}{4}$ sehingga diperoleh
$$a(1-a) \geq \frac{1}{4} \iff \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \iff a = \frac{1}{2}.$$
Akibatnya, (a_n) konvergen ke $\frac{1}{2}$.

Solusi 2. Misalkan $a_n = b_n + \frac{1}{2}$ yang berarti $-\frac{1}{2} < b_n < \frac{1}{2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ini berarti
$$\frac{1}{4} < a_n(1-a_{n+1}) = \left(b_n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - b_{n+1}\right) = -b_nb_{n+1} + \frac{b_n}{2} - \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{1}{4}$$
sehingga diperoleh
$$b_n > 2b_nb_{n+1} + b_{n+1} = b_{n+1}(2b_n+1).$$
Karena $2b_n + 1 > 0$, bagi kedua ruas dengan $2b_n + 1$ memberikan
$$1 > \frac{1}{2b_n+1} \quad \text{dan} \quad b_n > \frac{b_n}{2b_n+1} > b_{n+1}.$$
Jadi, (b_n) barisan monoton turun. Karena (b_n) terbatas ke bawah, akibatnya (b_n) konvergen sehingga (a_n) juga konvergen. Untuk kekonvergenannya sebagaimana Solusi 1.
Motivasi. Pandang $a_n(1-a_{n+1}) = (a_n - 0)(1-a_{n+1})$. Pengambilan $a_n = b_n + \frac{1}{2}$ asal mulanya dengan memperhatikan titik tengah $[0,1]$ untuk mendapatkan kesimetrisannya, yaitu $\frac{1}{2}$. Terlebih lagi, ekspresi tersebut dapat *menghilangkan* $\frac{1}{4}$ pada ruas kanan. □

2. Diketahui fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik pada $\mathbb{C}$, memenuhi

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2),$$

untuk setiap z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ dan $f(x) = e^x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $f(z) = e^z$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.

Solusi. (Refrain [Solusi 1], Wildabandon [Solusi 2])
Solusi 1. Dibentuk fungsi $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dengan definisi

$$g(z) = \frac{f(z)}{e^z} - 1$$

yang analitik pada $\mathbb{C}$ dan bernilai nol untuk setiap $z \in \mathbb{R}$. Berdasarkan *Identity Theorem*, $g(z) = 0$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ yang ekuivalen dengan $f(z) = e^z$.

Solusi 2. Ambil sebarang $z \in \mathbb{C}$ dan misalkan $z = x + iy$ di mana $x, y \in \mathbb{R}$. Untuk $z_1 := x$ dan $z_2 := iy$ berlaku

$$f(z) = f(x + iy) = f(x)f(iy) = e^x f(iy).$$

Misalkan $f(iy) = h(y) + ig(y)$ di mana $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diperoleh $f(x + iy) = e^x h(y) + i \cdot e^x g(y)$. Tulis $u(x, y) = e^x h(y)$ dan $v(x, y) = e^x g(y)$. Karena f analitik di $\mathbb{C}$, berlaku

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x h(y) + i \cdot e^x g(y) = f(z) \implies f'(z) = f(z).$$

Karena f analitik, maja f dapat dinyatakan sebagai $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Substitusikan pada $f(z) = f'(z)$, maka

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) = f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} z^n \implies a_n = (n+1)a_{n+1}$$

untuk setiap $n = 0, 1, 2, \cdots$. Dapat dibuktikan dengan induksi (diserahkan kepada pembaca) bahwa $a_n = \frac{a_0}{n!}$ untuk setiap bilangan $n = 0, 1, 2, \cdots$. Dari sini diperoleh

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} z^n = a_0 e^z.$$

Karena $f(x) = e^x$ untuk $x \in \mathbb{R}$, maka $a_0 e^x = f(x) = e^x$ sehingga $a_0 = 1$. Jadi, $f(z) = e^z$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$. $\square$

3. Diberikan barisan Fibonacci a_1, a_2, a_3, ... dengan aturan $a_1 = a_2 = 1$ dan

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1},$$

untuk setiap $n > 1$. Buktikan bahwa terdapat bilangan pada barisan tersebut yang berakhir dengan 2024 angka nol tak terputus sebelah kanan.

Solusi. (Refrain, ide by RM)
Soal ekuivalen ingin membuktikan terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan sifat $a_m \equiv 0 \pmod{10^{2024}}$.

Didefinisikan $a_0 = a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$ agar barisan Fibonacci (a_n) dapat dimulai dari indeks $n = 0$. Jelas $a_n > 0$ untuk setiap $n > 0$. Soal diperumum dengan membuktikan pernyataan untuk sembarang modulo terhadap $s \in \mathbb{N}$.

Dibentuk tupel (a_n, a_{n+1}) untuk setiap $n \geq 1$. Dengan mengambil terhadap modulo s, terdapat s^2 kemungkinan nilai untuk (a_n, a_{n+1}). Akibatnya, berdasarkan *Pigeonhole Principle* apabila diambil $k^2 + 1$ suku pertama dari tupel (a_n, a_{n+1}) setelah $n = 0$, yaitu untuk $1 \leq n \leq k^2$, terdapat dua indeks i dan j, $1 \leq i < j \leq s^2 + 1$ dengan sifat $(a_i, a_{i+1}) = (a_j, a_{j+1})$ dalam modulo s. Akibatnya,

$$a_{i-1} = a_{i+1} - a_i \equiv a_{j+1} - a_j \equiv a_{j-1} \pmod{s}.$$

Pembaca dapat lebih lanjut membuktikan bahwa $a_{i-k} \equiv a_{j-k} \pmod{s}$ untuk setiap $0 \leq k \leq i$ secara induktif. Dengan mengambil $k = i$ diperoleh $a_{j-i} > 0$ dan $a_{j-i} \equiv a_0 \equiv 0 \pmod{s}$. Pernyataan soal yang diperumum terbukti. $\square$

4. a) Misalkan A suatu matriks berukuran $n \times n$ atas $\mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan $A^2 = A^T$. Jika A dapat didiagonalkan atas $\mathbb{R}$, buktikan bahwa A matriks simetrik.

   b) Berikan matriks B berukuran 2×2 atas $\mathbb{R}$ yang tidak simetrik dan memenuhi persamaan $B^2 = B^T$.

Solusi. (Refrain)

a) Dengan mengambil transpose pada persamaan matriks A diperoleh

$$A = (A^2)^T = (A^T)^2 = (A^2)^2 = A^4$$

dan diperoleh pula bahwa $A^4 - A = 0$. Akibatnya, polinom minimal matriks A, yaitu $p_A(\lambda)$ habis membagi polinom $\lambda^4 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$. Karena A dapat didiagonalkan, $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_k)$ dengan $k \leq n$ dan $\lambda_i \neq \lambda_j$ untuk setiap $1 \leq i < j \leq k$. Dengan kata lain, $p_A(\lambda)$ adalah hasil perkalian polinom linear yang berbeda (sumber teorema dapat diakses di sini). Akibatnya, $p_A(\lambda)$ habis membagi polinom $\lambda(\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda$ sehingga matriks A memenuhi persamaan $A^2 - A = 0$. Dapat disimpulkan bahwa $A = A^2 = A^T$ atau A merupakan matriks simetris.

> **Catatan.** Permasalahan dapat diselesaikan dengan memanfaatkan diagonalisasi $A = PDP^{-1}$ di mana $A^2 = PD^2P^{-1}$ dan menggunakan fakta $A^4 = A$ untuk memperoleh seluruh nilai eigen dari A untuk penyelesaian yang lebih sederhana.

b) Apabila B memenuhi kesamaan $B^2 = B^T$ tetapi tak dapat didiagonalkan, maka polinom minimal B, yaitu $p_B(\lambda)$ yang habis membagi $\lambda^4 - \lambda$ memuat faktor $\lambda^2 + \lambda + 1$. Dengan kata lain, $\lambda^2 + \lambda + 1$ habis membagi $p_B(\lambda)$ sehingga $\deg(p_B(\lambda)) \geq 2$. Karena matriks B berukuran 2×2, polinom karakteristik B, yaitu $c_B(\lambda) = \det(\lambda I - B)$ memiliki derajat 2. Di lain sisi, karena $p_B(\lambda)$ habis membagi $c_B(\lambda)$, maka $p_B(\lambda) = c_B(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ berdasarkan ketunggalan polinom minimal. Oleh karena itu, matriks B memenuhi persamaan

$$B^2 + B + I = 0 \iff B^T + B = -I.$$

Pembaca dapat mengecek bahwa hanya matriks $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ yang memenuhi persamaan ini dan benar bahwa kedua matriks ini merupakan matriks yang memenuhi ketentuan soal.

$\square$

5. Diberikan grup hingga G dengan unsur-unsurnya $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } x_i x_j^{-1} \neq x_j x_i^{-1}, \\ 0, & \text{jika } x_i x_j^{-1} = x_j x_i^{-1}. \end{cases}$$

Buktikan bahwa $\det(A)$ selalu genap.

Solusi. (Sheraz)
Pertama, akan dibuktikan bahwa banyaknya $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ yang tidak memenuhi $x_i x_j^{-1} = x_j x_i^{-1}$ selalu sama untuk setiap $i = \{1, 2, \ldots, n\}$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $g \in G$ yang memenuhi $x_1 g^{-1} = g x_1^{-1}$, berlaku

$$x_i (x_1 g^{-1} x_i)^{-1} = x_i x_i^{-1} g x_1^{-1} = g x_1^{-1} = x_1 g^{-1} = (x_1 g^{-1} x_i) x_i^{-1}$$

untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Akibatnya, karena pemetaan $g \mapsto x_1 g^{-1} x_i$ bersifat bijektif, maka dapat disimpulkan bahwa banyaknya $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ yang memenuhi $x_i x_j^{-1} = x_j x_i^{-1}$ selalu sama untuk setiap $i = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sebaliknya, banyak $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ yang tidak memenuhi kondisi tersebut juga selalu sama untuk setiap $i = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Selanjutnya, diperhatikan bahwa jika $x \neq e$ berorder selain 2, maka x^{-1} juga berorder selain 2. Akibatnya, terdapat sebanyak genap elemen $g \in G$ yang memenuhi $g^2 \neq e$, katakan sebanyak $2m$ dengan $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sehingga pertidaksamaan

$$x_1 h^{-1} \neq h x_1^{-1} \iff e \neq h x_1^{-1} (x_1 h^{-1})^{-1} = h x_1^{-1} h x_1^{-1} = (h x_1^{-1})^2$$

memiliki sebanyak $2m$ solusi untuk $h \in G$. Jadi, terdapat tepat $2m$ entri 1 pada baris pertama matriks A dan hal yang sama juga berlaku untuk semua baris lainnya.

Terakhir, diperhatikan bahwa jika dilakukan operasi kolom pada A dengan menjumlahkan setiap kolom ke-i dengan $i = 2, 3, \ldots, n$ ke kolom pertama, diperoleh matriks baru, katakan A', dengan setiap entri kolom pertamanya adalah $2m$. Lebih lanjut, jika A'' adalah matriks yang diperoleh dari A' dengan membagi semua entri kolom pertamanya dengan $2m$, didapat

$$\det(A) = \det(A') = 2m \det(A'').$$

Nilai $\det(A'')$ pasti bulat karena setiap entrinya bernilai bulat. Dengan demikian, terbukti bahwa $\det(A)$ bernilai genap. $\square$

§2 Hari 2

1. Cari semua pasangan bilangan kompleks (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)z, \\ y^2 + z^2 &= (y + z)x, \\ z^2 + x^2 &= (z + x)y. \end{aligned}$$

Solusi. (Wildabandon)
Perhatikan bahwa jika (x, y, z) solusi, maka seluruh permutasi dari (x, y, z) juga solusi. Kurangkan persamaan pertama dengan kedua,

$$x^2 - z^2 = yz - xy = y(z - x) \implies 0 = (x + z)(x - z) + y(x - z) = (x + y + z)(x - z).$$

Jika $x = z$, dari persamaan ketiga diperoleh $2x^2 = 2xy \implies 2x(x - y) = 0$. Jika $x = 0$, maka $z = 0$ sehingga diperoleh $y = 0$. Jika $x = y$, maka $x = y = z$ yang mana ini memenuhi sistem persamaan. Jadi, $(x, y, z) = (a, a, a)$ untuk setiap $a \in \mathbb{C}$ merupakan solusi.
Jika $x + y + z = 0$, maka $x + y = -z$ sehingga

$$x^2 + y^2 = (x + y)z = (-z)z = -z^2 \implies x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Tinjau bahwa $x + y = -z$ sehingga diperoleh

$$z^2 = (-z)^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = -z^2 + 2xy$$

yang berarti $z^2 = xy$. Secara analog, diperoleh $x^2 = yz$ dan $z^2 = xy$. Ini berarti $x^3 = y^3 = z^3 = xyz$. Perhatikan bahwa dari $x^3 = y^3$ memberikan

$$y = x, \quad y = xe^{2i\pi/3}, \quad \text{atau} \quad y = xe^{4i\pi/3}.$$

Jika $x = y$, diperoleh $2x + z = 0 \iff z = -2x$. Dari $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ akan diperoleh solusi $x = y = z = 0$ (telah ditinjau di kasus sebelumnya).
Jika $y = xe^{i\pi/3}$, maka

$$z = -x - y = -x\left(1 + e^{2i\pi/3}\right) = x\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = xe^{4i\pi/3}.$$

Diperoleh $(x, y, z) = \left(a, ae^{2i\pi/3}, ae^{2i\pi/3}\right)$ untuk $a \in \mathbb{C}$. Substitusikan untuk diperiksa pada persamaan awal,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 + \left(ae^{2i\pi/3}\right)^2 &&= a^2 + a^2e^{4i\pi/3}, \\ (x + y)z &= \left(a + ae^{2i\pi/3}\right)ae^{4i\pi/3} &&= a^2e^{4i\pi/3} + a^2, \\ y^2 + z^2 &= \left(ae^{2i\pi/3}\right)^2 + \left(ae^{4i\pi/3}\right)^2 &&= a^2e^{4i\pi/3} + a^2e^{2i\pi/3}, \\ (y + z)x &= \left(ae^{2i\pi/3} + ae^{4i\pi/3}\right)a &&= a^2e^{2i\pi/3} + a^2e^{4i\pi/3}, \\ z^2 + x^2 &= \left(ae^{4i\pi/3}\right)^2 + a^2 &&= a^2e^{2i\pi/3} + a^2, \\ (z + x)y &= \left(ae^{4i\pi/3} + a\right)ae^{2i\pi/3} &&= a^2 + a^2e^{2i\pi/3}. \end{aligned}$$

Ini berarti solusi (x, y, z) tersebut memenuhi untuk sebarang $a \in \mathbb{C}$.
Jika $y = xe^{4i\pi/3}$ akan memberikan solusi $(x, y, z) = \left(a, ae^{4i\pi/3}, ae^{2i\pi/3}\right)$ yang mana sudah terhitung pada permutasi solusi kasus sebelumnya.
Jadi, semua solusinya adalah (x, y, z) yang memenuhi adalah (a, a, a), $\left(a, ae^{2i\pi/3}, ae^{4i\pi/3}\right)$ dan permutasinya di mana $a \in \mathbb{C}$. $\square$

2. Diberikan sembarang pewarnaan merah-biru pada setiap ruas garis yang menghubungkan 10 titik. Buktikan bahwa terdapat tiga titik sedemikian sehingga ketiga ruas garis yang menghubungkan ketiga titik tersebut berwarna merah, atau terdapat empat titik sedemikian sehingga keenam ruas garis yang menghubungkan keempat titik tersebut berwarna biru.

   Solusi. (Wildabandon)
   Beri nama titik-titik sebagai $T_1, T_2, \cdots, T_{10}$. Tinjau jika terdapat i sedemikian sehingga T_i terhubung oleh empat titik lain dengan segmen merah, misalkan T_a, T_b, T_c, T_d. Jika terdapat sebuah segmen merah yang menghubungkan diantara T_a, T_b, T_c, T_d, maka akan terdapat tiga titik yang dihubungkan dengan segmen merah, kita selesai. Jika tidak ada, maka $\binom{4}{2} = 6$ segmen yang saling menghubungkan empat titik tersebut berwarna biru, kita selesai.
   Sekarang, andaikan setiap titik $T_1, T_2, \cdots, T_{10}$ terhubung segmen merah maksimal dengan tiga titik lainnya. Ini artinya setiap titik tersebut terhubung segmen biru setidaknya dengan enam titik lainnya. Misalnya titik T_1 terhubung segmen biru dengan $T_{n_1}, T_{n_2}, \cdots, T_{n_6}$.
   Akan dibuktikan bahwa dari keenam titik ini akan ada tiga titik yang saling terhubung segmen biru atau segmen merah. Tinjau titik T_{n_1} jika dihubungkan dengan titik lainnya, terdapat setidaknya tiga segmen biru atau tiga segmen merah yang terbentuk. Tanpa mengurangi keumuman, misalnya titik T_{n_1} terhubung segmen merah dengan tiga titik lain dari $T_{n_2}, T_{n_3}, \cdots, T_{n_6}$, sebut $T_{m_1}, T_{m_2}, T_{m_3}$. Jika terdapat segmen merah yang menghubungkan diantara $T_{m_1}, T_{m_2}, T_{m_3}$, maka akan terbentuk tiga titik yang terhubung garis merah (menggunakan titik T_{n_1} dan dua titik sebelumnya yang terhubung segmen merah). Jika tidak, ini artinya $T_{m_1}, T_{m_2}, T_{m_3}$ saling terhubung segmen biru. Akibatnya, $T_1, T_{m_1}, T_{m_2}, T_{m_3}$ saling terhubung dengan segmen biru. $\square$

3. Diketahui $r > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, fungsi $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ kontinu di 0 dan

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(\alpha x)}{x}$$

   ada di $\mathbb{R}$. Selidiki eksistensi $f'(0)$. Berikan penjelasan jawaban Anda.

   Solusi. (Refrain ft. Bekingan)
   Misalkan $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(\alpha x)}{x}$.

   Klaim. Nilai $f'(0)$ ada dan $f'(0) = \dfrac{L}{1 - \alpha}$

   Motivasi. Untuk memperoleh nilai $f'(0)$ dapat dimulai dengan menganggap $f'(0)$

terlebih dahulu dan dengan definisi turunan sebagai limit

$$\begin{aligned}L = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\alpha x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+f(0)-f(\alpha x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} - \lim_{x\to 0}\alpha\frac{f(0)-f(\alpha x)}{\alpha x}\\ &= f'(0)-\alpha f'(0).\end{aligned}$$

Kesamaan ini mengakibatkan $f'(0) = \dfrac{L}{1-\alpha}$.

Bukti. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$f(x)-f(\alpha x)+f(\alpha x)-f(\alpha^2 x)+\cdots+f(\alpha^{n-1}x)-f(\alpha^n x) = f(x)-f(\alpha^n x).$$

Karena f kontinu di 0 dan barisan $x_n := \alpha^n x,\ \forall n \in \mathbb{N}$ konvergen ke 0, berlaku

$$f(x)-f(0) = \lim_{n\to\infty} f(x)-f(\alpha^n x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n-1}(f(\alpha^m x)-f(\alpha^{m+1}x)) = \sum_{m=0}^{\infty}(f(\alpha^m x)-f(\alpha^{m+1}x)).$$

Akibatnya, untuk $x \in (-r,r)$ dengan $x \neq 0$ berlaku

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sum_{m=0}^{\infty}\alpha^m\frac{f(\alpha^m x)-f(\alpha^{m+1}x)}{\alpha^m x}.$$

Kemudian, diambil sembarang $\epsilon > 0$. Dengan fakta dari kekonvergenan $\dfrac{f(x)-f(\alpha x)}{x}$ ketika $x \to 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in (-r,r)$ dengan $0 < |x| < \delta$ berlaku

$$\left|\frac{f(x)-f(\alpha x)}{x} - L\right| < \epsilon.$$

Karena $0 < \alpha < 1$, untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ cukup jelas bahwa $0 < |\alpha^m x| < |x| < \delta$ sehingga berlaku (apabila pembaca kesusahan, anda dapat memisalkan $y = \alpha^m x$

$$\left|\frac{f(\alpha^m x)-f(\alpha^{m+1}x)}{\alpha^m x} - L\right| < \epsilon \iff \left|\frac{f(\alpha^m x)-f(\alpha^{m+1}x)}{x} - L\alpha^m\right| < \alpha^m\epsilon.$$

Dengan "membongkar" ketaksamaan terakhir diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}&L\alpha^m - \alpha^m\epsilon < \frac{f(\alpha^m x)-f(\alpha^{m+1}x)}{x} < L\alpha^m + \alpha^m\epsilon \implies\\ &\qquad (L-\epsilon)\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^m \le \sum_{m=0}^{\infty}\frac{f(\alpha^m x)-f(\alpha^{m+1}x)}{x} \le (L+\epsilon)\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^m.\end{aligned}$$

Dengan seluruh fakta yang telah diperoleh termasuk menyederhanakan sumasi yang ada, dapat disimpulkan bahwa untuk $0 < |x| < \delta$ berlaku

$$\frac{L-\epsilon}{1-\alpha} \le \frac{f(x)-f(0)}{x} \le \frac{L+\epsilon}{1-\alpha} \iff \left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - \frac{L}{1-\alpha}\right| \le \frac{\epsilon}{1-\alpha} < \frac{2\epsilon}{1-\alpha}.$$

Berdasarkan definisi turunan, $f'(0)$ ada dan $f'(0) = \dfrac{L}{1-\alpha}$. □

4. Diketahui $\mathbb{R}[x]$ adalah ring polinom atas $\mathbb{R}$. Untuk setiap $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, ideal di $\mathbb{R}[x]$ yang dibangun oleh $p(x)$ dinotasikan sebagai $\langle p(x) \rangle$.

   a) Buktikan $\langle x - 2024 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.

   b) Tentukan bilangan asli a terbesar sehingga $\left\langle x^2 + ax + 2024 \right\rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.

Solusi. (Wildabandon)
Misalkan F merupakan field. Jika $p(x) \in F[x] \setminus \{0\}$, maka $\langle p(x) \rangle$ ideal maksimal di $F[x]$ jika dan hanya jika $p(x)$ irreducible di $F[x]$. Tinjau field $\mathbb{R}$.

a) Polinom linier irreducible di $\mathbb{R}[x]$, jadi $\langle x - 2024 \rangle$ ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.

b) Agar $\left\langle x^2 + ax + 2024 \right\rangle$ ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$, maka $x^2 + ax + 2024$ harus irreducible di $\mathbb{R}[x]$. Ini haruslah $x^2+ax+2024 = 0$ tidak memiliki penyelesaian bilangan real, yaitu saat $0 > a^2 - 4(1)(2024) \implies a \leq 89$. Jadi, $a = 89$ sebagai bilangan asli terbesar yang memenuhi.

> **Catatan.** Soal ini akan sangat sederhana apabila pembaca sudah mengetahui definisi ideal maksimal dan syarat perlu-cukupnya. Apabila pembaca tidak mengetahui hal ini, dibutuhkan waktu lebih untuk menyelesaikan permasalahan yang ada. Akan tetapi, teorema ini merupakan teorema "standar" yang diberikan di perkuliahan Struktur Aljabar atau Aljabar Abstrak sehingga seharusnya teorema pada soal ini sangat *well-known.*

□

5. Misal V ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam riil $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dan normal $\|\cdot\|$ yang didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle, \quad \forall \mathbf{f} \in V.$$

Lebih lanjut, diberikan pemetaan linier $T : V \to V$ dengan

$$\langle T(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) \rangle, \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V.$$

Buktikan bahwa jika $\mathbf{v} \in V$ dan $\mathbf{u} \in T(V)$ dengan $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u})$, buktikan bahwa

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{w} \in T(V).$$

Catatan. $T(V) = \{T(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in V\}$.

Solusi. (Refrain, ide by RM)
Soal ekuivalen dengan membuktikan $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2$.

Perhatikan bahwa $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Diambil sembarang $\mathbf{w} \in T(V)$, terdapat $\mathbf{a} \in V$ dengan sifat $\mathbf{w} = T(\mathbf{a})$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle T(\mathbf{a}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{a}, T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{0} \rangle = 0.$$

Akibatnya $\mathbf{u} - \mathbf{v} \perp T(V)$. Perhatikan bahwa

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 = \|(\mathbf{w} - \mathbf{u}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})\|^2 = \|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2.$$

Kesamaan terakhir berlaku karena $\mathbf{w} - \mathbf{u} \in T(V)$ dan $\mathbf{u} - \mathbf{v} \perp T(V)$. Karena $\|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|^2 \geq 0$, dapat disimpulkan bahwa

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2.$$

Lebih lanjut, kesamaan terjadi jika dan hanya jika $\|\mathbf{w} - \mathbf{u}\| = 0$ yang ekuivalen dengan $\mathbf{w} = \mathbf{u}$. □